1 | Безкрайни числови редове - сходимост, свойства

$\boxed{D}$ Нека $a_1 \ldots a_n \ldots$ - безкрайна числова редица.

1.) Формалната сума $a_1 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ се нарича БЕЗКРАЕН ЧИСЛОВ РЕД (БЧРед)

2.) $\forall n \in \mathbb{N} - S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ - n-ТА ПАРЦИАЛНА СУМА

$\boxed{D}$ Казваме, че БЧРед е СХОДЯЩ, ако $\exists \lim_{n\to\infty} S_n = S$, и S се нарича СУМА НА БЧРЕД.

В противен случай се нарича РАЗХОДЯЩ

$\boxed{T}$ (Необходимо условие)

Ако БЧРед $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ, то $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Доказателство:

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ и $S = \lim_{n\to\infty} S_n \Rightarrow a_n = S_n - S_{n-1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n =$

$= \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$

Свойства:

① Ако $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ и $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ също е сходящ и е равен на $\lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Доказателство:

Нека $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ и $\bar{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda a_k$.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S = \lim_{n\to\infty} S_n$

$\lim_{n\to\infty} \bar{S}_n = \lim_{n\to\infty} \lambda S_n = \lambda \lim_{n\to\infty} S_n = \lambda S \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ е сходящ и

$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

② Ако $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ са сходящи, то $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ е сходящ и $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n$

Доказателство:

Нека $S=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\bar{S}=\sum_{n=1}^{\infty}b_n$, $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$, $\bar{S}_n=\sum_{k=1}^{\infty}b_k$,

$$\hat{S}_n=\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k=S_n+\bar{S}_n$$

$$\lim_{n\to\infty}\hat{S}_n=\lim_{n\to\infty}(S_n+\bar{S}_n)=\lim_{n\to\infty}S_n+\lim_{n\to\infty}\bar{S}_n=S+\bar{S}\Rightarrow$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ е сходящ и $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n$

③ БЧРед $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ е сходящ $\Leftrightarrow$ е сходящ някой ред от вида $\sum_{n=m+1}^{\infty}a_n$ $(m\in\mathbb{N})$

Доказателство:

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$, $\bar{S}_p=\sum_{k=m+1}^{p+m}a_k$

$n>m\Rightarrow S_n=S_m+S_{n-m}$

Т.к. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ е сходящ $\Rightarrow \{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща $\Rightarrow$

$\Rightarrow \{\bar{S}_p\}_{p=1}^{\infty}=\{S_n-S_m\}_{n=m+1}^{\infty}$ е също сходяща $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{n=m+1}^{\infty}a_n$ е сходящ.

④ Ако $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ е сходящ, то $\sum_{m=1}^{\infty}b_m$ е сходящ, където b_m се получава, като прегрупираме $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ в реда, в който е зададена, т.е. $b_1=a_1+\ldots+a_{p_1}$

$b_2=a_{p_1+1}+\ldots+a_{p_2}$

$\ldots\ldots\ldots$

, и има същата сума като $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$

(4.) Доказателство:

Ако $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$ и $S=\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, то $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ и $\bar{S}_m=\sum_{p=1}^{m} b_p \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{S}_m=\sum_{n=1}^{p_m} a_n = S_{p_m}$. $\{S_{p_m}\}_{m=1}^{\infty}$ е подредица на $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$

$\Rightarrow \{S_{p_m}\}_{m=1}^{\infty}$ е сходяща и има граница S.

$\Rightarrow \{\bar{S}_m\}_{m=1}^{\infty}$ е сходяща и $\lim_{m\to\infty} \bar{S}_m = S \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} b_m$ е сходящ и $\sum_{m=1}^{\infty} b_m = S$

$\boxed{T}$ Критерий на Коши

БЧРед $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ $\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon):$

$\forall n>N, \forall p\in\mathbb{N} \Rightarrow |a_{n+1}+\dots+a_{n+p}|<\varepsilon$

Доказателство:

$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$; По дефиниция БЧРед е сходящ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща. $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon): \forall n>N, \forall p\in\mathbb{N} \Rightarrow |S_{n+p}-S_n|<\varepsilon$

$\Rightarrow |a_{n+1}+\dots+a_{n+p}|<\varepsilon$