4. Абсолютно и условно сходящи се редове

D 1) БЧРед $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ се нарича **абсолютно сходящ**, ако е сходящ редът $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

2) БЧРед $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ се нарича **условно сходящ**, ако е сходящ, но не е абсолютно сходящ.

T Ако БЧРед е абсолютно сходящ, то той е сходящ.

Доказателство:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - абсолютно сходящ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ - сходящ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ по критерия на Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=1}^{p} |a_{n+k}| < \varepsilon$$

$$\left| \sum_{k=1}^{p} a_{n+k} \right| \leq \sum_{k=1}^{p} |a_{n+k}| < \varepsilon \Rightarrow \text{съгласно критерия на Коши} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходящ

T Ако $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ са абсолютно сходящи, то:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$, $\lambda \in \mathbb{R}$, е абсолютно сходящ;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ е абсолютно сходящ;

Доказателство:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - абсолютно сходящ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ - сходящ

$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda| |a_n| = |\lambda| \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

$\Big\}$ $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda a_n|$ - сходящ

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ - абсолютно сходящ

2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ - абсолютно сходящи $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ и $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ - сходящи

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n|$ - сходящ

$0 < |a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n|$ - $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n| \sim \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n|}_{\text{сходящ}} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n|$ - сходящ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ - абсолютно сходящ

$\boxed{\text{T}}$ Ако $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е абсолютно сходящ и редицата $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (a_n b_n)$ е абсолютно сходящ.

Доказателство:

Редицата $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена $\Rightarrow \exists M > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow |b_n| < M$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е абсолютно сходящ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ - сходящ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} M|a_n|$ - сходящ

$\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 \leq |a_n b_n| \leq M|a_n|$ - сходящ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ по признака за сравнение $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ - сходящ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ - абсолютно сходящ.

$\boxed{\text{T}}$ Нека $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е абсолютно сходящ и $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ е биекция. Тогава редът $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ е абсолютно сходящ и ако $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, то редът $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = S$

Доказателство:

Нека $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е абсолютно сходящ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ - сходящ

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k,\ S_{\pi(n)} = \sum_{k=1}^{n} a_{\pi(k)},\ S_n^{|\cdot|} = \sum_{k=1}^{n} |a_k|,\ S_{\pi(n)}^{|\cdot|} = \sum_{k=1}^{n} |a_{\pi(k)}|$

$\{S_n^{|\cdot|}\}_{n=1}^{\infty}$ - ограничена $\Rightarrow \exists M > 0 : \forall n \in \mathbb{N} : 0 \le S_n^{|\cdot|} \le M.$

За произволно $n \Rightarrow S_{\pi(n)}^{|\cdot|} = \sum_{k=1}^{n} |a_{\pi(k)}| \rightarrow m_n = \max_{k=1}^{n} \pi(k) \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{\pi(n)}^{|\cdot|} = \sum_{k=1}^{n} |a_{\pi(k)}| \le \sum_{k=1}^{m_n} |a_k| = S_{m_n} \le M \Rightarrow$

$\Rightarrow \{S_{\pi(n)}^{|\cdot|}\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_{\pi(n)}|$ е сходящ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ е абсолютно сходящ.

Фиксираме $\varepsilon > 0$

$\frac{\varepsilon}{2} > 0 \quad \exists N_1 : \forall n \ge N_1 \Rightarrow |S - S_n| < \varepsilon/2 \qquad (1)$

$\qquad \exists N_2 : \forall n \ge N_2,\ \forall p \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=1}^{p} |a_{n+k}| < \varepsilon/2 \quad (2)$

Нека $N = \max\{N_1, N_2\}$

$\Rightarrow \forall n \ge N, \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow |S - S_n| < \varepsilon/2$ и $\sum_{k=1}^{p} |a_{n+k}| < \varepsilon/2$

