(5)

Симетрични групи

Неабелева група е такава група, в която не важи комутативния закон

$M \neq \emptyset$

$S(M) = \{ \varphi \mid \varphi : M \to M \text{ биекция} \}$

$\varphi \circ \psi (x) = \varphi(\psi(x))$

$|M| = n$, $M = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$

$S(M) = S_n$ – симетрична група от степен n

$\varphi \in S_n : \varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$, $i_k = \varphi(k)$

$i_1, i_2 \ldots, i_n$ – пермутация на $\{1, \ldots, n\}$

$|S_n| = n!$

$\sigma = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$ се нарича цикъл

$(\{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, \ldots, n\})$

$$i_1 \xrightarrow{\sigma} i_2 \xrightarrow{\sigma} i_3 \xrightarrow{\sigma} \ldots \xrightarrow{\sigma} i_{k-1} \xrightarrow{\sigma} i_k \xrightarrow{\sigma} i_1$$

Ако $j \notin \{i_1, \ldots, i_k\} : \sigma(j) = j$

Пример:

$S_8 : (2, 4, 6, 8) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 7 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ не е цикъл, но има независими цикли: $(1,3),(2,4)$

Деф: $\sigma = (i_1, \dots, i_k) \in S_n$ и $\tau = (j_1, \dots, j_s) \in S_n$ са *независими цикли*, ако $\{i_1, \dots, i_k\} \cap \{j_1, \dots, j_s\} = \emptyset$

Св-во: Ако σ и τ са независими цикли, то те комутират, т.е. $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$.

Забележка: Ако цикълите са зависими, св-вото не е изпълнено.

$(i_1, i_2, \dots, i_k) = (i_2, i_3, \dots, i_k, i_1) = \dots$

Всеки един цикъл с дължина k може да бъде записан по k различни начина.

$(i_1, i_2, \dots, i_k)^{-1} = (i_k, i_{k-1}, \dots, i_1)$

$|(i_1, \dots, i_k)| = k$ (колко пъти трябва да завъртим, докато стигнем до id)

Th. Всеки елемент $\sigma \in S_n$, $\sigma \neq id$ може да се представи като произведение на независими цикли и това представяне е единствено с точност до реда на множителите

Доказателство:

Индукция по броя на символите, които се променят под действието на σ

$\mu(\sigma) = |\{k \mid \sigma(k) \neq k\}|$

$\mu(\sigma) > 2$

1) база: $\mu(\sigma) = 2$

$\Rightarrow \exists\, i \neq j$: $\sigma(i) \neq i$, $\sigma(j) \neq j$ $\Rightarrow$ $\sigma(i) = j$, $\sigma(j) = i$

$\forall k \notin \{i, j\} : \sigma(k) = k$

$\Rightarrow \sigma = (i, j)$

Нека $\mu(\sigma) > 2$

Нека $i_1 : \sigma(i_1) \neq i_1$

$i_2 = \sigma(i_1),\ i_3 = \sigma(i_2),\ \ldots,\ i_s = \sigma(i_{s-1})$

$i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{s-1}, i_s, \ldots$

Ако $i_s = i_t$ $\quad (s > 1,\ t > 1)$

$\Downarrow$

$\sigma(i_{s-1}) = \sigma(s_{t-1})$

$\Downarrow$

$i_{s-1} = i_{t-1}$

Извод: Първото число, което се повтаря в редицата е началото на редицата, т.е. i_1

$i_1, \ldots, i_k, \underbrace{i_{k+1} = i_1}$

първото повторение на i_1

$\tau = (i_1, \ldots, i_k)$

$\sigma_1 = \tau^{-1} \circ \sigma$

$\sigma_1(i_1) = \tau^{-1}(\sigma(i_1)) = \tau^{-1}(i_2) = i_1$

Аналогично, $\forall i_s$ имаме, че $\sigma_1(i_s) = i_s$

$j \notin \{i_1, \dots, i_m\} \Rightarrow \sigma(j) \in \{i_1, \dots, i_k\}$

$\sigma_1(j) = \tau^{-1}(\sigma(j)) = \sigma(j)$

Броят на елементите, които се пренасят при σ и σ_1 е: $\mu(\sigma_1) = \mu(\sigma) - k$, $\underline{k \geq 1}$

$\Rightarrow$ за σ_1 прилагаме индукцията $\tau^{-1} \circ \sigma = \sigma_1 = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \tau_r$

$\Rightarrow \sigma = \tau_0 \tau_1 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \tau_r$, където числата $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_r$ вече не задължително са независими, защото всеки път намаляваме подмножеството Ω на числата, с които работим.

!) $\sigma = \tau_0 \circ \tau_1 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \tau_r$

$\sigma = \varphi_0 \circ \varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_s$

$j \in \{k \mid \sigma(k) \neq k\}$

Числото j участвува в записа на едно τ и в записа на само едно φ. Можем да се питаме, че това τ и φ, в които j е най-наляво, защото тъй като са независими можем да ги разменим местата на множителите.

