

### 3) КРИТЕРИЙ НА ЛАЙБНИЦ ЗА РЕДОВЕ С АЛТЕРНАТИВНО СМЕНЯЩИ СЕ ЗНАЦИ.

□ Ред от вида  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ ,  $a_n \geq 0$  се нарича РЕД С АЛТЕРНАТИВНО СМЕНЯЩИ СЕ ЗНАЦИ.

#### □ Критерий на Лайбниц

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ ,  $a_n \geq 0$ , е лавов, т.е.: 1)  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  - УН  
2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Щорав този ред е сходящ.

Доказателство:

$S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} a_k \rightarrow$  дали  $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$  е сходяща?

Разглеждаме подредувания с четни индекси.

$$S_{2n} = \underbrace{(a_1 - a_2)}_{\oplus} + \underbrace{(a_3 - a_4)}_{\oplus} + \dots + \underbrace{(a_{2n-1} - a_{2n})}_{\oplus} \geq 0$$

$$S_{2n} = a_1 - \underbrace{(a_2 - a_3)}_{\oplus} - \underbrace{(a_4 - a_5)}_{\oplus} - \underbrace{(a_6 - a_7)}_{\oplus} \dots - \underbrace{(a_{2n-2} - a_{2n-1})}_{\oplus} - a_{2n} \leq a_1$$

$$\Rightarrow \{S_{2n}\}_{n=1}^{\infty} \text{ - ограничена } \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S$$

$$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n} + a_{2n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} + \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} =$$

$$= S + 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \Rightarrow \underline{\underline{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = S}}$$