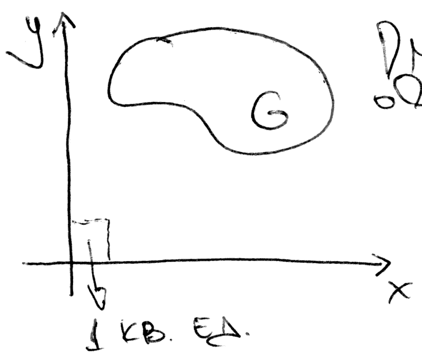
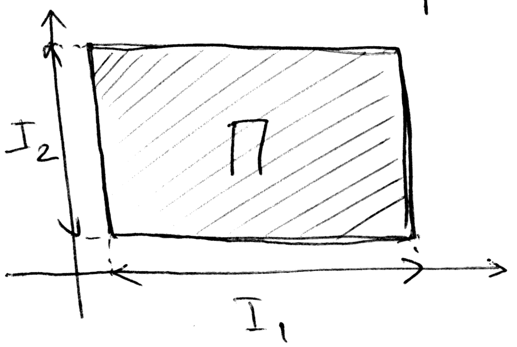
18 Мярка на Жордан в $\mathbb{R}^2$



! Не всяко множество може да има мярка!

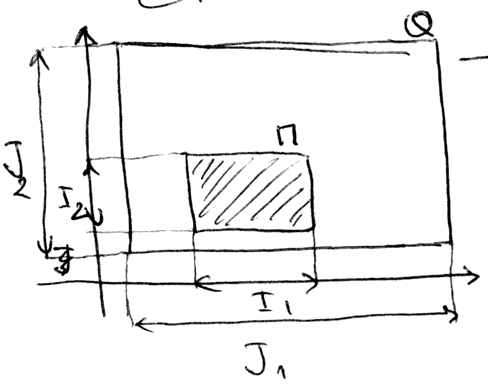
D $\Pi = I_1 \times I_2$, където I_1 и I_2 са клетки в $\mathbb{R}$, се нарича клетка в $\mathbb{R}^2$. Мярка: $m(\Pi) = m(I_1 \times I_2) = m(I_1) . m(I_2)$



Свойства:

1. Ако $\Pi = I_1 \times I_2$ е клетка $\Rightarrow \overline{\Pi} = \overline{I_1} \times \overline{I_2}$ и $\Pi^\circ = I_1^\circ \times I_2^\circ$ - клетки и $m(\overline{\Pi}) = m(\Pi) = m(\Pi^\circ)$

2. Ако за клетките Π и Q - $\Pi \subset Q \Rightarrow m(\Pi) \le m(Q)$

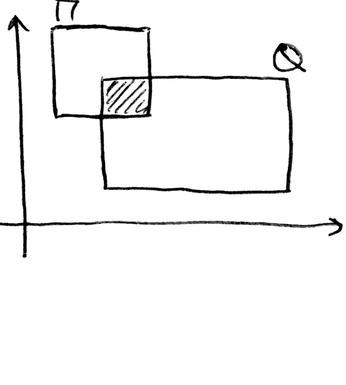


$\rightarrow \Pi \subset Q \Leftrightarrow I_1 \subset J_1$ и $I_2 \subset J_2$

$\Rightarrow m(I_1) \le m(J_1)$ и $m(I_2) \le m(J_2)$

$\Rightarrow m(\Pi) = m(I_1) . m(I_2) \le m(J_1) . m(J_2) = m(Q)$

3. Ако Π и Q са клетки $\Rightarrow \Pi \cap Q$ е клетка



$\Pi = I_1 \times I_2 ; Q = J_1 \times J_2$

$\Pi \cap Q = (I_1 \cap J_1) \times (I_2 \cap J_2)$

D A - множество; $\{A_i\}_{i=1}^n$ - множества. Казваме, че $\{A_i\}_{i=1}^n$ е **РАЗБИВАНЕ НА** A, ако: 1) $A_i \cap A_j = \emptyset$; $i \neq j$; $i,j = \overline{1,n}$

