Едночлени

Нека A е област на цялост.
Тогава $A[x]$ е множеството от полиноми над A на една променлива.
$A[x][y]$ е множеството от полиноми на една променлива над $A[x]$, или алтернативно може да го разглеждаме като множеството от полиноми на две променливи над A. За удобство ще записваме $A[x, y]$.
Респективно $A[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ е множеството от полиноми на n променливи над A.
Всеки от тях може да бъде записан като:

$$\sum_{\alpha} \underbrace{a_\alpha \prod_{i=1}^{n} x_i^{k_i}}_{t_\alpha} \tag{1}$$

Където t_α е *едночлен*.
Степен на променлива на едночлен е … степента, с която променливата участва в едночлена: $\deg_{x_s} t = k_s$.
Степен на едночлен наричаме сумата от степените на всички променливи: $\deg t = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$.
Степен на полином е най-голямата степен на едночлен в полинома:

$\deg f = \max\{\deg t\}$

Подобни едночлени наричаме едночлени, които се различават само по константата си. Нека $t = ax_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}$ и $l = bx_1^{s_1} x_2^{s_2} \cdots x_n^{s_n}$. Тогава $t \sim l \iff s_i = k_i \quad i = \overline{1, n} \& a \neq b$.

Лексикографска наредба

Ще трябва да въведем някаква подредба на едночлените, т.е когато записваме полинома първо да слагаме 'по-големите' едночлени после 'по-малките'.
Нека

$$\begin{aligned} t &= ax_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n} \\ l &= bx_1^{s_1} x_2^{s_2} \cdots x_n^{s_n} \end{aligned} \tag{2}$$

Тогава $t \succ l$ (t предшества l) ако:

1. $t \nsim l$
2. $\exists i : k_j = s_j \quad \forall j < i \& k_i > s_i$

Записваме полинома $f = t_1 + t_2 + \cdots + t_p$ по този начин, ако $t_1 \succ t_2 \succ t_3 \cdots \succ t_p$.

Дефиниция (Главен едночлен)

Нека $f = t_1 + t_2 + \cdots + t_p$ е полином. Тогава t_1 е неговият *главен едночлен* ако $t_1 \succ t_i \quad \forall i > 1$. (т.е ако го запишем както сме описали в предната точка - първия).

Лема

Нека $f, g \in F[x_1, x_2, \cdots, x_n]$. Тогава главният едночлен на $f.g$ е произведение на главните едночлени на f и g.

Доказателство:

Нека t и l са главните едночлени на f и g и нека u и v са произволни едночлени от f и g. Ще докажем, че $t.l \succ u.v$. Означаваме си t, l, u, v:

$$\begin{aligned} t = a\prod_{i=1}^{n} x_i^{k_i} \quad l = b\prod_{i=1}^{n} x_i^{s_i} \\ u = c\prod_{i=1}^{n} x_i^{r_i} \quad v = d\prod_{i=1}^{n} x_i^{q_i} \end{aligned} \tag{3}$$

1. $\exists p : k_j = r_j \quad \forall j < p \& k_p > r_p$
2. $\exists w : s_j = q_j \quad \forall j < w \& s_w > q_w$

Нека $m = \min\{p, w\}$. Следователно $x_i^{k_i+s_i} = x_i^{r_i+q_i} \quad \forall i < m$ и $x_m^{k_m+s_m} > x_m^{r_m+q_m}$, т.е $t.l \succ u.v$.

Симетрични полиноми

Нека $t = \prod x_i^{k_i}$ е едночлен и $\sigma \in S_n$ (σ е пермутация на n променливи). Тогава $\sigma(t) = \prod x_{\sigma(i)}^{k_i}$. (разместваме променливите на едночлена чрез пермутацията).
Сега може да дефинираме и действието на пермутацията върху полином:

$$\begin{gathered} f = t_1 + t_2 + \cdots + t_m \\ \sigma(f) = \sigma(t_1) + \sigma(t_2) + \cdots + \sigma(t_m) \end{gathered} \tag{4}$$

Може да кажем, че σ действа върху множеството от $F[x_1, \cdots, x_n]$.

Дефиниция (Симетричен полином)

$f \in F[x_1, \cdots, x_n]$ наричаме симетричен полином ако е изпълнено, че $\sigma(f) = f \quad \forall \sigma \in S_n$.

Примери

Елементарни симетрични полиноми:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sigma_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n = \sum_{i<j} x_ix_j \\ &\vdots \\ \sigma_n &= x_1x_2\cdots x_n = \prod_{i=1}^{n} x_i \end{aligned} \tag{5}$$

Други интересни суми:

$$\begin{aligned} s_2 &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\ s_3 &= \sum_{i=1}^{n} x_i^3 \\ &\vdots \end{aligned} \tag{6}$$

Основна теорема за симетричните полиноми

Теорема: Нека $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in F[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ е симетричен полином. Тогава съществува единствен полином $g \in F[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ такъв, че:

$$g(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \tag{7}$$

С други думи всеки симетричен полином може да бъде изразен като полином на елементарните симетрични полиноми.

