$A_n = \{ \varphi \in S_n \mid \varphi$ - четна четен брой $\}$ } разбиване S_n на A_n и B_n
$B_n = \{ \varphi \in S_n \mid \varphi$ - нечетна четен брой $\}$ }

$\varphi_1, \varphi_2 \in A_n \Rightarrow \varphi_1 \circ \varphi_2 \in A_n$

$\varphi^{-1} \in A_n \Rightarrow A_n < S_n$ - (подгрупа)

$\Rightarrow B_n$ - не е подгрупа на S_n (защото $\varepsilon \notin B_n$ понеже $\varepsilon \in A_n$)

$\zeta : S_n \to S_n$

$\zeta(\varphi) = (12) \circ \varphi$

$\zeta(A_n) \subset B_n$

$\zeta^2 = id$ т.е. $A_n \xrightarrow{\zeta} B_n \Rightarrow |A_n| = |B_n| = \frac{|S_n|}{2} = \frac{n!}{2}$, $n \geq 2$

ζ A_n - алтернативна група от степен n и сборна половината от S_n.

6. Сбор. класове. Теорема на Лагранж, операция

Деф: G - абстрактна група $(G, \circ)$, $H < G$ - подгрупа

$a \in G$ $aH = \{ah \mid h \in H\}$ - ляв сбор. клас

$Ha = \{ha \mid h \in H\}$ - десен сбор. клас

пр: а) $\mathbb{R}^3$ $A: \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{14}x_4 = 0 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{24}x_4 = 0 \end{cases}$ $H < \mathbb{R}^3$ $L: \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{14}x_4 = b_1 \\ a_{k1}x_1 + \dots + a_{k4}x_4 = b_k \end{cases}$

$L = \{\alpha + \gamma \mid \gamma \in H\} = \alpha + H$ α - частно решение на нехомог.

2) $\mathbb{Z}$ $5\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$

$1 + 5\mathbb{Z} = \{1 + 5k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ - цяло число дава ост. 1 при делене с 5

$2 + 5\mathbb{Z}$, $3 + 5\mathbb{Z}$, $4 + 5\mathbb{Z}$, $5 + 5\mathbb{Z} \equiv 5\mathbb{Z}$, $6 + 5\mathbb{Z} = 1 + 5\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z} = 5\mathbb{Z} \cup \{1 + 5\mathbb{Z}\} \cup \{2 + 5\mathbb{Z}\} \cup \{3 + 5\mathbb{Z}\} \cup \{4 + 5\mathbb{Z}\}$ - числата с ост. 0, 1, 2, 3, 4.

ТВ 1: $H < G$ $gH = H \iff g \in H$

Док: // $gH = H \Rightarrow g = g \cdot e \in gH \Rightarrow g \in H$

$g \in H \Rightarrow gh \in H \Rightarrow gH \subset H$ $\forall h = g(g^{-1}h) \in gH$

ТВ 2: $l \in gH \iff g \in lH$

Док: // $l \in gH \Rightarrow l = gh_1$, $h_1 \in H \Rightarrow g = l \cdot h_1^{-1} \in lH$

ТВ 3: $l \in gH \iff gH = lH$

Док: // $l \in gH \Rightarrow l = gh_1$, $h_1 \in H$, $lh_2 \in lH \Rightarrow lh_2 = g(h_1 h_2) \in gH$ ($\forall h_1 h_2 \in H$)

$lH \subset gH$

аналог: $l \in gH \Rightarrow g \in lH \Rightarrow gH \subset lH \Rightarrow lH = gH$

Тв 4: $\rho H \cap \ell H = \begin{cases} \ell H = \rho H & \text{ако } \exists g \in \rho H \cap \ell H \Rightarrow gH = \ell H = \rho H \\ \varnothing & \text{ако } \nexists g \in \rho H \cap \ell H \Rightarrow \rho H \cap \ell H = \varnothing \end{cases}$

Следствие: G - група $\Rightarrow$ нейните ѝ се разбиват на непресичащи се леви класове.

Следствие: Леви и десни класове могат да се пресичат всякак.

Тв 5: $\rho H = \ell H \iff \rho^{-1}\ell \in H$

Док: $\Rightarrow$ $\rho H = \ell H \Rightarrow \ell \in \rho H \Rightarrow \ell = \rho h_1$, $h_1 \in H \Rightarrow \rho^{-1}\ell = h_1 \in H$

$\Leftarrow$ $\rho^{-1}\ell = h_2 \in H \Rightarrow \ell = \rho h_2 \in \rho H \Rightarrow \ell H = \rho H$.

Тв 5': $H\rho = H\ell \iff \rho\ell^{-1} \in H$

Тв 6: Ако H - крайна група $|H| < \infty$ то $|H| = |\rho H|$

Док: $\rho h_1 = \rho h_2 \iff h_1 = h_2$

$\eta : H \to \rho H$, $\eta(h) = \rho h$, $\eta(h_1) = \eta(h_2) \iff h_1 = h_2$

$\rho h \in \rho H : \rho h = \eta(h) \Rightarrow \eta$ - биекция $\Rightarrow |H| = |\rho H|$

Тв 7: $L = \{\rho H \mid \rho \in G\}$ $R = \{H\rho \mid \rho \in G\}$

L - леви класове, R - десни класове

$\varphi : L \to R$ $\varphi(\rho H) = H\rho^{-1}$ - биекция $\Rightarrow |L| = |R|$

Док: Нека $\rho H = tH \iff \rho^{-1}t \in H \iff (\rho^{-1})(t^{-1})^{-1} \in H$ от (Тв 5') $\iff$

