9) Функции на две променливи. Граници и непрекъснатост. Непрекъснати функции върху компактни множества.

$\boxed{D}$ $X \subset \mathbb{R}^2$. **Функция**, дефинирана върху X, е правило f – такова, че $\forall M(x,y) \in X \xrightarrow{f} z \in \mathbb{R}$

$\boxed{D}$ $X = D(f)$ – **дефиниционно множество**

$R(f) = \{f(x,y) : (x,y) \in D(f)\}$ – **множество от стойности**

$\boxed{D}$ Нека $z = f(x,y)$ е дефинирана върху $X \subset \mathbb{R}^2$. Графика на f наричаме множеството от наредени тройки числа $(x, y, f(x,y))$, където $(x,y) \in D(f)$.

$\boxed{D}$ Всяко отворено U, съдържащо точката $(x_0, y_0) = M$ $\Rightarrow$ $U(x_0,y_0) = U(M)$, се нарича **околност** на $M(x_0,y_0)$.

Пробита околност – $\mathring{U}(x_0,y_0) = \mathring{U}(M) = U(x_0,y_0) \setminus \{(x_0,y_0)\} = U(M) \setminus \{M\}$

$\boxed{D}$ Нека $z = f(M) = f(x,y)$ е дефинирана върху $\mathring{U}(x_0,y_0)$.

Казваме, че A е **граница** на $f(x,y)$, ако:

(Коши) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall (x,y) \in \mathring{U}(x_0,y_0) : \rho((x,y),(x_0,y_0)) < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x,y) - A| < \varepsilon$

(Хайне) $\forall (x_1,y_1), (x_2,y_2) \dots (x_n,y_n) \dots \to (x_0,y_0); (x_i,y_i) \in \mathring{U}(x_0,y_0) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x_1,y_1), f(x_2,y_2) \dots f(x_n,y_n) \dots \to f(x_0,y_0)$.

Свойства:

$\boxed{Тв}$ $f(x,y), g(x,y), h(x,y)$ – дефинирани върху $\mathring{U}(x_0,y_0)$

1) $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A \Rightarrow$ единствена

2) $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A \Rightarrow \exists \mathring{B}_\delta(x_0,y_0) : f(x,y)$ е ограничена върху B_δ, т.е. $\exists p > 0 : \forall (x,y) \in \mathring{B}_\delta(x_0,y_0) \Rightarrow |f(x,y)| < p$

3) Ако $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A\neq 0 \Rightarrow \exists \mathring{B}_\delta(x_0,y_0): f(x,y)$ се запазва знака:

1) $A>0 \Rightarrow \exists \mathring{B}_\delta(x_0,y_0): \forall (x,y)\in \mathring{B}_\delta(x_0,y_0) \Rightarrow f(x,y)>0$

2) $A<0 \Rightarrow \exists \mathring{B}_\delta(x_0,y_0): \forall (x,y)\in \mathring{B}_\delta(x_0,y_0) \Rightarrow f(x,y)<0$

4) Ако $f(x,y)\geq g(x,y)$ и $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$ и $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)=B \Rightarrow$

$\Rightarrow A\geq B$

5) $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$ и $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x)=B$ и $A\gtrsim B$

$\Rightarrow \exists \mathring{B}_\delta(x_0,y_0): \forall (x,y)\in \mathring{B}_\delta(x_0,y_0) \Rightarrow f(x,y) \gtrsim g(x,y)$

6) Ако $f(x,y)\leq h(x,y)\leq g(x,y)$ за $\forall (x,y)\in \mathring{U}(x_0,y_0)$ и

$\exists \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)=A \Rightarrow \exists \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y)=A$

7) Ако $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$ и $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)=B \Rightarrow$

$\exists \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left(f(x,y) \pm \cdot : g(x,y)\right) = A \pm \cdot : B$

$\boxed{D}$ Нека $z=f(x,y)$ е дефинирана върху $E\subset\mathbb{R}^2$ и (x_0,y_0) е точка на сгъстяване на E. Казваме, че $A=\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in E}} f(x,y)$, ако

$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta=\delta(\varepsilon)>0: \forall (x,y)\in E, (x,y)\neq(x_0,y_0): \rho((x,y),(x_0,y_0))<\delta \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x,y)-A|<\varepsilon.$

$\boxed{D}$ Нека $z=f(x,y)$ е дефинирана върху правоъгълника

$\mathring{\Pi}=[a,b]\times[c,d]=\{(x,y): x\in[a,b], y\in[c,d]\}\setminus\{(x_0,y_0)\}$

$\forall x\in[a,b]\setminus\{x_0\}\ \exists \lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=g(x)$. Нека $\exists \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A \to$

$\to$ ДВОЙНА / ПОВТОРНА ГРАНИЦА на $f(x,y)$ при $(x,y)\to(x_0,y_0)$.

$A=\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$.

Аналогично се дефинира и другата повторна граница.