Доказателство:

$|\exists|$ **Съществуване:**
С g_x ще бележим полином на елементарните симетрични полиноми, а с f_x ще отбелязваме просто симетричен полином. На всяка стъпка ще отделяме по един g-полином като си осигуряваме, че отделяйки го с него си 'заминава' и главния едночлен от f-полинома. От f отделяме g_1 и се получава f_1 ($f_1 = f - g_1$), като главният едночлен на f_1 е след главният едночлен на f.

$$\begin{aligned} f &= g_1 + f_1 \\ f_1 &= g_2 + f_2 \\ &\vdots \\ f_{s-1} &= g_s + f_s \\ f_s &= 0 \\ f &= g_1 + g_2 + g_3 + \cdots + g_s \end{aligned} \tag{8}$$

Ако всеки път намаляваме главния едночлен ще стигнем до нула и като резултат получаваме f като сума на g-полиноми, което очевидно е g-полином. Сега ще покажем как се отделя от произволен f-полином g-полином така че да махнем главния едночлен на f-полинома.

Нека f е симетричен и има главен едночлен $t = ax_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}$. Тогава със сигурност в f са всички едночлени от вида $x_1^{k_{\sigma(1)}} x_2^{k_{\sigma(2)}} \cdots x_n^{k_{\sigma(n)}}$ за всяко $\sigma \in S_n$ (дали ще пермутираме буквите или степените е без значение). Това означава, че със сигурност за главният едночлен е изпълнено $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_n$ (ако не са подредени по големина, то съществува пермутация която ги подрежда по големина; тъй като подреденият едночлен ще присъства в полинома, той би бил преди главния - противоречие).
Сега си конструираме $g_1 = a\sigma_1^{k_1 - k_2} \sigma_2^{k_2 - k_3} \cdots \sigma_{n-1}^{k_{n-1} - k_n} \sigma_n^{k_n}$. Ще проверим, че главният едночлен на g_1 е точно t. За целта трябва да видим кои са главните едночлени на $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$ (ползваме Лемата).
$t' = ax_1^{k_1 - k_2} (x_1 x_2)^{k_2 - k_3} \cdots (x_1 x_2 \cdots x_{n-1})^{k_{n-1} - k_n} (x_1 x_2 \cdots x_n)^{k_n} = ax_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}$ - всичко точно.

Е, сега вече очевидно $f_1 = f - g_1$ има главен едночлен по-малък от главния едночлен на f и на g_1 (които съвпадат) т.е в частност е по-малък от t. g_1 е симетричен полином, следователно и разликата на симетрични полиноми $f - g_1 = f_1$ също е симетричен полином.
Повтаряме стъпката докато f_s стане 0. Разложихме f на $g_1 + g_2 + \cdots + g_n$, което е сума на полиноми на елементарни симетрични полиноми - т.е полином на елементарни симетрични полиноми.

$|!|$ **Единственост**
Сега ще докажем, че съществува единствен полином $g(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ над полето F, за който $g(\sigma_1, \cdots, \sigma_n) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

Забележка: Обърнете внимание, че ние искаме полинома да е единствен по отношение на коефициентите си, а не по отношение на функционалните си стойности.

Да допуснем противното - че съществуват два полинома g_1, g_2 с коефициенти над F, за които

$$f(x_1, \cdots, x_n) = g_1(\sigma_1, \cdots, \sigma_n) = g_2(\sigma_1, \cdots, \sigma_n) \tag{9}$$

Да си построим $h = g_1 - g_2$.
Ще докажем, че от $h(\sigma_1, \cdots, \sigma_n) = 0$ следва $h = 0$ (т.е следва че полинома h е константата 0). Т.е, че ако в произволен полином над полето F заместим неизвестните с $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ и получим 0, то полиномът е константата 0. Ще направим индукция по броя на неизвестните n.

База на индукцията: $n = 1$
Имаме, че $h \in F[x_1]$ и $h(\sigma_1) = 0$. Да обаче $\sigma_1 = x_1$ (когато имаме 1 променлива), затова $h(x_1) = 0$. И това е вярно за всяко x_1, следователно полинома h е константата 0.

Индукционно предположение: Нека $h(y_1, y_2, \cdots, y_{n-1})$ е полином с коефициенти над F и от $h(\sigma_1, \cdots, \sigma_{n-1}) = 0$, следва че $h = 0$.

Индукционна стъпка: Нека $h(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ изпълнява $h(\sigma_1, \cdots, \sigma_n) = 0$. От всички полиноми, изпълняващи това условие да изберем този с най-малка степен. Ако полиномът е константата 0, тогава индукционната стъпка е направена. Допускаме, че h е от степен поне 1.

