Лема 1 (Лема на Гаус)

Всеки полином над $\mathbb{R}$ има поне един комплексен корен.

Доказателство:
Нека $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ и $\deg f = n$.
Нека $n = 2^k s$, където s е нечетно (т.е отделяме най-голямата степен на двойката от n, а всички останали нечетни множители групираме в s).
Ще докажем твърдението с *индукция по* k:

База на индукцията: $k = 0$
Т.е имаме $\deg f(x) = s \equiv 1 \pmod 2$.
Такъв полином със сигурност има поне един реален корен, защото в $\pm\infty$ има различни знаци (защото старшия му коефициент е на нечетна степен, следователно ако сложим достатъчно голямо число ще получим нещо положително, а ако сложим достатъчно малко - отрицателно. Ако старшият коефициент е отрицателен тогава е наобратно). Понеже е непрекъсната някъде пресича реалната ос. Значи има поне един реален корен.

Индукционна хипотеза: Нека твърдението е доказано за $k-1$, т.е ако $\deg g = 2^{k-1}t$, то g има поне един комплексен корен.

Индукционна стъпка: Нека $\deg f(x) = 2^k s = n$.
Да разгледаме разширението $L \supseteq \mathbb{R}$ в което се намират корените на f : $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in L$.
Нека $r \in \mathbb{R}$ е произволно реално число. Да си построим числата $\beta_{ij}(r) = \alpha_i \alpha_j + r(\alpha_i + \alpha_j) \in L$. Те очевидно принадлежат на L, защото са образувани от сбор и произведение на числа от L ($r \in \mathbb{R} \subseteq L \Rightarrow r \in L$).
Сега остава да си построим функцията g по следния начин:

$$\begin{aligned} g(x) &= \prod_{i<j} (x - \beta_{ij}(r)) \\ &= x^t + g_1 x^{t-1} + \cdots + g_t x^0 \end{aligned} \tag{1}$$

$$t = \deg g = \binom{n}{2}$$

g_i са симетрични функции на β (от формулите на Виет).

Ако пермутираме по произволен начин α_i (т.е разджуркаме ги хубаво) тогава единственото което ще се случи с β_{ij} е, че и те ще се разджуркат. Ако имаме симетрична функция на β (функция, при която ако разместим β-ите няма да се промени), то тя също е и симетрична функция на α-ите (защото разместване на α ще доведе до разместване на β, което пък не променя функцията).

Значи g_i са симетрични функции на α. От следствието от основната теорема за симетричните полиноми имаме, че $g_i \in \mathbb{R}$. Сега прилагаме индукционната хипотеза за g и получаваме, че $g(x)$ има поне един комплексен корен. Това означава, че съществуват i, j за които $\beta_{ij} \in \mathbb{C}$, т.е $\alpha_i \alpha_j + r(\alpha_i + \alpha_j) \in \mathbb{C}$.

Направихе горното (малко дълго) разсъждение за *произволно* $r \in \mathbb{R}$. Следователно то е вярно *за всяко* $r \in \mathbb{R}$.
Може да си мислим, че на всяко реално число r съпоставихме двойка индекси i_r, j_r, за които $\alpha_{i_r} \alpha_{j_r} + r(\alpha_{i_r} + \alpha_{j_r}) \in \mathbb{C}$.
Тъй като двойките индекси i, j са краен брой (точно $\binom{n}{2}$), а пък реалните числа са малко повече (стига ни че са безкрайно много), то по принципа на Дирихле (принцип на чекмеджетата, pidgeon hole principle) съществуват поне две реални числа r_1, r_2, за които съответните им $(i_{r_1}, j_{r_1}), (i_{r_2}, j_{r_2})$ съвпадат - да си ги означим просто с i, j. Т.е имаме, че:

$$
\begin{aligned}
\alpha_i \alpha_j + r_1(\alpha_i + \alpha_j) &= a \in \mathbb{C} \\
\alpha_i \alpha_j + r_2(\alpha_i + \alpha_j) &= b \in \mathbb{C}
\end{aligned} \tag{2}
$$

Сега може да изразим сбора и разликата на α_i, α_j по следния начин:

$$
\begin{aligned}
\alpha_i + \alpha_j &= \frac{a - b}{r_1 - r_2} = u_1 \in \mathbb{C} \\
\alpha_i \alpha_j &= a - r_1 \frac{a - b}{r_1 - r_2} = u_2 \in \mathbb{C}
\end{aligned} \tag{3}
$$

Получихме, че α_i, α_j са корени на следното уравнение с комплексни коефициенти: $x^2 - u_1 x + u_2 = 0$ (използвахме формулите на Виет на обратно). Сега решаваме квадратното уравнение:

$$
\alpha_{i,j} = \frac{u_1 \pm \sqrt{D}}{2} \qquad D = u_1^2 - 4u_2 \tag{4}
$$

Очевидно $\alpha_{i,j} \in \mathbb{C}$. Окончателно получихме, че f има поне един комплексен корен (даже има 2).

Лема 2

Ако $\alpha \in \mathbb{C}$ е корен на $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, следователно $\overline{\alpha}$ също е корен на $f(x)$.

