20 + Критерий за интегруемост на функция

$\boxed{D}$ Нека $f(x,y)$ е ограничена върху измеримото по Жордан множество $G\subset\mathbb{R}^2$ и $\tau=\{G_i\}_{i=1}^{N}$ – разбиване на G.

$m_i=\inf\limits_{G_i} f(x,y)$; $M_i=\sup\limits_{G_i} f(x,y)$

$$s_\tau=\sum_{i=1}^{N} m_i\cdot m(G_i);\quad S_\tau=\sum_{i=1}^{N} M_i\cdot m(G_i)$$

МАЛКА СУМА — ГОЛЯМА СУМА

НА ДАРБУ

Свойства:

① $\forall\tau=\{G_i\}_{i=1}^{N},\ \forall\xi=\{\xi_i\in G_i\}_{i=1}^{N} \Rightarrow s_\tau\le\sigma_\tau(f,\xi)\le S_\tau$

② $\tau=\{G_i\}_{i=1}^{N} \Rightarrow s_\tau=\inf\limits_{\xi}\sigma_\tau(f,\xi);\ S_\tau=\sup\limits_{\xi}\sigma_\tau(f,\xi)$

$\boxed{D}$ Нека $\tau'=\{Q_j\}_{j=1}^{T}$ и $\tau=\{G_i\}_{i=1}^{N}$. Казваме, че τ' СЛЕДВА τ, ако $\forall j=\overline{1,T}\ \exists i\in[1,N]: Q_j\subset G_i$. Записваме $\tau'\prec\tau$

③ Нека $\tau'=\{Q_j\}_{j=1}^{T}$, $\tau=\{G_i\}_{i=1}^{N}$ и $\tau'\prec\tau \Rightarrow s_\tau\le s_{\tau'}\le S_{\tau'}\le S_\tau$

Доказателство:

Т.к. $\tau'\prec\tau \Rightarrow \forall j=\overline{1,T}\ \exists i\in[1,N]: Q_j\subset G_i$

$\{Q_j : Q_j\subset G_i\}=\{Q_j^i\}_{j=1}^{T_i}$

$$\left.\begin{array}{ll} M_i=\sup\limits_{G_i} f(x,y) & i=\overline{1,N} \\ M_j^i=\sup\limits_{Q_j^i} f(x,y) & j=\overline{1,T_i},\ i=\overline{1,N} \end{array}\right\} M_j^i\le M_i$$

$\overline{M}_j=\sup\limits_{Q_j} f(x,y)\quad j=\overline{1,T}$

$$S_{\tau'}=\sum_{j=1}^{T}\overline{M}_j\cdot m(Q_j)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{T_i}M_j^i\cdot m(Q_j^i)\le\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{T_i}M_i\cdot m(Q_j^i)=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}M_i\sum_{j=1}^{T_i}m(Q_j^i)=\sum_{i=1}^{N}M_i\cdot m(G_i)=S_\tau$$

аналогично за малките

(4) Нека $\tau' = \{Q_j\}_{j=1}^{T}$, $\tau = \{G_i\}_{i=1}^{N}$ са разбивания на G.

Тогава $s_{\tau'} \leq S_\tau$

Доказателство:

$\tau'' = \{Q_j \cap G_i\} \Rightarrow \tau'' \prec \tau'$ и $\tau'' \prec \tau \Rightarrow s_{\tau'} \leq s_{\tau''} \leq S_{\tau''} \leq S_\tau$

D $\underline{I} = \sup\limits_{\tau} s_\tau$ — ДОЛЕН
$\overline{I} = \inf\limits_{\tau} S_\tau$ — ГОРЕН } ИНТЕГРАЛ НА ДАРБУ

(5) $\forall \tau = \{G_i\}_{i=1}^{N} \Rightarrow s_\tau \leq \underline{I} \leq \overline{I} \leq S_\tau$

T КРИТЕРИИ ЗА ИНТЕГРУЕМОСТ

Нека $f(x,y)$ е ограничена върху измеримото по Жордан множество $G \subset \mathbb{R}^2$.

Функцията $f(x,y)$ е интегруема върху $G \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \tau = \{G_i\}_{i=1}^{N} : \delta_\tau < \delta \Rightarrow S_\tau - s_\tau < \varepsilon$

D Нека $f(x,y)$ е дефинирана и ограничена върху $G \subset \mathbb{R}^2$. КОЛЕБАНИЕ на $f(x,y)$ върху G се нарича $\omega(f) = M - m$, където $m = \inf\limits_{G} f(x,y)$; $M = \sup\limits_{G} f(x,y)$.

Тв Колебанието на $f(x,y) = \sup\limits_{G} |f(x',y') - f(x'',y'')|$

T Критерия за интегруемост с други думи

$f(x,y)$ е интегруема върху измеримото по Жордан множество $G \subset \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \tau = \{G_i\}_{i=1}^{N} : \delta_\tau < \delta \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{N} \omega_i(f) \mu(G_i) < \varepsilon$, където $\omega_i(f) = M_i - m_i$

T СИЛЕН КРИТЕРИЙ ЗА ИНТЕГРУЕМОСТ

Ограничената функция $f(x,y)$ е интегруема върху измеримото по Жордан множество $G \subset \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \tau = \{G_i\}_{i=1}^{N} : S_\tau - s_\tau < \varepsilon$