Разписваме полинома h по следния начин (разделяме h на две части - частно и остатък при деление с y_n)

$$h(y_1, y_2, \cdots, y_n) = h_0(y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}) + y_n h_1(y_1, y_2, \cdots, y_n) \quad (\star) \tag{10}$$

Ще докажем, че $h_0 \neq 0$. Да допуснем противното - че $h_0 = 0$:
Тогава $y_n \mid h$, следователно може да запишем

$$h(y_1, \cdots, y_n) = y_n t(y_1, \cdots, y_n) \tag{11}$$

където t е частното при деление на h с y_1. Да заместим неизвестните с $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$:

$$\begin{aligned} h(\sigma_1, \cdots, \sigma_n) &= \sigma_n t(\sigma_1, \cdots, \sigma_n) \\ 0 &= \sigma_n t(\sigma_1, \cdots, \sigma_n) \end{aligned} \tag{12}$$

Сега очевидно $\sigma_n \neq 0$ (за произволни стойности на $x_1, \cdots, x_n$). Тогава излиза, че $t(\sigma_1, \cdots, \sigma_n) = 0$ (защото F е област на цялост - т.е няма делители на нулата). Обаче t е полином със степен по-малка от $\deg h$.[1] Противоречие (от избора на h).
Следователно $h_0 \neq 0$.
Сега имаме, че $h_0 \neq 0$. Да заместим в $(\star)$ с $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$

$$h(\sigma_1, \cdots, \sigma_n) = h_0(\sigma_1, \cdots, \sigma_{n-1}) + \sigma_n t(\sigma_1, \cdots, \sigma_n) \tag{13}$$

От допускането имаме, че:

$$0 = h_0(\sigma_1, \cdots, \sigma_{n-1}) + \sigma_n t(\sigma_1, \cdots, \sigma_n) \tag{14}$$

И горното равенство е вярно за произволни $x_1, x_2, \cdots, x_n$ (те изграждат $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$). Това означава, че равенството пак ще е изпълнено, ако си фиксираме $x_n = 0$. Да разгледаме какво се случва със $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ в този случай:

$$\begin{aligned} \sigma_1^{(n)} &= & x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + 0 & &= \sigma_1^{(n-1)} \\ \sigma_2^{(n)} &= & x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_1x_{n-1} + 0 + \cdots x_{n-2}x_{n-1} & &= \sigma_2^{(n-1)} \\ & & \vdots & & \\ \sigma_{n-1}^{(n)} &= & x_1x_2 \cdots x_{n-1} & &= \sigma_{n-1}^{(n-1)} \\ \sigma_n &= & \sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_{n-1}0 & &= 0 \end{aligned} \tag{15}$$

Забележка: С горен индекс (n) отбелязваме на колко променливи сме разгледали елементарните симетрични полиноми.
Както ясно се вижда, ако $x_n = 0$, елементарните симетрични полиноми на n променливи се превръщат елементарни симетрични полиноми на $n-1$ променливи, с изключение на σ_n, което става равно на 0. Ако се върнем към равенството и заместим с новите $\sigma_i^{(n-1)}$ получаваме:

$$0 = h_0(\sigma_1^{(n-1)}, \sigma_2^{(n-1)}, \cdots, \sigma_{n-1}^{(n-1)}) + 0t(\sigma_1^{(n-1)}, \cdots, \sigma_{n-1}^{(n-1)}, 0) \tag{16}$$

От индукционното предположение имаме, че ако h_0 е такъв полоном, че заместен с елементарните симетрични полиноми се получава 0, то и самия h_0 трябва да е нулевият полином, т.е получихме че $h_0 = 0$. Противоречие (доказахме, че $h_0 \neq 0$).

Следователно $h = 0$, с което индукцията (и теоремата) са доказани!

Следствие

Нека $f(x) \in F[x]$ и $\deg f = n$. Нека $K \supset F$ е разширението на F, в което попадат корените на f - $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in K$.
Ако $t(x_1, \cdots, x_n)$ е произволна симетрична функция на n променливи над F, то $t(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in F$.
Доказателство: Прилагаме основната теорема за t и получаваме, че съществува полином $h(y_1, \cdots, y_n) \in F[x_1, \cdots, x_n]$, за който $h(\sigma_1, \cdots, \sigma_n) = t(x_1, \cdots, x_n)$.
От формулите на Виет получаваме, че:

$$\begin{aligned} \sigma_1(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) &= -\frac{a_1}{a_0} \\ \sigma_2(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) &= \frac{a_2}{a_0} \\ &\vdots \\ \sigma_n(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) &= (-1)^n \frac{a_n}{a_0} \end{aligned} \tag{17}$$

Следователно:

$$\begin{aligned} t(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) &= h(\sigma_1(\alpha_1, \cdots, \alpha_n), \cdots, \sigma_n(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)) \\ &= h(\underbrace{-\frac{a_1}{a_0}}_{\in F}, \underbrace{\frac{a_2}{a_0}}_{\in F}, \cdots, \underbrace{(-1)^n \frac{a_n}{a_0}}_{\in F}) \in F \end{aligned} \tag{18}$$

Т.е получихме, че произволна симетрична функция над F, заместена с корените на произволен полином над F дава елемент на полето F (независимо, че корените могат и да **не** са от полето F).

Footnotes

1. ако h беше нулевият полином, тогава и t щеше да е нулевият полином и противоречие нямаше да има. Но ние избрахме $h \neq 0$

page revision: 11, last edited: 1 Jun 2012, 01:54 (400 days ago)