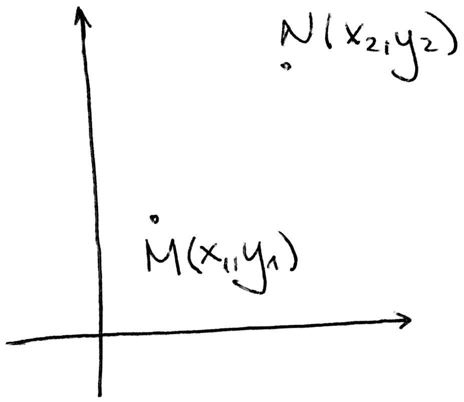
8. Пространство $\mathbb{R}^2$ – метрика, отворени и затворени множества, компактни множества, сходящи редици



$$\to |MN| = \rho(M,N) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

РАЗСТОЯНИЕ МЕЖДУ M и N

Свойства на разстоянието:

1) $\rho(M,N)=0 \Leftrightarrow M \equiv N$
2) $\rho(M,N) \geq 0$
3) $\rho(M,N) = \rho(N,M)$
4) $\rho(M,N) \leq \rho(M,Z) + \rho(N,Z)$

$\boxed{D}$ $M_0 \in \mathbb{R}^2, \delta > 0$

$B_\delta(M_0) = \{M \in \mathbb{R}^2, \rho(M_0, M) < \delta\}$

↳ δ-околност на M_0

$S_\delta(M_0) = \{M \in \mathbb{R}^2 : \rho(M_0, M) = \delta\}$

↳ сфера с център M_0 и радиус δ

$\boxed{D}$ $X \subset \mathbb{R}^2$ и $x_0 \in X$. Казваме, че x_0 е ВЪТРЕШНА ЗА X, ако $\exists \delta > 0 : B_\delta(x_0) \subset X$

$\boxed{D}$ Множество $X \subset \mathbb{R}^2$ се нарича ОТВОРЕНО, ако $\forall x \in X$ е вътрешна точка.

Свойства на отворените множества:

1) $\mathbb{R}^2$ и $\varnothing$ са отворени множества

2) $\{E_\alpha\}_{\alpha\in A}$ – фамилия от отворени множества $\Rightarrow$

$\Rightarrow \bigcup\limits_{\alpha\in A} E_\alpha$ е отворено множество

Доказателство:

$\{E_\alpha\}_{\alpha\in A}$ – фамилия от отворени множества

$\forall M \in \bigcup\limits_{\alpha\in A} E_\alpha \Rightarrow \exists \alpha_0 \in A : M \in E_{\alpha_0} \Rightarrow \exists B_\delta(M) : B_\delta(M) \subset E_\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow B_\delta(M) \subset \bigcup\limits_{\alpha\in A} E_\alpha \Rightarrow \bigcup\limits_{\alpha\in A} E_\alpha$ – отворено

3) $\{E_k\}_{k=1}^{n}$ – крайна фамилия от отворени множества

$\Rightarrow \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} E_k$ е отворено множество

Доказателство:

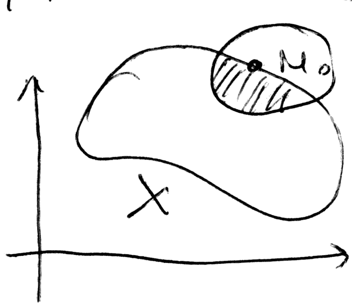
$x_0 \in \bigcap\limits_{k=1}^{n} E_k \Rightarrow \forall k = \overline{1,n} \Rightarrow x_0 \in E_k \Rightarrow \forall k = \overline{1,n}\ \exists \delta_k > 0 : B_{\delta_k}(x_0) \subset E_k \Rightarrow$

$\Rightarrow \delta_0 = \min\{\delta_k : k = \overline{1,n}\} \Rightarrow B_{\delta_0}(x_0) \subset B_{\delta_k}(x_0)\ \forall k = \overline{1,n} \Rightarrow$

$\Rightarrow B_{\delta_0}(x_0) \subset E_k\ \forall k = \overline{1,n} \Rightarrow B_{\delta_0}(x_0) \subset \bigcap\limits_{k=1}^{n} E_k \Rightarrow x_0$ е вътрешна

за $\bigcap\limits_{k=1}^{n} E_k \Rightarrow \bigcap\limits_{k=1}^{n} E_k$ е отворено множество.

