Съседни класове

Дефиниция (съседен клас):

Нека G е група. Нека $H < G$ и $g \in G$ са произволни. Тогава

$$\begin{aligned} gH &= \{gh \mid h \in H\} \\ Hg &= \{hg \mid h \in H\} \end{aligned} \tag{1}$$

наричаме *съседни класове* на G.
gH е *ляв съседен клас*.
Hg е *десен съседен клас*.

Пример

Разглеждаме симетричната група S_3, и подгрупата H породена от елемента $(1\ 2)$, т.е $H = \langle (1\ 2) \rangle = \{id, (1\ 2)\}$.

Нека $g = (1\ 2\ 3) \in G$. Тогава десен и ляв съседен клас на H са съответно:

$$\begin{aligned} (1\ 2\ 3)H &= \{(1\ 2\ 3)id, (1\ 2\ 3)(1\ 2)\} = \{(1\ 2\ 3), (1\ 3)\} \\ H(1\ 2\ 3) &= \{(1\ 2\ 3)id, (1\ 2)(1\ 2\ 3)\} = \{(1\ 2\ 3), (2\ 3)\} \end{aligned} \tag{2}$$

Както виждате левите и десните съседни класове (породени от един и същи елемент) може да са различни. Разбира се ако групата е комутативна те съвпадат.

Свойства

Свойство 1

$gH = H \iff g \in H \iff H = Hg$

скрий

$| \Leftarrow |$:
Ще докажем чрез влагане в двете посоки.
Нека $g \in H$. Тогава всеки елемент от gH има вида $gh \quad h \in H$, което е елемент на H (защото H е подгрупа и следователно затворена относно операция умножение). Следователно $gH \subseteq H$.
Нека $x \in H$. Тогава може да представим x като $g(g^{-1}x)$, където очевидно $g^{-1}x \in H$, следователно и $x = g(g^{-1}x) \in gH$. Получихме, че $H \subseteq gH$.
Окончателно $H = gH$.
$| \Rightarrow |$:
Нека $gH = H$. Тогава за произволно $g \in G$ имаме, че $g = ge \in gH = H$ (защото единичния елемент е от H). Т.е получихме, че $g \in H$.
Аналогично се доказва и за ляв съседен клас

Свойство 2'

$g_1H = g_2H \iff g_1^{-1}g_2 \in H$

скрий

$| \Rightarrow |$:
Нека g_1h_1 е произволен елемент от g_1H. Тъй като $g_1H = g_2H$, то очевидно съществува елемент $g_2h_2 \in g_2H$, такъв че $g_1h_1 = g_2h_2$. Сега умножаваме отляво с g_2^{-1} и отдясно с h_1^{-1} и получаваме:

$$\begin{aligned} g_1h_1 &= g_2h_2 \\ g_2^{-1}g_1h_1 &= h_2 \\ g_2^{-1}g_1 &= h_2h_1^{-1} \in H \end{aligned} \tag{3}$$

Така получихме, че $g_2^{-1}g_1 \in H$.
$|\Leftarrow|$:
Нека $g_1^{-1}g_2 = x \in H$. Следователно $g_2 = g_1 x$ и $g_1 = g_2 x^{-1}$
Ще докажем влагане в двете посоки:
Нека $g_2 h_2 \in g_2 H$ е произволен. Тогава $g_2 h_2 = (g_1 \underbrace{x) h_2}_{\in H} \in g_1 H$. Следователно $g_2 H \subseteq g_1 H$.
Нека $g_1 h_1 \in g_1 H$ е произволен. Тогава $g_1 h_1 = (g_2 \underbrace{x^{-1}) h_1}_{\in H} \in g_2 H$. Следователно $g_1 H \subseteq g_2 H$.
Окончателно $g_1 H = g_2 H$.