2) $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$

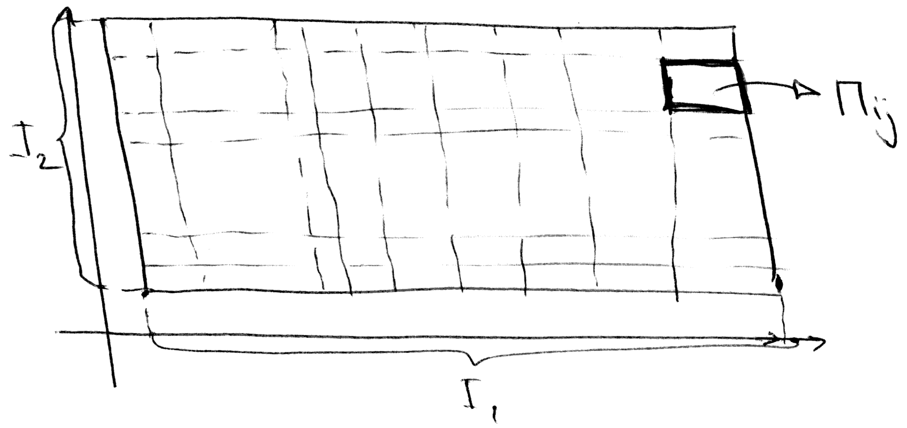
④ Нека $\Pi = I_1 \times I_2$

$\{I_i^{(1)}\}_{i=1}^s$ - разбиване на I_1.

$\{I_j^{(2)}\}_{j=1}^t$ - разбиване на I_2.

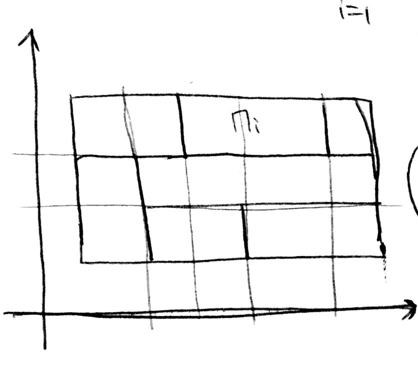
$\Rightarrow \{\Pi_{ij} = I_i^{(1)} \times I_j^{(2)} : i = \overline{1,s};\ j = \overline{1,t}\}$ е разбиване на Π.

(Нарича се **СТАНДАРТНО РАЗБИВАНЕ**)



⑤ Нека Π е клетка и $\{\Pi_i\}_{i=1}^n$ - разбиване на Π на клетки.

Тогава $m(\Pi) = \sum_{i=1}^n m(\Pi_i)$



$\Pi = I \times J$

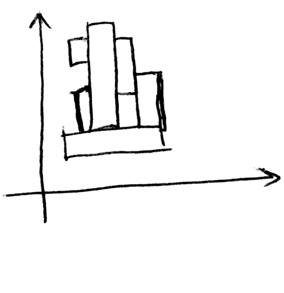
$\{\partial I_i\}_{i=1}^n$ - разбиване на I

$\{\partial J_i\}_{i=1}^n$ - разбиване на J

Пораждат стандартно разбиване $\{\Pi_i = I_i \times J_i\}_{i=1}^n$ на Π и на всяко Π_i

D Множеството K се нарича **КЛЕТЪЧНО МНОЖЕСТВО**, ако $\exists$ разбиване от клетки за K, т.е.

$\{\Pi_i\}_{i=1}^k : \Pi_i \cap \Pi_j = \emptyset,\ i \neq j$ и $K = \bigcup_{i=1}^k \Pi_i \Rightarrow m(K) = \sum_{i=1}^k m(\Pi_i)$

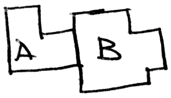


Тв Мярката на клетъчното множество K не зависи от представянето на K като обединение на клетки.