Нека $\forall k \in \overline{1,N} : m_k \in \mathbb{N} : \pi(m_k) = k$

$\tilde{N} = \max_{k=1}^{N} m_k$

Нека за произволно $n > \tilde{N} \ge N$ разглеждаме

$|S - S_{\pi(\tilde{N})}| = |(S - S_N) + (S_N - S_{\pi(\tilde{N})})| \le |S - S_N| + |S_N - S_{\pi(\tilde{N})}| <$

$< \varepsilon/2 + |S_{\pi(\tilde{N})} - S_N|$ $\qquad E = \{\overline{1,\tilde{N}}\} \setminus \{m_1, \dots, m_N\}$

$S_{\pi(\tilde{N})} - S_N = \sum_{k=1}^{\tilde{N}} a_{\pi(k)} - \sum_{k=1}^{N} a_k = \sum_{k=1}^{\tilde{N}} a_{\pi(k)} - \sum_{k=1}^{N} a_{\pi(m_k)} = \sum_{k \in E} a_{\pi(k)}$ $\quad \{1, \dots N+p\} \subset E$

$\max_{k \in E} \pi(k) = N + p,\ p \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \varepsilon/2 + |S_{\pi(\tilde{N})} - S_N| = \varepsilon/2 + \left|\sum_{k \in E} a_{\pi(k)}\right| \le \varepsilon/2 + \sum_{k \in E} |a_{\pi(k)}| \le$

$\le \varepsilon/2 + \sum_{k=1}^{p} |a_{N+k}| < \varepsilon \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = S$

$\boxed{\text{Т}}$ Нека $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ са абсолютно сходящи и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$

и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = S' \Rightarrow \sum_{n,m=1}^{\infty} a_n . b_m$ е абсолютно сходящ и

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} a_n . b_m = S . S'$$

a_1b_1	a_1b_2	a_1b_3	$\dots$
a_2b_1	a_2b_2	a_2b_3	$\dots$
a_3b_1	a_3b_2	a_3b_3	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

$(*)\ a_1b_1 + (a_2b_1 + a_2b_2 + a_1b_2) + (a_3b_1 + a_3b_2 + a_3b_3 + a_2b_3 + a_1b_3) + \dots$

$\hat{S}_n$ – n-та парциална сума на $(*)$

$\hat{S}_{n^2} = S_n . S'_n$

$|a_1b_1| + |a_2b_1| + |a_2b_2| + |a_1b_2| + \dots$

$\hat{S}''_n$ – n-та парциална сума на

$\hat{S}^{1.1}_{n^2} = S^{1.1}_n . S^{1.1}_n$

Д.к. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – абсолютно сходящи $\Rightarrow \{S^{1.1}_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{S^{1.1}_n\}_{n=1}^{\infty}$

са ограничени и нека $M > 0$: $0 \leq S^{1.1}_n \leq M$
$0 \leq S^{1.11}_n \leq M \Rightarrow$

$\Rightarrow \hat{S}^{1.1}_{n^2} = S^{1.1}_n . S^{1.1}_n \leq M^2$

$\forall n \Rightarrow \hat{S}^{1.1}_n \leq \hat{S}^{1.1}_{n^2} \leq M^2 \Rightarrow \{S^{1.1}_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ограничена $\Rightarrow$

$\Rightarrow |a_1b_1| + |a_2b_1| + |a_2b_2| + |a_1b_2| + \dots$ е сходящ $\Rightarrow$

$\Rightarrow a_1b_1 + a_2b_1 + a_2b_2 + a_1b_2 + \dots$ е абсолютно сходящ

$\hat{S} = \lim_{n\to\infty} \hat{S}_n$ – сходяща $\Rightarrow \forall$ нейна подредица има същата граница

$\Rightarrow \hat{S} = \lim_{n\to\infty} \hat{S}_{n^2} = \lim_{n\to\infty} S_n . S'_n = \lim_{n\to\infty} S_n \lim_{n\to\infty} S'_n = S . S'$