15.03.2016

⑥ Съседни класове. Теорема на Лагранж.

Деф

$(G, \cdot)$

$H < G$

$a \in G$

$aH = \{ah \mid h \in H\}$ – ляв съседен клас

$Ha = \{ha \mid h \in H\}$ – десен съседен клас

Пример:

$\mathbb{R}^n$

$$H: \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n = 0 \end{cases}$$

$H < \mathbb{R}^n$

$$L: \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n = b_k \end{cases}$$

$L = \{\underline{\alpha} + y \mid y \in H\}$ – обединение на непресичащи се съседни класове

α – частно решение на нехомогенната с-ма (фикс.)

$\mathbb{Z} = 5\mathbb{Z} \cup \{1+5\mathbb{Z}\} \cup \{2+5\mathbb{Z}\} \cup \{3+5\mathbb{Z}\} \cup \{4+5\mathbb{Z}\}$

цели числа, които се делят на 5

$1+5\mathbb{Z} < \mathbb{Z} = \{1+5k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ – съседен клас на $5\mathbb{Z}$

$2+5\mathbb{Z}$;

$3+5\mathbb{Z}$;

$4 + 5\mathbb{Z}$

$5 + 5\mathbb{Z} = 5\mathbb{Z}$

$6 + 5\mathbb{Z} = 1 + 5\mathbb{Z}$

Тв. 1 $H < G$

$gH = H \Leftrightarrow g \in H$

Док-во:

$gH \Rightarrow g = g \cdot e \in gH \Rightarrow g \in H$

$g \in H \Rightarrow \underbrace{g}_{\in H}\underbrace{h}_{\in H} \in H \Rightarrow gH \subset H$

$h = g\underbrace{(g^{-1}h)}_{\in H} \in gH$

Тв. 2 $l \in gH \Leftrightarrow g \in lH$

Док-во:

$\Rightarrow$ $l \in gH$

$\Rightarrow l = g \cdot h_1,\ h_1 \in H$

$\Rightarrow g = l \cdot h_1^{-1} \in lH$

$\Leftarrow$ ...

Тв. 3 $l \in gH \Leftrightarrow gH = lH$

Док-во:

$l \in gH \Rightarrow l = g h_1,\ h_1 \in H$

произв. элемент $l h_2 \in lH \Rightarrow l h_2 = g\underbrace{(h_1 h_2)}_{\in H} \in gH$

$lH \subset gH$

аналогично:

$l \in gH \Rightarrow g \in lH \Rightarrow gH \subset lH$

$\Rightarrow lH = gH$

Тв.4 $gH \cap lH = \begin{cases} lH = gH \\ \emptyset \end{cases}$

ако $\exists a \in gH \cap lH \Rightarrow aH = lH = gH$

ако $\nexists a \in gH \cap lH \Rightarrow gH \cap lH = \emptyset$

Следствие 1: Групата G може да се разбие на непресичащи се леви съседни класове

Следствие 2: ——— " ——— " ——— десни ——— " ———

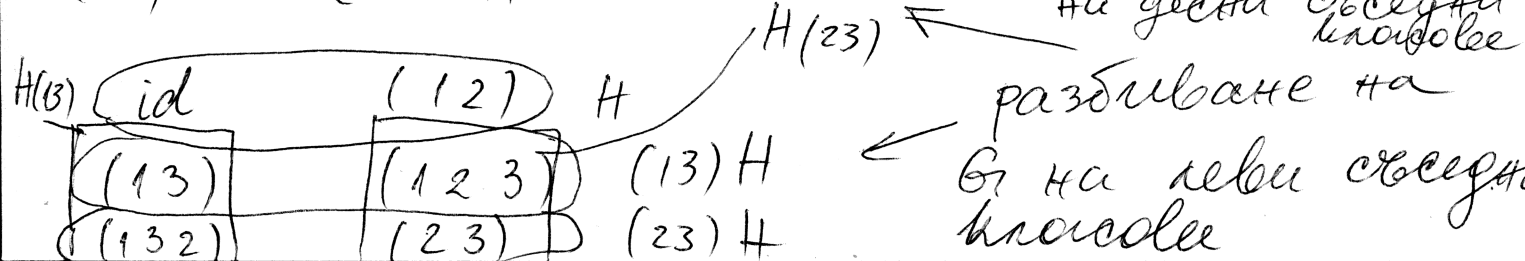
Пример:

