

Задачи за Екстра Кредит на 4 и 5 гр., 1к, сп. Компютърни Науки

23 март 2011 г.

Задача 1 Да се докаже, че ако L_1 и L_2 са регулярни езици, то и езикът $L = \{\alpha \mid \exists \beta \in L_2 : \alpha\beta \in L_1\}$ е регулярен.

Задача 2 Вярно ли е, че за всеки регулярен език L , езикът:

$$L_1 = \{\alpha = a_1\omega_1a_2\omega_2 \dots a_n\omega_n \mid a_1a_2 \dots a_n \in L, \text{ а } \omega_i \text{ са произволни букви}\}$$

е регулярен? Отговорът да се обоснове.

Задача 3 Нека L е езикът от всички думи над азбука $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, които разглеждани като числа в десетична бройна система са кратни на 8. Да се докаже, че не съществува детерминиран автомат A , който разпознава L , такъв че A може да бъде изобразен в равнината без самопресичания, тоест графът индуциран от A е планарен.

Задача 4 Нека $\Sigma = \{0, 1\}$.

1. $L_1 = \{\alpha \in (\Sigma \times \Sigma)^* \mid \alpha = (a_0, b_0) \dots (a_n, b_n) : \overline{a_0a_1 \dots a_{n(2)}} = \overline{b_0b_1 \dots b_{n(2)}}\}$.
2. $L_2 = \{\alpha \in (\Sigma \times \Sigma \times \Sigma)^* \mid \alpha = (a_0, b_0, c_0) \dots (a_n, b, c_n) : \overline{a_0a_1 \dots a_{n(2)}} + \overline{b_0b_1 \dots b_{n(2)}} = \overline{c_0c_1 \dots c_{n(2)}}\}$
3. $L_3 = \{\alpha \in (\Sigma \times \Sigma \times \Sigma)^* \mid \alpha = (a_0, b_0, c_0) \dots (a_n, b, c_n) : \overline{a_0a_1 \dots a_{n(2)}} \cdot \overline{b_0b_1 \dots b_{n(2)}} = \overline{c_0c_1 \dots c_{n(2)}}\}$

Да се построят крайни, детерминирани автомати за L_1 и L_2 . Да се докаже, че L_3 **не** е регулярен.

Забележка: Думите не могат от L_1 не могат да започват с $(0, 0)$, но могат да започват с $(0, 1)$. Думите от L_2 и L_3 не могат да започват с $(0, 0, 0)$ но могат да започват с $(0, 0, 1)$ или $(1, 0, 1)$, съответно $(0, 1, 1)$.

Задача 5 Нека $L = \{\alpha \in \{a, b\}^* \mid \alpha \text{ е с четна дължина и } \alpha = \alpha^R\}$. Вярно ли е, че L^* е регулярен? Отговорът да се обоснове.

Задача 6 Нека L е език над азбука Σ . За една дума α с $\text{suf}_L(\alpha)$ означаваме най-дългата наставка γ на думата α , за която γ е представка на някоя дума от L , тоест:

1. $\alpha = x\gamma$ за някоя дума $x \in \Sigma^*$.
2. $\gamma y \in L$ за някоя дума $y \in \Sigma^*$.
3. γ е най-дълга със свойствата 1 и 2.

Да се докаже, че ако L е регулярен, то и езикът:

$$S(L) = \{\alpha \in \Sigma^* \mid \text{suf}_L(\alpha) \in L\}$$

също е регулярен.

Пример: $L = \{a, aaba\}$, то думата $\alpha = aa$ не е в $S(L)$, защото $\text{suf}_L(aa) = aa$, но думата $\beta = abba$ е в $S(L)$, защото $\text{suf}_L(abba) = a$.

Задача 7 Нека $\Sigma = \{\sigma\}$ е еднобуквена азбука. За език $L \subseteq \Sigma^*$ с $\mathcal{N}(L)$ означаваме следното множество от естествени числа:

$$\mathcal{N}(L) = \{n \in \mathbb{N} \mid \sigma^n \in L\}.$$

1. Да се докаже, че L е регулярен тогава и само тогава, когато $\mathcal{N}(L)$ е крайно обединение от аритметични прогресии.
2. Да се докаже, че L е регулярен тогава и само тогава, когато за L е изпълнена лемата за разрастване за регулярни езици (Pumping Lemma).
3. Да се докаже, че L е регулярен тогава и само тогава, когато L е контекстносвободен.

Задача 8 Нека $A = \langle \Sigma, Q, \delta, s, F \rangle$ е краен детерминиран автомат. За състояние $q \in Q$ с $A(q)$ означаваме автомата:

$$A(q) = \langle \Sigma, Q, \delta, q, F \rangle,$$

а с $L(q)$ езика, определен от $A(q)$. Нека $|Q| = n$, а q_1 и q_2 са произволни състояния от Q , да се докаже, че:

1. $L(q_1) \neq L(q_2)$ точно тогава, когато има дума $\alpha \in \Sigma^*$ с дължина $|\alpha| \leq n - 1$, за която:

$$\alpha \in L(q_1) \triangle L(q_2).$$

2. $L(q_1) \not\subseteq L(q_2)$ точно тогава, когато има дума $\alpha \in \Sigma^*$ с дължина $|\alpha| \leq 2n - 2$, за която:

$$\alpha \in L(q_1) \setminus L(q_2).$$