Тв 5 $gH = lH \Leftrightarrow g^{-1}l \in H$.

$gH = lH \Rightarrow l \in gH \Rightarrow l = gh_1, h_1 \in H \Rightarrow g^{-1}l = h_1 \in H$

$g^{-1}l = h_2 \in H \Rightarrow l = gh_2 \in gH \Rightarrow lH = gH$

Тв 5' $Hg = Hl \Leftrightarrow gl^{-1} \in H$ // аналогично доказателство

Тв 6 Ако H е крайна група, $|H| = |gH|$.

$gh_1 = gh_2 \Leftrightarrow h_1 = h_2 \Rightarrow \eta : H \to gH : \eta(h) = gh \Rightarrow$ биекция $\Rightarrow |H| = |gH|$.

Тв 7 $L = \{gH \mid g \in G\}$

$R = \{Hg \mid g \in G\}$

$\varphi : L \to R : \varphi(gH) = Hg^{-1}$ е биекция и $|L| = |R|$, когато са краен брой.

$gH = tH \Rightarrow g^{-1}t \in H \Leftrightarrow (g^{-1})(t^{-1})^{-1} \in H \Rightarrow Hg^{-1} = Ht^{-1} \Leftrightarrow \varphi(gH) = \varphi(tH)$.

Следствия:

1) коректност на φ: $gH = tH \Rightarrow \varphi(gH) = \varphi(tH)$;
2) $\varphi(gH) = \varphi(tH) \Rightarrow gH = tH$ - инекция
3) $Hg = \varphi(g^{-1}H)$ - сюрекция

$\Rightarrow \varphi$ - биекция $\longrightarrow |L| = |R|$

D Индекс на H в G е броят на левите / десните съседните класове.
Бележим: $|G : H|$; $|S_3 : H| = 3$

Т на Лагранж

G - крайна, $H < G$, $G = H \cup Hg_1 \cup \dots \cup Hg_s H \Rightarrow |G| = |G : H| \cdot |H|$

(непресичащи се множества)

Сл 1 $H < G \Rightarrow |H| \mid |G|$ и $|G : H| \mid |G|$

Сл 2 $|G| < \infty$, $a \in G$

$|a| = |\langle a \rangle|$; $\langle a \rangle < G \Rightarrow |a| \mid |G|$

Сл 3 $|G| = p$, p - просто $\Rightarrow G$ - циклична

$a \in G, a \neq e \Rightarrow |a| \neq 1$ и $|a| \mid p \Rightarrow |a| = p \Rightarrow |\langle a \rangle| = |G| \Rightarrow G = \langle a \rangle$.

Нормални подгрупи. Теорема за полиморфизъм

D $(G_1, \cdot)$; $(G_2, *)$; $\varphi : G_1 \to G_2$ е хоморфизъм, ако:

$\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) * \varphi(b) \quad \forall a, b \in G_1$

Свойства на хоморфизма

1. $\varphi(a_1 \dots a_s) = \varphi(a_1) * \varphi(a_2) \dots * \varphi(a_s)$
2. $\varphi(e) = e \longrightarrow \varphi(a) = \varphi(ae) = \varphi(a)\varphi(e) \mid \cdot (\varphi(a))^{-1}$

$(\varphi(a))^{-1}\varphi(a) = (\varphi(a))^{-1}\varphi(a)\varphi(e) = \varphi(e)$

③ $\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}$

$e = \varphi(e) = \varphi(a \cdot a^{-1}) = \varphi(a)\varphi(a^{-1}) \Rightarrow \varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}$

D Ядро на хомоморфизъм φ: $\ker\varphi = \{a \in G_1 \mid \varphi(a) = e\} \subset G_1$

Образ на хомоморфизъм: $\operatorname{Im}\varphi = \{\varphi(a) \mid a \in G_1\} \subset G_2$

T $\ker\varphi < G_1$; $\operatorname{Im}\varphi < G_2$

$a, b \in \ker\varphi \Rightarrow \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = e.e. = e$

$\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1} = e^{-1} = e$

$\Rightarrow a, b \in \ker\varphi$ и $a^{-1} \in \ker\varphi \Rightarrow \ker\varphi < G_1$

Св-во $\varphi(a) = \varphi(b) \Leftrightarrow b \in a\ker\varphi \Leftrightarrow b \in \ker\varphi a$

1. ляво

$\Leftrightarrow b \in a\ker\varphi \Rightarrow b = ah_1, h_1 \in \ker\varphi \Rightarrow \varphi(b) = \varphi(ah_1) = \varphi(a)\underbrace{\varphi(h_1)}_{e} = \varphi(a)$