Свойства на клетъчни множества:

① Ако A, B - клетъчни множества, $A \cap B = \emptyset \Rightarrow$

$\Rightarrow$ 1) $A \cup B$ - клетъчно множество

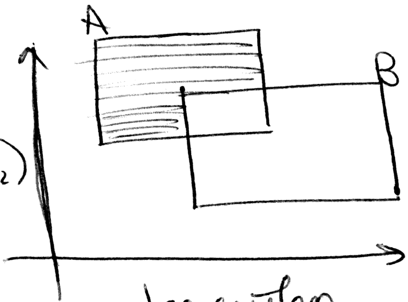


2) $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$

② A и B - клетъчни множества $\Rightarrow A \cap B$ е клетъчно множество.

③ Ако A и B са клетъчни множества, $A \setminus B$ е клетъчно множество.

Доказателство:



1 сл.) A и B - клетки:

$$A \setminus B = (I_1 \setminus J_1) \times I_2 \cup (I_1 \cap J_1) \times (I_2 \setminus J_2)$$

$\Rightarrow$ клетъчно множество

2 сл.) A - клетка; B - клетъчно множество

$\Rightarrow B = \bigcup_{i=1}^{n} \Pi_i$; $\Pi_i \cap \Pi_j = \emptyset$; $i \neq j$; $i, j = \overline{1, n}$

$$B \setminus A = \left(\bigcup_{i=1}^{n} \Pi_i\right) \setminus A = \bigcup_{i=1}^{n} (\Pi_i \setminus A) \Rightarrow \text{клетъчни множества}$$

3 сл.) A, B - клетъчни множества

$$A \setminus B = A \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} \Pi_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} \underbrace{(A \setminus \Pi_i)}_{\text{кл. множества}}$$

④ $A_1, \dots A_n$ - клетъчни множества $\Rightarrow A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ - клетъчно множество

При това $m(A) \leq \sum_{i=1}^{n} m(A_i)$.

⑤ A, B - клетъчни множества $\Rightarrow A \cup B$ - клетъчно множество.

При това $m(A \cup B) = m(A) + m(B \setminus A)$.

Следствие: Ако $A \subset B$ - клетъчни множества $m(A) \leq m(B)$

D $G \subset \mathbb{R}^2$. Казваме, че G е измеримо по Жордан, ако $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ k, K$ - клетъчни множества: 1) $k \subset G \subset K$

2) $m(K) - m(k) < \varepsilon$

$\boxed{D}$ Нека $G \subset \mathbb{R}^2$ е измеримо по Жордан. МЯРКА НА ЖОРДАН на G се нарича такова число P:

за $\forall k, K$ - клетъчни множества: $k \subset G \subset K \Rightarrow m(k) \leq P \leq m(K)$.

$\boxed{T}$ Ако множество G е измеримо по Жордан, то G има мярка $m(G)$. При това $m(G) = \sup\limits_{k \subset G} m(k) = \inf\limits_{K \supset G} m(K)$.

Доказателство:

$$\left.\begin{array}{l} A = \{k : k \subset G\} \\ B = \{K : K \supset G\} \end{array}\right\} \Rightarrow \forall k \in A, K \in B \Rightarrow k \subset G \subset K \Rightarrow m(k) \leq m(K) \quad \forall k \in A.$$

$\Rightarrow \{m(k) : k \in A\}$ е ограничено отгоре $\Rightarrow \exists \sup\limits_{k \in A} m(k) \leq m(K) \Rightarrow$

$\Rightarrow \{m(K) : K \in B\}$ е ограничено отдолу $\Rightarrow \exists \inf\limits_{K \in B} m(K) \geq \sup\limits_{k \in A} m(k)$

$$m(k) \leq \sup_{k \in A} m(k) \leq \inf_{K \in A} m(K) \leq m(K)$$

G - измеримо $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists k_\varepsilon, K_\varepsilon$: 1) $k_\varepsilon \subset G \subset K_\varepsilon$
2) $m(K_\varepsilon) - m(k_\varepsilon) < \varepsilon$

$0 \leq \inf\limits_{K \in B} m(K) - \sup\limits_{k \in A} m(k) \leq m(K_\varepsilon) - m(k_\varepsilon) < \varepsilon$ за $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \inf\limits_{K \in B} m(K) = \sup\limits_{k \in A} m(k)$.