$S_3 = \{id, (12), (13), (23), (123), (132)\}$

Нека $H = \langle (12) \rangle = \{id, (12)\}$

$(13)H = \{(13), (13)(12)\} = \{(13), (1,2,3)\}$

$(23)H = \{(23), (23).(12)\} = \{(23), (1,3,2)\}$



$H(13) = \{(13), (12)(13)\} = \{(13), (1,3,2)\}$

$H(23) = \{(23), (23)(13)\} = \{(23), (1,2,3)\}$

Извод:
В общия случай един ляв и един десен клас могат да се пресичат ~~повече~~ произволно, но два съседни леви/десни класа или съвпадат, или не се пресичат.

Тв.5 $gH = lH \Leftrightarrow g^{-1}l \in H$

Доказателство:

$\Rightarrow$ Ако $gH = lH \Rightarrow l \in gH \Rightarrow l = g \cdot h_1, h \in H$

$\Rightarrow g^{-1}l = h_1 \in H$

$\Leftarrow$ Нека $g^{-1}l = h_2 \in H : l = gh_2 \in gH \Rightarrow$

$\Rightarrow lH = gH$

Тв.5' $Hg = Hl \Leftrightarrow gl^{-1} \in H$

Док-во:
аналогично на Тв.5

Тв.6 Ако H е крайна група ($|H| < \infty$), то $|H| = |gH|$

Доказателство:

$gh_1 = gh_2 \Leftrightarrow h_1 = h_2$

$\eta : H \to gH$

$\eta(h) = gh$

$\eta(h_1) = \eta(h_2) \Leftrightarrow h_1 = h_2$

$gh \in gH : gh = \eta(h)$

$\Rightarrow \eta$ - биекция $\Rightarrow |H| = |gH|$

Има биекция между мн-вото от леви съседни класове и мн-вото от десни съседни класове.

Тв. 7 $L = \{ gH \mid g \in G \}$ - мн-во от всички леви съседни класове

$R = \{ Hg \mid g \in G \}$ - мн-вото от всички десни съседни класове

$\varphi : L \to R \quad \varphi(gH) = H g^{-1}$ е биекция

и $|L| = |R|$, когато са крайни броеве

Док-во:

Нека $gH = tH \overset{\text{от}(5)}{\Leftrightarrow} g^{-1}t \in H \Leftrightarrow (g^{-1})(t^{-1})^{-1} \in H \overset{\text{от}(5')}{\Leftrightarrow}$

$\overset{\text{от}(5)}{\Leftrightarrow} Hg^{-1} = Ht^{-1} \Leftrightarrow \varphi(gH) = \varphi(tH)$

От предното ↑
Следва:

1) коректност на φ, т.е. ако $gH = tH \Rightarrow \varphi(gH) = \varphi(tH)$

2) ако $\varphi(gH) = \varphi(tH)$, то $gH = tH$ (инекция)

3) $Hg = \varphi(g^{-1}H)$ (сюрекция)

$\Rightarrow \varphi$ е добре дефинирана биекция $\Rightarrow |L| = |R|$

Опр.: Индекс на H в G = брой ~~на~~ леви съседни класове = брой десни съседни класове = брой на елементите в H.
Бележи се: $|G : H|$

Пример:

$$|\mathbb{Z} : 5\mathbb{Z}| = 5$$

$$|S_3 : H| = 3$$

Th (Лагранж)

Ако $|G| < \infty$, $H < G$, то $G = H \cup g_1 H \cup g_2 H \cup \dots \cup g_s H$
(G ще се разбие например на непресичащи се леви съседни класове)

$$\Rightarrow |G| = |G : H| \cdot |H|$$

Следствие (1): Ако $H < G$ при $|G| < \infty$, то
$|H| \mid |G|$ и $|G : H| \mid |G|$

Следствие ②: $|G| < \infty$, $a \in G$

$|a| = |\langle a \rangle|$ $(\langle a \rangle < G)$

$\Rightarrow |a| \mid |G|$

Следствие ③: Ако $|G| = p$, p - просто, то G е циклична.

$(G \cong C_p)$

Док-во:

$a \in G : a \neq e \Rightarrow |a| \neq 1$ и $|a| \mid |G| =$

$\Rightarrow |a| \mid p$, но p просто $\Rightarrow |a| = p = |\langle a \rangle| =$

$= |G| \Rightarrow G = \langle a \rangle$.