$\Rightarrow \varphi(a) = \varphi(b) \Rightarrow \varphi(a^{-1}b) = \varphi(a^{-1})\varphi(b) = (\varphi(a))^{-1}\varphi(b) = e$

$\Rightarrow a^{-1}b \in \ker\varphi \Rightarrow b \in a\ker\varphi$

$\varphi(a) = \varphi(b) \Rightarrow \varphi(ab^{-1}) = \ldots = e \Rightarrow ab^{-1} \in \ker\varphi \Rightarrow a \in \ker\varphi b \Rightarrow$

$\Rightarrow b \in \ker\varphi a$

Извод: $\ker\varphi$ е такава подгрупа на G, че $a\ker\varphi = \ker\varphi a$

D Нормална подгрупа: $H < G$. H е нормална подгрупа за G, ако $aH = Ha, \forall a \in G$. Записваме $H \triangleleft G$.

Забележка | За G - Абелева $\Rightarrow$ всяка подгрупа е нормална.

$\{e\} \triangleleft G$; $G \triangleleft G$

$H < G$ и $|G:H| = 2$

$\hookrightarrow a \notin H \Rightarrow G = H \cup aH$

$aH = G \setminus H = Ha$ $\rightarrow$ не може да е друго

$\hookrightarrow$ Когато индексът ѝ е 2, подгрупата е нормална.

Т Нека G е група и $H < G$.

$H \triangleleft G \Leftrightarrow \underbrace{ghg^{-1}}_{\text{спрегнат на } h} \in H \; \forall h \in H, \forall g \in G$

Доказателство:

$\Rightarrow$) $H \triangleleft G$; $ghg^{-1} = (gh)g^{-1} = h_1 gg^{-1} = h_1 \in H \Rightarrow ghg^{-1} \in H$

$gh \in gH = Hg \Rightarrow gh = h_1 g$, $h_1 \in H$

$\Leftarrow$) $g \in G$

$a \in Hg : a = h_1 g = g\underbrace{g^{-1}hg}_{\in H} = gh_2$

$\Rightarrow a \in Hg \Rightarrow a \in gH \Rightarrow Hg \subset gH$

$b \in gH \Rightarrow b = gh_3 \Rightarrow b = ghg^{-1}g = h_4 g \Rightarrow b \in Hg \Rightarrow gH \subset Hg$

$\Rightarrow Hg = gH \Rightarrow \underbrace{H \triangleleft G}_{\in H}$

Пример: $G = (GL(n,\mathbb{R}) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}, \cdot)$

$S = SL(n,\mathbb{R}) = \{A \in G \mid \det A = 1\}$

? $S \triangleleft G$

$A,B \in S \Rightarrow \det A = \det B = 1 \Rightarrow \det AB = 1 \Rightarrow S < G$

$\det A^{-1} = 1$

$A \in S, B \in G$

$BAB^{-1} \in S$? $\det BAB^{-1} = \det B \det A \det B^{-1} = 1 \Rightarrow BAB^{-1} \in S \Rightarrow S \triangleleft G$

G - група; $H \triangleleft G$

$G = H \cup a_1 H \cup \dots \cup a_s H$

Нека $x_1 \in a_1 H$, $x_2 \in a_2 H$

$x_1 = a_1 h_1$, $x_2 = a_2 h_2$, $h_i \in H$

$x_1 x_2 = (a_1 h_1)(a_2 h_2) = a_1 a_2 \boxed{a_2^{-1} h_1 a_2} h_2 = a_1 a_2 \boxed{h_3 h_2} = a_1 a_2 h_4 \in a_1 a_2 H$

$\boxed{h_3 \in H}$ $\boxed{h_4 \in H}$

! $(a_1 H)(a_2 H) = a_1 a_2 H$

↳ H - НЕ Е НОРМАЛНА $\Rightarrow$ ТАЗИ ОПЕРАЦИЯ НЕ Е КОРЕКТНА

$G/H = \{gH \mid g \in G\}$

1) $(a_1 H a_2 H) a_3 H = a_1 a_2 H a_3 H = (a_1 a_2) a_3 H = a_1 (a_2 a_3) H = a_1 H a_2 a_3 H =$
$= a_1 H (a_2 H a_3 H)$

2) $H = eH$

$gHeH = gH = eHgH \Rightarrow eH$ - ЕДИНИЧЕН ЕЛЕМЕНТ

3) $gH(g^{-1}H) = gg^{-1}H = eH$

$\Rightarrow$ **D** G/H - ФАКТОР-ГРУПА НА G, ФАКТОРИЗИРАНО ПО H

$\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$H \triangleleft G$

$\varphi : G \to G/H$

$\varphi(a) = aH$

$\varphi(ab) = abH = aHbH = \varphi(a)\varphi(b)$ } ХОМОМОРФИЗЪМ

$\ker\varphi = \{a \mid \varphi(a) = H\} \Rightarrow \ker\varphi = H \Rightarrow \varphi$ е ЕПИМОРФИЗЪМ