$\boxed{T}$ КРИТЕРИЙ ЗА ИЗМЕРИМОСТ

Множеството $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ е измеримо по Жордан $\Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists$ измерими по Жордан множества A и B:

1) $A \subset \Omega \subset B$

2) $m(B) - m(A) < \varepsilon$

Доказателство:

($\Rightarrow$) Ако Ω е измеримо по Жордан $\Rightarrow$ изпълнено, т.к. клетъчните множества са измерими по Жордан.

($\Leftarrow$) Нека $\forall \varepsilon > 0 \ \exists A, B$ - измерими по Жордан: 1) $A \subset \Omega \subset B$
2) $m(B) - m(A) < \varepsilon$

A - измеримо по Жордан $\Rightarrow m(A) = \sup\limits_{k \subset A} m(k) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\varepsilon}{3} \ \exists k_\varepsilon \subset A : m(A) - \varepsilon/3 < m(k_\varepsilon)$

B - измеримо по Жордан $\Rightarrow m(B) = \inf\limits_{K \supset B} m(K_\varepsilon) \Rightarrow \frac{\varepsilon}{3} > 0\ \exists K_\varepsilon \supset B:$

$m(K_\varepsilon) < m(B) + \frac{\varepsilon}{3}$

$\Rightarrow k_\varepsilon \subset A \subset \Omega \subset B \subset K_\varepsilon \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$

$$m(K_\varepsilon) - m(k_\varepsilon) < m(B) + \frac{\varepsilon}{3} - \left(m(A) - \frac{\varepsilon}{3}\right) = m(B) - m(A) + \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

$\Rightarrow \Omega$ е измеримо по Жордан.

$\boxed{D}$ Множество $E \subset \mathbb{R}^2$ се нарича **множество с Жорданова мярка нула**, ако: $\forall \varepsilon > 0\ \exists$ клетъчно множество K: 1) $E \subset K$

2) $m(K) < \varepsilon$.

Свойства:

① Ако $E \subset \mathbb{R}^2$ е множество с Жорданова мярка 0, то E е измеримо по Жордан.

Доказателство:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists K \supset E: m(K) < \varepsilon \Rightarrow k = \emptyset \Rightarrow$ 1) $k \subset E \subset K$

2) $\underbrace{m(K) - m(k)}_{m(K)} < \varepsilon$

$\Rightarrow E$ е измеримо по Жордан.

② Ако $E \subset \mathbb{R}^2$ е множество с Жорданова мярка 0, то $\forall F \subset E$ е също множество с Жорданова мярка 0.

③ $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^2$ - множества с Жорданова мярка 0 $\Rightarrow$

$\Rightarrow E_1 \cup E_2$ е множество с Жорданова мярка 0.

Док-во:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists K_1, K_2$: 1) $K_1 \supset E_1$; $K_2 \supset E_2$

2) $m(K_1) < \varepsilon/2$; $m(K_2) < \varepsilon/2$

$\Rightarrow K_1 \cup K_2$ - клетъчно множество $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 1) $E_1 \cup E_2 \subset K_1 \cup K_2$

2) $m(K_1 \cup K_2) \leq m(K_1) + m(K_2) < \varepsilon$.

$\Rightarrow E_1 \cup E_2$ е множество с Жорданова мярка 0.

4. Ако E_1 и E_2 са множества с Жорданова мярка $0 \Rightarrow E_1 \cap E_2$ и $E_2 \setminus E_1$ $(E_1 \setminus E_2)$ са множества с Жорданова мярка 0.