$\tau_r = \{j, \sigma(j), \sigma^2(j), \dots\}$

$\varphi_s = \{j, \sigma(j), \sigma^2(j), \dots\}$

$\Rightarrow \tau_r = \varphi_s$

$\Rightarrow \tau_0 \circ \dots \circ \tau_{r-1} = \varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_{s-1}$

Пример:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 8 & 5 & 10 & 1 & 4 & 9 & 6 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

$= (1,3,5) \circ (2,8,6,4,10)(7,9)$

Сб-во:

$\tau_1, \dots, \tau_k$ са независими цикли

$|\tau_1 \circ \dots \circ \tau_k| = НОК(|\tau_1|, |\tau_2|, \dots, |\tau_k|)$

Опр: Цикъл с дължина 2 се нарича транспозиция.

Сб-во: Всеки елемент от S_n може да се представи като произведение на транспозиции.

1) $(i_1, i_2, \dots, i_k) = (i_k, i_k) \circ \dots (i_1, i_k)(i_1, i_k) \circ (i_1, i_2)$

$id = (1,2)(1,2)$ Не е единствен наборът от транспозиции

Цикъл с дължина k може да се запише като произведение на $k-1$ транспозиции

(Т6) Ако $\tau_1 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \tau_k = id$ и τ_j са транспозиции, тогава k е четно.

Доказателство:

$(i,j)(a,k) = (a,k)(i,j)$ – независими

$(i,j)(a,i) = (a,j)(j,i)$ – зависими

$(a,i)(a,j) = (a,j)(i,j)$

$(a,i)(a,i) = id$

$\tau_1 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \tau_k$, фикс. число a

Ако a го няма на ~~второ~~ място и двете транспозиции са независими, то може да направим така, че a да го няма на първо място – –

$\tau_1 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \tau_k = \tau_1' \tau_2' \dots \tau_s' = id$

Следвайки по съответното пример, в което избухваме числото a, до τ_i, то може да е само в τ_i' или в никое. Тъй като произв. е равно на id, не е възможно a да бъде само в една транспозиция

(първата) $\Rightarrow \tau_1' \dots \tau_s'$ няма числото a.

По този начин изхвърляме всички числа, не е само id не може да остане не само една транспозиция, т.к. тя не може да е id. Значи, изхвърляме всички транспозиции

$s = k - 2m \Rightarrow s \equiv k \pmod 2$

На ес. стъпка получаваме по-малък брой транспозиции но броят на запазва четността.

Следователно стъпки получаване 0 транспозиции $\Rightarrow k \equiv s \equiv 0 \pmod 2$

произв. на транспоз.

б) Ако $\sigma \in S_n$ и $\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_s$ и $\sigma = \mu_1 \circ \dots \circ \mu_\ell$, където τ_i и μ_j са транспозиции, тогава $\ell \equiv s \pmod 2$ (ℓ и s са числа с еднаква четност).

$$(i,j)^{-1} = (i,j)$$

$\mu_1 \circ \dots \mu_\ell = \tau_1 \circ \dots \tau_s \mid \cdot \tau_s$

$\mu_1 \dots \mu_\ell \cdot \tau_s = \tau_1 \dots \tau_{s-1}$

$\mu_1 \dots \mu_\ell \tau_s \cdot \tau_{s-1} \dots \tau_1 = id$

$\Rightarrow s + \ell \equiv 0 \pmod 2$

$\Rightarrow s \equiv \ell \pmod 2$

Опр: Четна (нечетна) перимутация - всяко е произведение на четен (нечетен) брой транспозиции.

четна $\circ$ четна = четна нечетна $\circ$ нечетна = четна

четна $\circ$ нечетна = нечетна

$A_n = \{\varphi \in S_n \mid \varphi$ - четна пермутация$\}$

$B_n = \{\varphi \in S_n \mid \varphi$ - нечетна пермутация$\}$

$\varphi_1, \varphi_2 \in A_n \Rightarrow \varphi_1 \circ \varphi_2 \in A_n$

$\varphi_1^{-1} \in A_n$

$\Rightarrow A_n < S_n$ (подгрупа)

B_n не е подгрупа на S_n

$\xi : S_n \longrightarrow S_n$

$\xi(\varphi) = (12) \circ \varphi$

$\xi(A_n) \subset B_n$

$\xi^2 = id$ $\quad A_n \underset{\xi}{\rightleftarrows} B_n$

$\Rightarrow |A_n| = |B_n| = \frac{|S_n|}{2} = \frac{n!}{2}$ $\quad (n \geq 2)$

A_n - алтернативна група от степен n и съдържа половината от елементите на S_n.

Елементите на симетричните групи се използват за различни комбинаторни игри.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	///

- да се намери стратегия, ~~при~~ която за всяко ~~дадено~~ срез да се стигне до подредба