(4) Нормални подгрупи и фактогрупи. Хомоморфизми при групи.

Деф: $(G_1, \cdot)$ и $(G_2, *)$

$\varphi: G_1 \to G_2$ е хомоморфизъм, ако $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) * \varphi(b)$, $\forall a, b \in G_1$

($*$ и $\cdot$ са едно и също действие, но са представени така в деф., за да се прави разлика, надолу $* \to \cdot$)

Свойства:

1) Ако $\varphi: G_1 \to G_2$ е хомоморфизъм, то

$$\varphi(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_s) = \varphi(a_1) \cdot \varphi(a_2) \cdot \ldots \cdot \varphi(a_s)$$

2) $\varphi(e) = e$ ⇐ (dok-vo:)

$\varphi(a) = \varphi(ae) = \varphi(a) \cdot \varphi(e)$

$(\varphi(a))^{-1} \cdot \varphi(a) = (\varphi(a))^{-1} (\varphi(a)) \cdot \varphi(e)$

$\Rightarrow e = \varphi(e)$

3) $\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}$

Dok-vo:

$e = \varphi(e) = \varphi(a \cdot a^{-1}) = \varphi(a) \cdot \underbrace{\varphi(a^{-1})}_{\text{обратен на } \varphi(a)}$

$\Rightarrow \varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}$

Деф: Ker $\varphi = \{ a \in G_1 \mid \varphi(a) = e \} \subset G_1$

ядро

Деф: Im $\varphi = \{ \varphi(a) \mid a \in G_1 \} \subset G_2$

образ

(Тв.) $\operatorname{Ker}\varphi < G_1$, $\operatorname{Im}\varphi < G_2$

Ако $a, b \in \operatorname{Ker}\varphi \Rightarrow \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = e \cdot e = e$

$\Rightarrow \varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1} = e^{-1} = e$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a \cdot b \in \operatorname{Ker}\varphi \\ a^{-1} \in \operatorname{Ker}\varphi \end{array}\right\} \Rightarrow \operatorname{Ker}\varphi < G_1$

Св-во:

$\varphi(a) = \varphi(b) \Leftrightarrow b \in a\operatorname{Ker}\varphi \Leftrightarrow b \in (\operatorname{Ker}\varphi)a$

Док-во:

$\Leftarrow$ Нека $b \in a\operatorname{Ker}\varphi \Rightarrow b = a \cdot h_1$, където $h_1 \in \operatorname{Ker}\varphi$

$\varphi(b) = \varphi(a h_1) = \varphi(a) \cdot \underbrace{\varphi(h_1)}_{=e} = \varphi(a)$

$\Rightarrow$ Нека $\varphi(a) = \varphi(b) \Rightarrow \varphi(a^{-1}b) = \varphi(a^{-1}) \cdot \varphi(b) =$

$= (\varphi(a))^{-1} \cdot \varphi(b) = e \Rightarrow a^{-1}b \in \operatorname{Ker}\varphi \Rightarrow$

$\Rightarrow b \in a \cdot \operatorname{Ker}\varphi$

$\varphi(a) = \varphi(b) \Rightarrow \varphi(a \cdot b^{-1}) = e \Rightarrow ab^{-1} \in \operatorname{Ker}\varphi \Rightarrow$

$\Rightarrow a \in (\operatorname{Ker}\varphi)b \Rightarrow b \in (\operatorname{Ker}\varphi)a$

Извод: $\operatorname{Ker}\varphi$ е такава подгрупа на G, която има много специфично свойство:

$a(\operatorname{Ker}\varphi) = (\operatorname{Ker}\varphi)a$

Много ценно свойство, то характеризира нормалните делители. Такава подгрупа се нарича нормална

Опр.1 Нека G е група и $H < G$, групата H е нормална подгрупа за G, ако $aH = Ha$, $\forall a \in G$. Бележи се: $H \lhd G$

Ядрото на един хомоморфизъм е нормална подгрупа.

В. Примера за S_3, ~~ядрото не~~ H не е нормална група.

Забележка:

Ако G е Абелева група $\Rightarrow$ всяка подгрупа е нормална.

$\{e\} \lhd G$ - тривиална нормална подгрупа

$G \lhd G$ /

$H < G$ и $|G:H| = 2$

Нека $a \notin H$, то $G = H \cup aH$

$aH = G \setminus H = Ha \Rightarrow H \lhd G$

Извод: когато индексът е 2, подгрупата е нормална

(Тв.) Нека G – група и $H < G$.

