↪ G отбор p.

3) $|G| = p$ p-просто число, то G – циклична т.е ($G \cong \mathbb{Z}_p$)

Док: $a \in G : a \neq e \Rightarrow |a| \neq 1$ и $|a| \mid |G| \Rightarrow$

$\Rightarrow |a| \mid p \Rightarrow |a| = p = |\langle a \rangle| = |G| \Rightarrow G = \langle a \rangle$

---

7. Нормални подгрупи и факторгрупи. Хомоморфизми на групи. (Запазва операцията)

Деф: 1) Нека $(G_1, \circ)$ и $(G_2, *)$ Изоморфизъм

$\varphi : G_1 \to G_2$ е хомоморфизъм, ако $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) * \varphi(b)$, $\forall a, b \in G_1$.

Св-ва: 1) Ако $\varphi : G_1 \to G_2$ – хомоморфизъм то $\varphi(a_1 \cdot a_2 \cdots a_s) = \varphi(a_1) * \varphi(a_2) \cdots * \varphi(a_s)$

2) $\varphi(e) = e$ ~~$\varphi(a) = \varphi(ae) = \varphi(a) \cdot \varphi(e) \cdot (\varphi(a))^{-1} \cdot \varphi(a) \cdot (\varphi(a))^{-1}$~~

Док: $\varphi(a) = \varphi(ae) = \varphi(a) \cdot \varphi(e)$

$(\varphi(a))^{-1} \cdot \varphi(a) = (\varphi(a))^{-1} (\varphi(a)) \cdot \varphi(e) \qquad e = \varphi(e)$

3) $\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}$

Док: $e = \varphi(e) = \varphi(a \cdot a^{-1}) = \varphi(a) \cdot \varphi(a^{-1}) \Rightarrow \varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}$

Деф: Ядро на φ – $\operatorname{Ker}\varphi = \{ a \in G_1 \mid \varphi(a) = e \} \subset G_1$

$\operatorname{Im}\varphi = \{ \varphi(a) \mid a \in G_1 \} \in G_2$ – образ

$\operatorname{Ker}\varphi \leq G_1$, $\operatorname{Im}\varphi \leq G_2$

Твр: $a, b \in \operatorname{Ker}\varphi \Rightarrow \varphi(a \cdot b) = \varphi(a)\varphi(b) = e \cdot e = e$

$\Rightarrow \varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1} = e^{-1} = e$

$\Rightarrow ab \in \operatorname{Ker}\varphi$ } $\Rightarrow \operatorname{Ker}\varphi \leq G_1$

$a^{-1} \in \operatorname{Ker}\varphi$

Св-во: $\varphi(a) = \varphi(b) \iff b \in a\operatorname{Ker}\varphi \iff b \in (\operatorname{Ker}\varphi)a$

Док: $\Leftarrow$ $b \in a\operatorname{Ker}\varphi \Rightarrow b = a \cdot h_1$, $h_1 \in \operatorname{Ker}\varphi$

$\varphi(b) = \varphi(ah_1) = \varphi(a) \cdot \underbrace{\varphi(h_1)}_{=e} = \varphi(a)$

$\Rightarrow$ $\varphi(a) = \varphi(b) \Rightarrow \varphi(a^{-1}b) = \varphi(a^{-1}) \cdot \varphi(b) = (\varphi(a))^{-1} \cdot \varphi(b) = e \Rightarrow$

$\Rightarrow a^{-1}b \in \operatorname{Ker}\varphi \Rightarrow b \in a\operatorname{Ker}\varphi$

$\varphi(a) = \varphi(b) \Rightarrow \varphi(ab^{-1}) = e \Rightarrow ab^{-1} \in \operatorname{Ker} \Rightarrow a \in (\operatorname{Ker}\varphi)b \Rightarrow b \in (\operatorname{Ker}\varphi)a$

Извод: $\operatorname{Ker}\varphi$ е такава подгрупа на G която спецификува ж.

$\operatorname{Ker}\varphi \leq G$ и $a(\operatorname{Ker}\varphi) = (\operatorname{Ker}\varphi)a$ – лявата и дясната бисерни класове съвпадат

Опр: Нормална подгрупа: Нека G - група и $H < G$, Тогава H е нормална подгрупа на G, ако $gH = Hg$, $\forall g \in G$. Записваме $H \triangleleft G$

Забележка: Ако G - абелева всяка подгрупа е нормална

Пример: Всяка подгрупа е нормална

Твърдение: Нека G е група $H < G$. Тогава $H \triangleleft G \iff$
$ghg^{-1} \in H$, $\forall h \in H$, $\forall g \in G$ ghg^{-1} - спрегнат на h

Док: $\Rightarrow$ Нека $H \triangleleft G$

$$ghg^{-1} = (gh)g^{-1} = (h_1 g)g^{-1} = h_1 \in H$$

$gh \in gH = Hg \Rightarrow gh = h_1 g$ $h_1 \in H$. $\Rightarrow ghg^{-1} \in H$

$\Leftarrow$ $g \in G$ $a \in Hg$: $a = h_1 g = gg^{-1} h_1 g = gh_2$ $\Rightarrow$
$h_2 \in H$

$\Rightarrow a \in Hg \Rightarrow a \in gH \Rightarrow Hg \subset gH$

Нека $b \in gH \Rightarrow b = gh_3$, $h_3 \in H$

$b = gh_3 g^{-1} g = h_4 g \in Hg \Rightarrow b \in gH \Rightarrow b \in Hg \Rightarrow gH \subset Hg$
h_4