Свойство 2''

$$Hg_1 = Hg_2 \iff g_1 g_2^{-1} \in H$$

Доказва се аналогично на горното

Свойство 3

Сечението на левите класове на 2 елемента е или празното множество, или съвпадат.

$$g_1 H \cap g_2 H = \begin{cases} \emptyset \\ g_1 H = g_2 H \end{cases} \tag{4}$$

скрий

Нека $x \in g_1 H \cap g_2 H$. Тогава:

$$\left.\begin{array}{l} x \in g_1 H \Rightarrow x = g_1 h_1 \Rightarrow g_1^{-1} x = h_1 \Rightarrow g_1^{-1} x \in H \xRightarrow{2'} xH = g_1 H \\ x \in g_2 H \Rightarrow x = g_2 h_2 \Rightarrow g_2^{-1} x = h_2 \Rightarrow g_2^{-1} x \in H \xRightarrow{2'} xH = g_2 H \end{array}\right\} \Rightarrow g_1 H = g_2 H \tag{5}$$

Свойство 3'

$$Hg_1 \cap Hg_2 = \begin{cases} \emptyset \\ Hg_1 = Hg_2 \end{cases} \tag{6}$$

Доказателството е аналогично.

Свойство 4

Нека H е подгрупа на G и g е елемент от G. Тогава gH и H са равномощни (имат равен брой елементи).

скрий

Ще намерим биекция $\varphi : H \to gH$.
Нека $\varphi(x) = gx$. Да допуснем, че $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$. Тогава:

$$\begin{aligned} gx_1 &= gx_2 \\ g^{-1}gx_1 &= g^{-1}gx_2 \\ x_1 &= x_2 \end{aligned} \tag{7}$$

Следователно φ е инекция. Очевидно е сюрекция (защото всеки елемент от gH е gh, където $h \in H$). Следователно φ е биекция!

Свойство 5

Нека M_1 и M_2 са множествата от левите и десните съседни класове на G:

$$\begin{aligned} M_1 &= \{gH | g \in G\} \\ M_2 &= \{Hg | g \in G\} \end{aligned} \tag{8}$$

Тогава M_1 и M_2 са равномощни - т.е съществува биекция $\psi : M_1 \to M_2$.

скрий

Дефинираме $\psi(gH) = Hg^{-1}$. Функцията очевидно е сюрективна (защото всеки елемент си има обратен в групата, и следователно Hg^{-1} обхожда всички десни съседни класове).
Да допуснем, че $\psi(g_1H) = \psi(g_2H)$, тогава:

$$\begin{aligned} Hg_1^{-1} &= Hg_2^{-1} \\ \Rightarrow g_1^{-1}g_2 &\in H \\ \Rightarrow g_1H &= g_2H \end{aligned} \tag{9}$$

следователно функцията ψ е инективна, т.е и биективна.

Теорема на Лагранж

Дефиниция: Нека G е група и $H < G$. *Индекс* на H в G е броя на левите съседни класове (= броя на десните съседни класове) и се бележи с $|G : H|$.

Теорема *(на Лагранж)*:

Нека $|G| < \infty$, $H < G$ и следователно $|G : H| = k < \infty$.
Тогава $|H||G : H| = |G|$.
Доказателство: Директно следствие от Свойство 3, 4 - всички съседни класове са равномощни помежду си (и имат брой на елементите $|H|$) и освен това са непресичащи се, следователно броя на всички елементи, е броя на съседните класове $|G : H|$, по броя на елементите във всеки от тях $|H|$.

Следствие 1:

Нека $|G| < \infty$ и $H < G$. Следователно $|H|/|G|$ и $|G : H|/|G|$.

Следствие 2:

Нека $g \in G$ и $|G| < \infty$. Следователно $|g|/|G|$ (тук разбира се $|g| = |\langle g \rangle|$)

Следствие 3:

Нека $|G| = p$ е просто. Следователно G е циклична. И $G \cong C_p \cong \mathbb{Z}_p$ (както знаем цикличните групи от даден ред са все изоморфни помежду си (и в частност на най-известните си представители C_p и $\mathbb{Z}_p$)).
Доказателство: Нека $a \in G$ е различен от единичния елемент e. Тогава $|a| > 1$ и също $|a|/|G| = p$, следователно $|a| = p$. От тук $|\langle a \rangle| = p = |G|$, следователно $\langle a \rangle = G$. Следователно групата е циклична.

page revision: 13, last edited: 1 Jul 2009, 19:24 (1466 days ago)