$H \lhd G \Leftrightarrow \underbrace{ghg^{-1}}_{\text{спрегнат елемент}} \in H,\ \forall h \in H,\ \forall g \in G$

Д-во:

$\Rightarrow |\ H \lhd G$

$ghg^{-1} = (gh)g^{-1} = (h_1 g)g^{-1} = h_1 \in H$

$gh \in gH = Hg \Rightarrow gh = h_1 g,\ h_1 \in H$

$\Rightarrow ghg^{-1} \in H$

$\Leftarrow |\ g \in G$

$a \in Hg : a = h_1 g = g\boxed{g^{-1} h_1 g} = gh_2 \in gH$

$h_2'' \in G$

$\Rightarrow a \in Hg \Rightarrow a \in gH \Rightarrow Hg \subset gH$

$b \in gH \Rightarrow b = gh_3,\ h_3 \in H$

$b = \boxed{gh_3 g^{-1}} g = h_4 g \in Hg$

$h_4'',\ h_4 \in G$

$\Rightarrow b \in gH \Rightarrow b \in Hg \Rightarrow gH \subset Hg$

$\Rightarrow gH = Hg$, в сила $\forall g \in G$

$\Rightarrow H \lhd G$

Задача:

Нека $G = GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}$

$S = SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in G \mid \det A = 1\}$

$S \lhd G$?

Док-во:

подгрупа

$A, B \in S: \det A = \det B = 1$

$\det(AB) = 1 \Rightarrow AB \in S$

$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A} = 1 \Rightarrow A^{-1} \in S$

$\Rightarrow S < G$

нормална подгрупа

Нека $A \in S$, $B \in G$: $\det A = 1$, $\det B \neq 0$

$\det(BAB^{-1}) = \det B \cdot \underbrace{\det A}_{=1} \cdot \det B^{-1} = 1$

(стилната матрица)

$\Rightarrow BAB^{-1} \in S : S \lhd G$

$\mathbb{Z}_n$ - класове остатъци по (mod n) =

$= \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \ldots, \overline{n-1}\}$

$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b}$

$\overline{0} = n.\mathbb{Z}$

$\overline{k} = k + n\mathbb{Z}$

Нека G - група и H - нормална подгрупа на G, т.е. $H \lhd G$.

$G = H \cup a_1 H \cup a_2 H \cup \dots \cup a_s H \cup \dots$

Нека $x_1 \in a_1 H$, $x_2 \in a_2 H$

$x_1 = a_1 h_1$, $x_2 = a_2 h_2$, $h_i \in H$

$x_1 . x_2 = (a_1 h_1)(a_2 h_2) = a_1 a_2 \boxed{a_2^{-1} h_1 a_2} h_2 =$

$= h_3 \in H$, защото H е нормална

$= a_1 a_2 \underbrace{h_3 h_2}_{h_4 \in H} \in a_1 a_2 H$

$\left.\begin{array}{l} x_1 \in a_1 H \\ x_2 \in a_2 H \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 x_2 \in a_1 a_2 H$

Дефинираме $\boxed{(a_1 H).(a_2 H) = a_1 a_2 H}$

Коректно ли е? ако $x_1 H = a_1 H \Rightarrow x_1 \in a_1 H$, $x_2 H = a_2 H \Rightarrow x_2 \in a_2 H$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 x_2 \in a_1 a_2 H \Rightarrow x_1 x_2 H = a_1 a_2 H$

Може да е записано чрез други елементи, но самото умножение е едно и също

забележка: Когато H не е нормална, тази операция не е коректна.

$G/H = \{ gH \mid g \in G \}$

Дали ще е група?

Ако трябва да проверим аксиомите

1) асоциативност

$(aH \cdot a_2H) \cdot a_3H = (a_1a_2)H \cdot a_3H = (a_1a_2)a_3H =$

$= a_1(a_2a_3)H = a_1H \cdot (a_2a_3)H = a_1H(a_2H \cdot a_3H)$

2) единичен елемент

$H = eH$

$gH \cdot eH = gH = eH \cdot gH \Rightarrow eH$ - единичен елемент

3) обратен елемент

$gH \cdot (g^{-1})H = gg^{-1}H = eH = H$

$\Rightarrow \{ gH \mid g \in G \}$ е група и се нарича

G/H " факторгрупа на групата G

факторизирана по H.

Пример:

$\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$H \lhd G$

$\varphi : G \to G/H$

$\varphi(a) = aH$

$\varphi(ab) = abH = aH \cdot bH = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$

$\Rightarrow$ φ е хомоморфизъм

$\ker \varphi = \{a \mid \varphi(a) = H\}$

$\varphi(a) = aH = H \Leftrightarrow a \in H$

$\ker \varphi = H$

естествен епиморфизъм