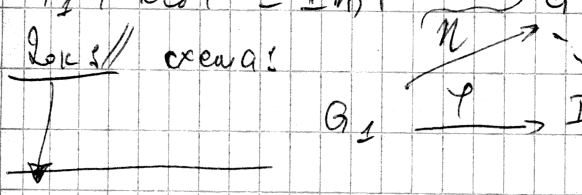
$\Rightarrow gH = Hg$, $\forall g \Rightarrow H \triangleleft G$

Опр: Множеството от всевъзможни класове (леви)
$\{gH \mid g \in G\} = G/H$ - **факторгрупа** $H \triangleleft G$

Нека $H \triangleleft G$ разглеждаме $\varphi: G \to G/H : \varphi(a) = aH$
$\varphi(ab) = abH = aH \cdot bH = \varphi(a) \cdot \varphi(b) \Rightarrow \varphi$ - хомоморфизъм
$\operatorname{Ker}\varphi = \{a \mid \varphi(a) = H\}$
$\varphi(a) = aH = H \iff a \in H$ т.е $\operatorname{Ker}\varphi = H$ - **естествен хомоморфизъм**.

Th за Хомоморфизмите на групи
Ако $\varphi: G_1 \to G_2$ хомоморфизъм $\Rightarrow \operatorname{Ker}\varphi \triangleleft G_1$ Тогава
$G_1 / \operatorname{Ker}\varphi \cong \operatorname{Im}\varphi$

Док: схема:



$\eta: G_1 \to G_1/\operatorname{Ker}\varphi$ $\eta(a) = a\operatorname{Ker}\varphi$
$\operatorname{Ker}\eta = \operatorname{Ker}\varphi$
$x \in a\operatorname{Ker}\varphi \Rightarrow x = ah$, $h \in \operatorname{Ker}\varphi$
$\varphi(x) = \varphi(ah) = \varphi(a)$

Дефиниране: $\Psi : G_1/\mathrm{Ker}\,\varphi \to \mathrm{Im}\,\varphi$ (коректно дефин.)

$\Psi(a\,\mathrm{Ker}\,\varphi) = \varphi(a)$ ако $x\,\mathrm{Ker}\,\varphi = a\,\mathrm{Ker}\,\varphi \Rightarrow \varphi(x) = \varphi(a) \Rightarrow \Psi(a\,\mathrm{Ker}\,\varphi)$ ✓

За доказ, че Ψ - изоморфизъм (хомоморфизъм и биекция)

хомоморфизъм: $\Psi((a\,\mathrm{Ker}\,\varphi)\cdot(b\,\mathrm{Ker}\,\varphi)) = \Psi(ab\,\mathrm{Ker}\,\varphi) = \varphi(ab) =$

$= \varphi(a)\cdot\varphi(b) = \Psi(a\,\mathrm{Ker}\,\varphi)\cdot\Psi(b\,\mathrm{Ker}\,\varphi) \Rightarrow \Psi$ - хомоморфизъм.

биекция:

1) инекция: Ако $\Psi(a\,\mathrm{Ker}\,\varphi) = \Psi(b\,\mathrm{Ker}\,\varphi) \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi(a) = \varphi(b) \Rightarrow \varphi(ab^{-1}) = \varphi(a)\varphi(b^{-1}) = e \Rightarrow ab^{-1} \in \mathrm{Ker}\,\varphi$

$\Rightarrow a \in (\mathrm{Ker}\,\varphi)b = b\,\mathrm{Ker}\,\varphi \Rightarrow a\,\mathrm{Ker}\,\varphi = b\,\mathrm{Ker}\,\varphi$

Ако образите на 2 класа съвпадат, има инекция

2) сюрекция:

$x \in \mathrm{Im}\,\varphi \Rightarrow \exists y \in G_1 : \varphi(y) = x = \Psi(y\,\mathrm{Ker}\,\varphi) \Rightarrow \mathrm{Im}\,\Psi = \mathrm{Im}\,\varphi$

(1 и 2) Ψ - биекция $\Rightarrow$ Ψ - изоморфизъм

$\Rightarrow$ $G_1/\mathrm{Ker}\,\varphi \cong \mathrm{Im}\,\varphi$

↳ фактор група

---

8. Действие на група върху множество, орбити и стабилизатори.

Действие на група върху елементите ѝ - Теорема на Кейли и формула за класовете.

Симетрична група S_n $|M| = n$ $M = \{1, \dots, n\}$

$S_n = \{\varphi \mid \varphi : M \to M, \varphi$ - биекция$\}$

$x \in M$ $\varphi \in S_n$, $\varphi(x) \in M$ $\psi \in S$ $\psi\circ\varphi(x) = \psi(\varphi(x))$ $id(x) = x$

Деф. Казваме, че група G действа върху множ. M, когато $\forall g \in G$ и $\forall x \in M$ е съпоставен ел. $g(x) \in M$ ($G \times M \to M$)

$(g, x) \to g(x)$ и са изпълнени:

1) $(g_1 g_2)(x) = g_1(g_2(x))$

2) $e(x) = x$ $\forall x \in M$, $\forall g_1, g_2 \in G$.

Диаграмна дефиниция: Действие на група G върху множ. M е всяко ротиращо и равнинната с фиксирано начало, всяка ротираща действа върху M и тогава от равнината.