Доказателство:
Нека $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n \in \mathbb{R}[x]$.
Ще използваме, че коефициентите a_i са реални, следователно съвпадат с комплексно спрегнатите си, както и че

$$\begin{aligned}\overline{u_1}\,\overline{u_2} &= \overline{u_1u_2}\\ \overline{u_1}+\overline{u_2} &= \overline{u_1+u_2}\end{aligned}\tag{5}$$

за произволни комплексни числа u_1, u_2.
Да видим на колко е равно $f(\overline{\alpha})$:

$$\begin{aligned}f(\overline{\alpha}) &= a_0\overline{\alpha}^n + a_1\overline{\alpha}^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\overline{\alpha} + a_n\\ &= a_0\overline{\alpha^n} + a_1\overline{\alpha^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\overline{\alpha} + a_n\\ &= \overline{a_0\alpha^n} + \overline{a_1\alpha^{n-1}} + \cdots + \overline{a_{n-1}\alpha} + \overline{a_n}\\ &= \overline{a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \cdots + a_n}\\ &= \bar{0}\\ &= 0\end{aligned}\tag{6}$$

Т.е показахме, че $\overline{\alpha}$ е корен на $f(x)$.

Дефиниция (алгебрически затворено поле)

Нека F е поле. Ако $\forall f(x) \in F[x]$, за който $\deg f > 0$ е изпълнено, че всички корени на $f(x)$ са в F, то F се нарича *алгебрически затворено*.

Основна теорема на Алгебрата

Полето $\mathbb{C}$ е алгебрически затворено.
Теоремата може да се перефразира така: Всеки полином с комплексни коефициенти има *поне* един комплексен корен. Ако разделим полинома на $x - \alpha$, където α е комплексния му корен ще получим друг полином, който също има поне един комплексен корен и така след точно $\deg f$ стъпки ще разложим началния полином f на $\deg f$ множители от вида $x - \alpha_i$, т.е ще сме намерили *всичките* му $\deg f$ корена.

Доказателство:

Нека $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ е произволен полином: $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$.
Нека с $\bar{f}(x)$ бележим полинома с коефициенти, комплексно спрегнатите на коефициентите на полинома f, т.е $\bar{f}(x) = \overline{a_0}x^n + \overline{a_1}x^{n-1} + \cdots + \overline{a_n}$.
Да си образуваме функцията $g(x) = f(x)\bar{f}(x) = g_0x^{2n} + g_1x^{2n-1} + \cdots + g_{2n}$. Очевидно

$$g_k = a_0\overline{a_k} + a_1\overline{a_{k-1}} + a_2\overline{a_{k-2}} + \cdots + a_k\overline{a_0}\tag{7}$$

Сега ако разпишем $\overline{g_k}$ ще видим че се получава точно g_k (от където ще следва че $g_k \in \mathbb{R}$).

$$\begin{aligned}\overline{g_k} &= \overline{a_0\overline{a_k} + a_1\overline{a_{k-1}} + \cdots + a_k\overline{a_0}}\\ &= \overline{a_0\overline{a_k}} + \overline{a_1\overline{a_{k-1}}} + \cdots + \overline{a_k\overline{a_0}}\\ &= \overline{a_0}a_k + \overline{a_1}a_{k-1} + \cdots + \overline{a_k}a_0\\ &= g_k\end{aligned}\tag{8}$$

Следователно $g_k \in \mathbb{R} \quad \forall k = \overline{1, n}$.
Прилагаме Лема 1 за полинома g и получаваме, че той има поне един комплексен корен α. От Лема 2 имаме и $\overline{\alpha}$ също е корен на g. Следователно

$$
\begin{aligned}
f(\alpha)\bar{f}(\alpha) = 0 \\
f(\overline{\alpha})\bar{f}(\overline{\alpha}) = 0
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Ако допуснем, че $\overline{\alpha}$ е корен на f тогава теоремата е доказана (произволен полином над $\mathbb{C}$ има поне един комплексен корен). В противен случай получаваме, че $\bar{f}(\overline{\alpha}) = 0$ (от второто равенство). Да си разпишем $\bar{f}(\overline{\alpha})$:

$$
\begin{aligned}
\bar{f}(\overline{\alpha}) &= \overline{a_0}\,\overline{\alpha}^n + \overline{a_1}\,\overline{\alpha}^{n-1} + \cdots + \overline{a_n} \\
&= \overline{a_0\alpha^n} + \overline{a_1\alpha^{n-1}} + \cdots + \overline{a_n} \\
&= \overline{a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \cdots + a_n} \\
&= \overline{f(\alpha)}
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Следователно $\bar{f}(\overline{\alpha}) = 0$ е равносилно на $\overline{f(\alpha)} = 0$, от където получаваме, че $f(\alpha) = 0$, с което теоремата е доказана.

Следствия

Следствие 1: Неразложимите полиноми над $\mathbb{C}$ са само от 1[ва] степен.

Следствие 2: Ако α е корен на $f \in \mathbb{R}[x]$, то $\overline{\alpha}$ е корен на f.

Следствие 3: Ако $f \in \mathbb{R}[x]$, то корените на f са $\alpha_1, \cdots, \alpha_s \in \mathbb{R}$ и $\beta_1, \overline{\beta_1}, \cdots, \beta_t, \overline{\beta_t} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Следователно разлагането на f е:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_s)(x-\beta_1)(x-\overline{\beta_1})\cdots(x-\beta_t)(x-\overline{\beta_t}) \\
&= (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_s)(x^2-\underbrace{(\beta_1+\overline{\beta_1})}_{\in\mathbb{R}}x+\underbrace{\beta_1.\overline{\beta_1}}_{\in\mathbb{R}})\cdots(x^2-\underbrace{(\beta_t+\overline{\beta_t})}_{\in\mathbb{R}}x+\underbrace{\beta_t.\overline{\beta_t}}_{\in\mathbb{R}})
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Неразложимите полиноми над $\mathbb{R}$ са тези от първа степен, както и тези от втора степен с отрицателна дискриминанта.

page revision: 5, last edited: 3 Jul 2009, 00:59 (1465 days ago)

Unless stated otherwise Content of this page is licensed under Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 License