D $(G,\cdot)$; $H<G$, $a\in G$

$aH=\{ah \mid h\in H\}$ – ЛЯВ СЪСЕДЕН КЛАС

$Ha=\{ha \mid h\in H\}$ – ДЕСЕН СЪСЕДЕН КЛАС

Пример: $(\mathbb{R}^n,+)$

$$H:\begin{cases} a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n=0 \\ \ldots \\ a_{k1}x_1+\ldots+a_{kn}x_n=0 \end{cases} \qquad L:\begin{cases} a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \ldots \\ a_{k1}x_1+\ldots+a_{kn}x_n=b_k \end{cases}$$

$H<\mathbb{R}^n$

$L=\{\alpha+y \mid y\in H\} \Rightarrow L=\alpha+H$

Тв1 $H<G \Rightarrow gH=H \Leftrightarrow g\in H$

$gH=H \Rightarrow ge\in gH \Rightarrow \boxed{ge\in H}$

$ge\in H \Rightarrow gh\in H \Rightarrow gH\subset H;\ h=g(g^{-1})h\in gH \Rightarrow H\subset gH \Rightarrow \boxed{gH=H}$

Тв2 $l\in gH \Leftrightarrow ge\in lH$

$l\in gH \Rightarrow l=gh_1;\ h_1\in H \Rightarrow g=lh^{-1}\in lH$ // АНАЛОГИЧНО ЗА ОБР. ПОСОКА

Тв3 $l\in gH \Leftrightarrow gH=lH$

$l\in gH \Rightarrow l=gh_1, h_1\in H;\ h_2\in H \Rightarrow lh_2\in lH \Rightarrow lh_2=gh_1h_2 \Rightarrow lh_2\in gH \Rightarrow lH\subset gH$ ($h_1h_2\in H$)

Аналогично $l\in gH \Rightarrow ge\in lH \Rightarrow gH\subset lH$

$\Rightarrow gH=lH$

Тв4 $gH\cap lH=\begin{cases} lH=gH \\ \varnothing \end{cases}$

Ако $\exists a\in lH\cap gH \Rightarrow aH=lH=gH$

Иначе $\Rightarrow lH\cap gH=\varnothing$.

Следствие: G може да се разбие на непресичащи се леви съседни класове.

! Имаме аналогични твърдения за десни съседни класове !

$S_3=\{id,(1,2),(1,3),(2,3),(1,3,2),(1,2,3)\}$

$H_*=\langle(1,2)\rangle=\{id,(1,2)\}$

$\left.\begin{array}{l}(1,3)H_*=\{(1,3),(1,3)(1,2)=(1,2,3)\} \\ (2,3)H_*=\{(2,3),(2,3)(1,2)=(1,3,2)\}\end{array}\right\} \Rightarrow S_3=H_*\cup(1,3)H\cup(2,3)H$

$H_*(1,3)=\{(1,3),(1,2)(1,3)=(1,3,2)\}$

$H(2,3)=\{(2,3),(1,2)(2,3)=(1,2,3)\} \Rightarrow S_3=H\cup H(1,3)\cup H(2,3)$

Тв 5 $gH = lH \Leftrightarrow g^{-1}l \in H$.

$gH = lH \Rightarrow l \in gH \Rightarrow l = gh_1, h_1 \in H \Rightarrow g^{-1}l = h_1 \in H$

$g^{-1}l = h_2 \in H \Rightarrow l = gh_2 \in gH \Rightarrow lH = gH$

Тв 5' $Hg = Hl \Leftrightarrow gl^{-1} \in H$ // аналогично доказателство

Тв 6 Ако H е крайна група, $|H| = |gH|$.

$gh_1 = gh_2 \Leftrightarrow h_1 = h_2 \Rightarrow \eta : H \to gH : \eta(h) = gh \to$ биекция $\Rightarrow |H| = |gH|$.

Тв 7 $L = \{gH \mid g \in G\}$

$R = \{Hg \mid g \in G\}$

$\varphi : L \to R : \varphi(gH) = Hg^{-1}$ е биекция и $|L| = |R|$, когато са краен брой.

$gH = tH \Rightarrow g^{-1}t \in H \Leftrightarrow (g^{-1})(t^{-1})^{-1} \in H \Rightarrow Hg^{-1} = Ht^{-1} \Leftrightarrow \varphi(gH) = \varphi(tH)$.

Следствия:

1) коректност на φ: $gH = tH \Rightarrow \varphi(gH) = \varphi(tH)$;
2) $\varphi(gH) = \varphi(tH) \Rightarrow gH = tH$ - инекция
3) $Hg = \varphi(g^{-1}H)$ - сюрекция

$\Rightarrow \varphi$ - биекция $\to |L| = |R|$

D Индекс на H в G е броят на левите / десните съседните класове.
Бележим: $|G : H|$; $|S_3 : H| = 3$

Т на Лагранж

G - крайна, $H < G$, $G = H \cup Hg_1 \cup \dots \cup Hg_s H \Rightarrow |G| = |G : H| \cdot |H|$

(непресичащи се множества)

Сл 1 $H < G \Rightarrow |H| \mid |G|$ и $|G : H| \mid |G|$

Сл 2 $|G| < \infty$, $a \in G$

$|a| = |\langle a \rangle|$; $\langle a \rangle < G \Rightarrow |a| \mid |G|$

Сл 3 $|G| = p$, p - просто $\Rightarrow G$ - циклична

$a \in G, a \neq e \Rightarrow |a| \neq 1$ и $|a| \mid p \Rightarrow |a| = p \Rightarrow |\langle a \rangle| = |G| \Rightarrow G = \langle a \rangle$.

Нормални подгрупи. Теорема за полиморфизъм

D $(G_1, \cdot)$; $(G_2, *)$; $\varphi : G_1 \to G_2$ е хоморфизъм, ако:

$\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) * \varphi(b) \; \forall a, b \in G_1$

Свойства на хоморфизма

1. $\varphi(a_1 \dots a_s) = \varphi(a_1) * \varphi(a_2) \dots * \varphi(a_s)$
2. $\varphi(e) = e \to \varphi(a) = \varphi(ae) = \varphi(a)\varphi(e) \mid \cdot (\varphi(a))^{-1}$

$(\varphi(a))^{-1}\varphi(a) = (\varphi(a))^{-1}\varphi(a)\varphi(e) = \varphi(e)$