Доказателство:

От 3. $\Rightarrow E_1 \cup E_2$ е множество с Жорданова мярка 0.

$E_1 \cap E_2 \subset E_1 \cup E_2$ и $E_2 \setminus E_1 \subset E_1 \cup E_2 \Rightarrow$ от 2. $E_1 \cap E_2$ и $E_2 \setminus E_1$ са множества с Жорданова мярка 0.

D. Нека $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати върху $[a,b]$ и $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a,b]$. Множество $D = \{(x,y) \in [a,b] \times [f(x), g(x)]\}$ се нарича КРИВОЛИНЕЕН ТРАПЕЦ.

T. КРИТЕРИЙ ЗА ИЗМЕРИМОСТ

Множеството $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ е измеримо по Жордан $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ 1) Ω е ограничено

2) $\partial\Omega$ е множество с Жорданова мярка 0.

Доказателство:

$\Rightarrow$ Нека Ω е измеримо по Жордан множество $\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists A, B$ - клетъчни множества: 1) $A \subset \Omega \subset B$

2) $m(B) - m(A) < \varepsilon$

$\Omega \subset B \Rightarrow \Omega$ - ограничено

Разглеждаме $A^\circ \subset A \subset \bar{A}$ и $B^\circ \subset B \subset \bar{B}$

$$A^\circ \subset A \subset \Omega \subset B \subset \bar{B}$$

$$m(\bar{B}) - m(A^\circ) = m(B) - m(A) < \varepsilon$$

1) $\partial \subset \bar{B} \setminus A^\circ$ - клетъчно множество

2) $m(\bar{B} \setminus A^\circ) < \varepsilon$

$\Big\}$ $\partial\Omega$ е множество с Жорданова мярка 0.

$\Leftarrow$ Нека Ω е ограничено и $\partial\Omega$ е с Жорданова мярка 0.

Ω - ограничено $\Rightarrow \exists$ Затворено клетъчно множество Π: $\Omega \subset \Pi$

$\partial\Omega$ е множество с Жорданова мярка $0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists$ кл. мн-во A: $\partial\Omega \subset A$ и $m(A) < \varepsilon$

$\Pi \setminus A$ - клетъчно множество $\Rightarrow \Pi \setminus A = \bigcup_{i=1}^{N} \Pi_i$ - обединение от клетки: Π_i: $\Pi_i \cap \Pi_j = \emptyset$, $i \neq j$, $i,j = \overline{1,N}$

$B = \bigcup_{\Pi_i \subset \Omega} \Pi_i$ - клетъчно множество $\rightarrow C = B \cup A \Rightarrow$

$\Rightarrow$ 1) $B \subset \Omega \subset C$

2) $m(C) - m(B) = m(A) < \varepsilon \Rightarrow \Omega$ е измеримо по Жордан

Свойства:

1. Ω_1 и Ω_2 - измерими по Жордан $\Rightarrow$ $\Omega_1 \cup \Omega_2$, $\Omega_1 \cap \Omega_2$ и $\Omega_1 \setminus \Omega_2$ са измерими по Жордан.

Доказателство:

Ω_1 и Ω_2 - измерими по Жордан $\Rightarrow$ Ω_1 и Ω_2 са ограничени и $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_2$ са множества с Жорданова мярка 0.

$\Rightarrow$ $\Omega_1 \cup \Omega_2$ - ограничено, и $\partial(\Omega_1 \cup \Omega_2)$ - множество с Жорданова мярка 0 $\Rightarrow$ $\Omega_1 \cup \Omega_2$ - измеримо по Жордан.

2. Ω_1 и Ω_2 - измерими по Жордан $\Rightarrow$

1) $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset \Rightarrow m(\Omega_1 \cup \Omega_2) = m(\Omega_1) + m(\Omega_2)$

2) иначе $\Rightarrow m(\Omega_1 \cup \Omega_2) \leq m(\Omega_1) + m(\Omega_2)$