$\varphi(a) = aH = H \Leftrightarrow a \in H$

T ЗА ХОМОМОРФИЗМИТЕ ПРИ ГРУПИ

Ако $\varphi : G_1 \to G_2$ е хомоморфизъм с ядро $\ker\varphi$, тогава

$G_1/\ker\varphi \cong \mathrm{Im}\varphi$

Доказателство:

$\varphi : G_1 \to G_2 > \mathrm{Im}\varphi$

$\eta : G_1 \to G_1/\ker\varphi$ ⋮ ψ

$\eta(a) = a\ker\varphi \to \ker\eta = \ker\varphi$

$x \in a\ker\varphi \Rightarrow x = ah, h \in \ker\varphi$

$\varphi(x) = \varphi(ah) = \varphi(a)$

↳ Дефинираме $\psi: G_1/\ker\varphi \to \mathrm{Im}\varphi : \psi(a\ker\varphi) = \varphi(a)$

Ако $x\ker\varphi = a\ker\varphi \Rightarrow \varphi(x) = \varphi(a) \Rightarrow \psi(x\ker\varphi) = \psi(a\ker\varphi)$.

$\psi(a\ker\varphi b\ker\varphi) = \psi(ab\ker\varphi) = \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = \psi(a\ker\varphi)\psi(b\ker\varphi)$

$\Rightarrow$ ψ е хомоморфизъм.

$\psi(a\ker\varphi) = \psi(b\ker\varphi) \Rightarrow \varphi(a) = \varphi(b) \Rightarrow \varphi(ab^{-1}) = \varphi(a)\varphi(b)^{-1} = e \Rightarrow$

$\Rightarrow ab^{-1} \in \ker\varphi \Rightarrow a \in \ker\varphi b = b\ker\varphi \Rightarrow a\ker\varphi = b\ker\varphi$.

$\Rightarrow$ ψ е инекция.

$x \in \mathrm{Im}\varphi \Rightarrow \exists y \in G_1 : \varphi(y) = x \Rightarrow x = \psi(y\ker\varphi) \Rightarrow \mathrm{Im}\psi = \mathrm{Im}\varphi$

$\Rightarrow$ ψ е биекция

$\Rightarrow$ ψ е изоморфизъм. $\Rightarrow G_1/\ker\varphi \cong \mathrm{Im}\varphi$

D Казваме, че групата G действа върху множеството M, когато за $\forall g \in G, \forall x \in M$ е съпоставен елемент $g(x) \in M$ и:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ g_1 g_2(x) = g_1(g_2(x)) \\ 2)\ e(x) = x \end{array}\right\} \forall x \in M, \forall g_i \in G, i = \overline{1,2}$$

Пример: 1) група от еднаквости – диадрални групи

2) всички ротации с начало О действат върху всички точки от равнината.

3) GL действа върху $\mathbb{R}^n$

$A \in GL$, $x(x_1 .. x_n) \in \mathbb{R}^n \to A(x) = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

Тв Групата G действа върху множеството $M \Leftrightarrow \exists$ хомоморфизъм

$\varphi: G \to S(M)$

Доказателство:

$\Rightarrow$) Нека G действа върху M. $g \in G \Rightarrow$ на $\forall x \in M$ можем да съпоставим $g(x) \in M$.

$\varphi_g : M \to M : \varphi_g(x) = g(x)$ ——— ще докажем, че е биекция.

$x \neq y \in M$.

Допускаме, че $g(x) = g(y) \Rightarrow \exists g^{-1} : g(g^{-1}(x)) = g(g^{-1}(y)) \Rightarrow e(x) = e(y) \Rightarrow$

$\Rightarrow x = y$ ↯ $\Rightarrow$ Допускането е невалидно $\Rightarrow g(x) \neq g(y) \Rightarrow \varphi_g(x) \neq \varphi_g(y) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ инекция.

$z \in M$

$z \stackrel{?}{=} \varphi_g(g^{-1}(z)) = g(g^{-1}(z)) \to \varphi_g$ – сюрекция $\Rightarrow$ биекция.

$\to \varphi: G \to S(M)$

$\varphi(g_1 g_2) = \varphi_{g_1 g_2} = \varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2} = \varphi(g_1) \circ \varphi(g_2)$

$\varphi_{g_1 g_2}(x) = g_1 g_2(x) = g_1(g_2(x)) = \varphi_{g_1}(\varphi_{g_2}(x))$ $\Rightarrow$ φ е хомоморфизъм