$\boxed{D}$ $X \subset \mathbb{R}^2$, $M_0 \in \mathbb{R}^2$. Казваме, че M_0 е **точка на сгъстяване** на X, ако $\forall \delta > 0\ \exists M \in X : M \in B_\delta(M_0)$, т.е. $B_\delta(M_0) \cap (X \setminus \{M_0\}) \neq \varnothing$



$\boxed{D}$ Казваме, че множеството $X \subset \mathbb{R}^2$ е ЗАТВОРЕНО, ако X съдържа всичките си точки на сгъстяване.

$\boxed{Тв}$ $X \subset \mathbb{R}^2$ е затворено $\Leftrightarrow$ $\mathbb{R}^2 \setminus X$ е отворено

Доказателство:

$\Rightarrow$) Нека X е затворено. Разглеждаме $\mathbb{R}^2 \setminus X \ni M \Rightarrow$ $\Rightarrow \exists B_\delta(M) \cap X = \emptyset$

$\Rightarrow M$ не е точка на сгъстяване на $X \Rightarrow \forall M \in \mathbb{R}^2 \setminus X$

$\Rightarrow \exists B_\delta(M) \subset \mathbb{R}^2 \setminus X \Rightarrow M$ е вътрешна за $\mathbb{R}^2 \setminus X$ $\Rightarrow$ е вътрешна $\Rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus X$ е отворено множество.

$\Leftarrow$) Нека $\mathbb{R}^2 \setminus X$ е отворено. Нека M_0 е точка на сгъстяване на X. $\Rightarrow M_0 \notin \mathbb{R}^2 \setminus X \Rightarrow M_0 \in X \Rightarrow X$ съдържа всичките си точки на сгъстяване $\Rightarrow$ по дефиниция X е затворено.

<u>Свойства на затворените множества:</u>

1) $\mathbb{R}^2$ и $\emptyset$ са затворени множества

2) Ако $\{E_\alpha\}_{\alpha \in A}$ - фамилия от затворени множества $\Rightarrow$

$\Rightarrow \bigcap\limits_{\alpha \in A} E_\alpha$ е затворено множество

3) Ако $\{E_k\}_{k=1}^{n}$ - крайна фамилия отворени множества

$\Rightarrow \bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k$ - затворено

Доказателство:

1) $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \setminus \emptyset \Rightarrow \mathbb{R}^2$ - затворено

$\emptyset = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}^2 \Rightarrow \emptyset$ - затворено

2) $\{E_\alpha\}_{\alpha \in A}$ - фамилия от затворени множества $\Rightarrow$

$\Rightarrow \{\mathbb{R}^2 \setminus E_\alpha\}_{\alpha \in A}$ - фамилия от отворени множества $\Rightarrow$

$\Rightarrow \bigcup\limits_{\alpha \in A} \{\mathbb{R}^2 \setminus E_\alpha\}$ - отворено множество

$\mathbb{R}^2 \setminus (\bigcap\limits_{\alpha \in A} E_\alpha)$ - отворено $\Rightarrow \bigcap\limits_{\alpha \in A} E_\alpha$ - затворено

3) $\{E_k\}_{k=1}^{n}$ – затворени $\Rightarrow$ $\{\mathbb{R}^2 \setminus E_k\}_{k=1}^{n}$ – отворени $\Rightarrow$

$\Rightarrow \bigcap_{k=1}^{n} (\mathbb{R}^2 \setminus E_k)$ – отворено

$\mathbb{R}^2 \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right)$ – отворено $\Rightarrow \bigcup_{k=1}^{n} E_k$ – затворено

$\boxed{D}$ Ако $X \subset \mathbb{R}^2$, множеството $\overline{X} = X \cup \{$точките на сгъстяване на $X\}$ се нарича **ЗАТВОРЕНА ОБВИВКА НА X**.