$\iff H\rho^{-1} = Ht^{-1} \overset{\text{от (5)}}{\iff} \varphi(\rho H) = \varphi(tH)$

сюрекция от Тв (7): 1) коректност на φ т.е. ако $\rho H = tH \Rightarrow \varphi(\rho H) \equiv \varphi(tH)$

2) ако $\varphi(\rho H) = \varphi(tH) \Rightarrow \rho H = tH \to$ инекция

3) ако $H\rho = \varphi(\rho^{-1}H) \equiv$ сюрекция

φ - биекция $|L| = |R|$

Определение: Индекса $H \leq G$ - броя на леви класове по H в G (или броя на десни класове). Бележи се $|G : H|$ - индекса на H в G $[G : H]$

пр: $[\mathbb{Z} : 5\mathbb{Z}] = 5$, $|S_3 : H| = 3$

Тв на Лагранж: Ако $|G| < \infty$, $H < G$

$G = H \cup \rho_1 H \cup \rho_2 H \cup \dots \cup \rho_s H \Rightarrow |G| = |G : H| \cdot |H|$

Следствие: 1) $H < G \Rightarrow |H| \mid |G|$, $|G : H| \mid |G|$

2) $|G| < \infty$, $a \in G$ $|a| = |\langle a \rangle|$ (редът на a = редът на цикл. подгр. пор. от a)

$\Rightarrow |a| \mid |G|$

3)

↪ G от ред p.

3) $|G| = p$ p-просто число, то G – циклична т.е ($G \cong G_p$)

2ки// $a \in G : a \neq e \Rightarrow |G| \neq 1$, $|a| \mid |G| \Rightarrow$

$\Rightarrow |a| \mid p \Rightarrow |a| = p = |\langle a \rangle| = |G| \Rightarrow G = \langle a \rangle$

---

7. Хомоморфизми при операции. Хомоморфизми при операции.

(Запазва операцията)

Деф: Нека $(G_1, \circ)$ и $(G_2, *)$ // изображението

$\varphi : G_1 \to G$ е хомоморфизъм, ако $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) * \varphi(b)$, $\forall a, b \in G_1$.

Св: 1) Ако $\varphi : G_1 \to G_2$ – хомоморфизъм то $\varphi(a_1 \cdot a_2 \cdots a_s) = \varphi(a_1) * \varphi(a_2) * \cdots * \varphi(a_s)$

2) $\varphi(e) = e$ ~~$\varphi(a) = \varphi(ae) = \varphi(a) \cdot \varphi(e) \cdot (\varphi(a))^{-1} \cdot \varphi(a) = (\varphi(a))^{-1}$~~

2ки// $\varphi(a) = \varphi(ae) = \varphi(a) \cdot \varphi(e)$

$(\varphi(a))^{-1} \cdot \varphi(a) = (\varphi(a))^{-1} (\varphi(a)) \cdot \varphi(e)$ $\quad e = \varphi(e)$

3) $\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}$

2ки// $e = \varphi(e) = \varphi(a \cdot a^{-1}) = \varphi(a) \cdot \varphi(a^{-1}) \Rightarrow \varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}$

Деф: Ядро на φ – $\operatorname{Ker}\varphi = \{ a \in G_1 \mid \varphi(a) = e \} \subset G_1$

$\operatorname{Im}\varphi = \{ \varphi(a) \mid a \in G_1 \} \in G_2$ – образ

$\operatorname{Ker}\varphi \leq G_1$, $\operatorname{Im}\varphi \leq G_2$

Доказ: $a, b \in \operatorname{Ker}\varphi \Rightarrow \varphi(a \cdot b) = \varphi(a)\varphi(b) = e \cdot e = e$

$\Rightarrow \varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1} = e^{-1} = e$

$\Rightarrow ab \in \operatorname{Ker}\varphi$ $\Rightarrow \operatorname{Ker}\varphi \leq G_1$

$a^{-1} \in \operatorname{Ker}\varphi$

Св: $\varphi(a) = \varphi(b) \iff b \in a\operatorname{Ker}\varphi \iff b \in (\operatorname{Ker}\varphi)a$

2ки// $\Leftarrow$ $b \in a\operatorname{Ker}\varphi \Rightarrow b = a \cdot h_1$, $h_1 \in \operatorname{Ker}\varphi$

$\varphi(b) = \varphi(ah_1) = \varphi(a) \cdot \underbrace{\varphi(h_1)}_{=e} = \varphi(a)$

$\Rightarrow$ $\varphi(a) = \varphi(b) \Rightarrow \varphi(a^{-1}b) = \varphi(a^{-1}) \cdot \varphi(b) = (\varphi(a))^{-1} \cdot \varphi(b) = e \Rightarrow$

$\Rightarrow a^{-1}b \in \operatorname{Ker}\varphi \Rightarrow b \in a\operatorname{Ker}\varphi$

$\varphi(a) = \varphi(b) \Rightarrow \varphi(ab^{-1}) = e \Rightarrow ab^{-1} \in \operatorname{Ker} \Rightarrow a \in (\operatorname{Ker}\varphi)b \Rightarrow b \in (\operatorname{Ker}\varphi)a$

Извод: $\operatorname{Ker}\varphi$ е такава подгрупа на G която спецификува ср. ж.

$\operatorname{Ker}\varphi \leq G$: $a(\operatorname{Ker}\varphi) = (\operatorname{Ker}\varphi)a$ – лявата и дясната съседни класове съвпадат