$\boxed{T}$ Нека $f(x,y)$ е дефинирана върху $\Pi = [a,b] \times [c,d] \setminus \{(x_0,y_0)\}$

Ако $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ и $\forall x \in [a,b] \setminus \{x_0\}$ $\exists \lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$,

$\forall y \in [c,d] \setminus \{y_0\}$ $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x,y) \Rightarrow$ съществуват повторните граници и $\lim\limits_{x\to x_0} \lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) = \lim\limits_{y\to y_0} \lim\limits_{x\to x_0} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$

$\boxed{D}$ Нека $f(x,y)$ е дефинирана върху $U(x_0,y_0)$. Казваме, че $f(x,y)$ е НЕПРЕКЪСНАТА в (x_0,y_0), ако $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$, т.е.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: \forall (x,y) \in U(x_0,y_0): \rho((x,y),(x_0,y_0)) < \delta \Rightarrow |f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon$

$\boxed{D}$ Ако $f(x,y)$ е дефинирана върху $E \subseteq \mathbb{R}^2$ и $(x_0,y_0) \in E$. Казваме, че $f(x,y)$ е НЕПРЕКЪСНАТА в (x_0,y_0) ПО МНОЖЕСТВОТО E, ако $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in E}} f(x,y) = f(x_0,y_0)$, тоест

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: \forall (x,y) \in E: \rho((x,y),(x_0,y_0)) < \delta \Rightarrow |f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon$

Свойства на непрекъснати функции:

$\boxed{T}$ Нека $f(x,y)$ и $g(x,y)$ са дефинирани върху $U(x_0,y_0)$ и непрекъснати в (x_0,y_0). Тогава:

1) $f(x,y)$ – ограничена в достатъчно малка околност $B_\delta(x_0,y_0)$

2) Ако $f(x_0,y_0) \neq 0 \Rightarrow \exists$ достатъчно малка околност $B_\delta(x_0,y_0)$: $f(x,y) > 0$ върху тази околност.

~~3)~~ 3÷6) $(f \overset{\pm}{\underset{:}{\cdot}} g)(x,y) = f(x,y) \overset{\pm}{\underset{:}{\cdot}} g(x,y)$ – непрекъснати и

$\hookrightarrow g(x,y) \neq 0$

7) Ако $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ – дефинирани в $U(u_0,v_0)$ и непрекъснати в (u_0,v_0) и $x(u_0,v_0) = x_0$, $y(u_0,v_0) = y_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow F(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$ – непрекъсната в (u_0,v_0).

8) Ако $g(x)$ е дефинирана в $U(x_0)$ и непрекъсната в x_0

$f(x,y) = g(x)$ върху $U(x_0) \times \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x,y)$ е непрекъсната във $\forall$ точка (x_0,y)

$\boxed{T_1}$ Нека функцията $f(x,y)$ е непрекъсната върху компактното множество X. Тогава $f(x,y)$ е ограничена върху X, т.е.
$\exists \alpha>0: \forall (x,y)\in X \Rightarrow |f(x,y)|\leq \alpha.$

$\boxed{T_2}$ Ако $f(x,y)$ е непрекъсната върху компактното множество $X\subset\mathbb{R}^2$, тогава $\exists (x_0,y_0),(x_1,y_1)\in X:$

$$\forall (x,y)\in X \Rightarrow \underbrace{f(x_0,y_0)}_{\min\limits_{(x,y)\in X} f(x,y)} \leq f(x,y) \leq \underbrace{f(x_1,y_1)}_{\max\limits_{(x,y)\in X} f(x,y)}$$

$\boxed{T_3}$ Ако $f(x,y)$ е непрекъсната върху област $X\subset\mathbb{R}^2$ и $\exists (x_1,y_1),(x_2,y_2)\in X: f(x_1,y_1)\cdot f(x_2,y_2)<0$, то $\exists (x_0,y_0)\in X:$
$f(x_0,y_0)=0.$

Доказателство:

Т.к. $A,B\in X$ - области $\Rightarrow \exists$ непрекъсната линия $l: \begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t)\end{cases}, t\in[a,b]$,

такава че $(x(a),y(a))=A$ и $(x(b),y(b))=B \Rightarrow$

$\Rightarrow F(t)=f(x(t),y(t))$ - дефинирана върху $[a,b]$ и непрекъсната върху $[a,b]$.

$F(b)\cdot F(a)=f(x(a),y(a))\cdot f(x(b),y(b))=f(A)\cdot f(B)<0$

$\Rightarrow \exists t_0\in(a,b): F(t_0)=0$, т.е. $x_0=x(t_0)$, $y_0=y(t_0) \Rightarrow$

$\Rightarrow C(x_0,y_0)\in X: f(x_0,y_0)=0.$

$\boxed{D}$ Функцията $f(x,y)$ е НЕПРЕКЪСНАТА ВЪРХУ $X\subset\mathbb{R}^2$, ако е непрекъсната във всяка точка $(x,y)\in X$, т.е.
$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\underline{\delta(\varepsilon,(x,y))}>0: \forall(x',y')\in X: \rho((x',y'),(x,y))<\delta \Rightarrow |f(x',y')-f(x,y)|<\varepsilon$

$\boxed{D}$ $\forall(x,y)\in X\ \ \forall\varepsilon>0\ \exists\underline{\delta=\delta(\varepsilon)}>0: \forall(x',y')\in X: \rho((x',y'),(x,y))<\delta$
$\Rightarrow |f(x',y')-f(x,y)|<\varepsilon \Rightarrow f(x,y)$ е РАВНОМЕРНО НЕПРЕКЪСНАТА в/у X

$\boxed{T}$ Ако $f(x,y)$ е непрекъсната върху компактно множество $X\subset\mathbb{R}^2$, то тя е равномерно непрекъсната върху X.