$\boxed{ТВ}$ $\overline{X}$ е затворено множество.

$\boxed{D}$ Ако $M_0 \in X$ и M_0 не е точка на сгъстяване на X, тя се нарича **ИЗОЛИРАНА**.

$\boxed{D}$ Нека $X \subset \mathbb{R}^2$ и $M_0 \in \mathbb{R}^2$. Казваме, че M_0 е **гранична / КОНТУРНА** на X, ако

$$\forall B_\delta(M_0): B_\delta(M_0) \cap X \neq \emptyset \text{ и } B_\delta(M_0) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus X) \neq \emptyset$$

$\boxed{D}$ Множество $X \subset \mathbb{R}^2$ се нарича **ОГРАНИЧЕНО**, ако

$$\exists B_\delta((0,0)): X \subset B_\delta((0,0)).$$

$\boxed{D}$ Множество $X \subset \mathbb{R}^2$ се нарича **КОМПАКТНО**, ако е ограничено и затворено.

$\boxed{D}$ Нека $\{M_n(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^2$ е безкрайна редица от точки. Казваме, че точката M_0 е **граница на редицата** $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$, ако

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N = N(\varepsilon): \forall n > N \Rightarrow \rho(M_0, M_n) < \varepsilon$$

$\boxed{T}$ $M_0(x_0, y_0) = \lim_{n\to\infty} M_n(x_n, y_n) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x_0; \lim_{n\to\infty} y_n = y_0$

Доказателство:

($\Rightarrow$) Нека $M_0(x_0, y_0) = \lim_{n\to\infty} M_n(x_n, y_n) \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists N = N(\varepsilon): \forall n > N \Rightarrow \rho(M_0, M_n) < \varepsilon$

$\varepsilon > \rho(M_0, M_n) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \geq |x - x_0|$

$\geq |y - y_0|$

аналогично за y

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N: \forall n > N \Rightarrow |x_0 - x_n| < \varepsilon \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.

$\Leftarrow$) Нека $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$.

Тогава

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n > N \Rightarrow \begin{cases} |x_0 - x| < \varepsilon/\sqrt{2} \\ |y_0 - y| < \varepsilon/\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\rho(M_0, M_n) = \sqrt{(x_0 - x_n)^2 + (y_0 - y_n)^2} < \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)^2} = \varepsilon$$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} M_n = M_0$

$\boxed{D}$ Нека $\{M_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^2$ и $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$, $n_k \in \mathbb{N}$.

Редицата $\{M_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ се нарича **ПОДРЕДИЦА** на $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$

$\boxed{D}$ Казваме, че редицата $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ е **ОГРАНИЧЕНА**, ако

$\exists \alpha > 0 : \rho((0,0), M_n) \leq \alpha$.

$\boxed{T}$ Болцано-Вайерщрас

От всяка ограничена редица от точки $\{M_n(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ можем да изберем сходяща подредица $\{M_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$

Доказателство:

Нека $\{M_n(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ - ограничена, т.е.

$\exists \alpha > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \rho((0,0), M_n) < \alpha \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha \geq \rho((0,0), (x_n, y_n)) = \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \begin{matrix} \geq |x_n| \\ \geq |y_n| \end{matrix}$$

$\Rightarrow \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ са ограничени.

$\Rightarrow$ по Т. Болцано-Вайерщрас

$\exists$ сходяща подредица $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ и $x_{n_k} \to x_0$

и сходяща подредица $\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ и $y_{n_k} \to y_0$

Тогава редицата от точки $\{M_{n_{k_s}}\}_{s=1}^{\infty}$ е сходяща подредица на $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$: $M_{n_{k_s}}(x_{n_{k_s}}, y_{n_{k_s}}) \xrightarrow[s\to\infty]{} M_0(x_0, y_0)$

$s \to \infty$

$s \to \infty$

$\boxed{D}$ Крива линия в $\mathbb{R}^2$ е множеството

$\{(\varphi(t), \psi(t)) : \varphi, \psi$ са непрекъснати в $[\alpha;\beta]\}$

$$\Updownarrow$$

$$l: \begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}, \; t\in[\alpha,\beta]$$

$\boxed{T}$ Нека $X\subset\mathbb{R}^2$.

X е компактно $\Leftrightarrow$ $\forall \{M_n\}_{n=1}^{\infty}\subset X$

$\exists \{M_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : \exists \lim\limits_{k\to\infty} M_{n_k} = M_0\in X$

Доказателство:

($\Rightarrow$) Нека X е компактно $\Rightarrow X$ е ограничено и затворено.

Нека изберем $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}\subset X$.

X - ограничено $\Rightarrow \{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ - ограничена $\Rightarrow$ по Т. Болцано-Ваерщрас $\Rightarrow \exists$ сходяща $\{M_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ и $M_0=\lim\limits_{k\to\infty} M_{n_k} \Rightarrow M_0$ е точка на сгъстяване на X.

X - затворено $\Rightarrow M_0\in X$.

($\Leftarrow$) Нека $\forall \{M_n\}_{n=1}^{\infty}\subset X, \exists \{M_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : \exists \lim\limits_{k\to\infty} M_{n_k} = M_0\in X$.

1) X - ограничено?

Допускане, че $\forall p>0 \; \exists M_p\in X : \rho((0,0), M_p) > p$

$p=n\in\mathbb{N} \Rightarrow \exists M_n\in X : \rho((0,0), M_n) > n$

$\Rightarrow \{M_n\}_{n=1}^{\infty}\subset X \Rightarrow \exists \{M_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : \lim\limits_{k\to\infty} M_{n_k} = M_0\in X \Rightarrow$

$\Rightarrow \varepsilon=1 \; \exists k_0 : \forall k>k_0 \Rightarrow \rho(M_0, M_{n_k}) < 1$

$\forall k\in\mathbb{N} \quad n_k < \rho((0,0), M_{n_k}) \leq \underbrace{\rho(M_0,(0,0))}_{\text{фиксирано}} + \rho(M_0, M_{n_k}) < \underbrace{\rho(M_0,(0,0))+1}_{\text{фиксирано}}$

$\Rightarrow$ Допускането е невалидно $\Rightarrow X$ - ограничено

2) X – затворено?

Нека M_0 е точка на сгъстяване на $X \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$

$\exists M_n \in X : M_n \neq M_0 : \rho(M_0, M_n) < 1/n \Rightarrow \{M_n\}_{n=1}^{\infty} \to M_0$

$\Rightarrow$ от условието $\Rightarrow \exists \{M_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ – сходяща; $M_{n_k} \to M_0' \in X$

$\{M_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ – подредица на $\{M_n\}_{n=1}^{\infty} \Rightarrow \{M_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \to M_0' \equiv M_0$

$\Rightarrow M_0 \in X \Rightarrow X$ е затворено

$\boxed{D}$ $l : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [\alpha, \beta]$ – крива линия

$A(x(\alpha), y(\alpha))$, $B(x(\beta), y(\beta))$ – КРАИЩА НА КРИВАТА ЛИНИЯ

$\boxed{D}$ $X \subset \mathbb{R}^2$ се нарича СВЪРЗАНО, ако $\forall A, B \in X$ $\exists$ крива линия l с краища A и B : $l \subset X$.

$\boxed{D}$ Множество $X \subset \mathbb{R}^2$ – свързано, ограничено и отворено, се нарича ОБЛАСТ.

Ако е затворено – ЗАТВОРЕНА ОБЛАСТ.