11 Диференциране на сложна функция. Инвариантност на форма на първия диференциал. Геометричен смисъл на диференциал

Т Нека функцията $z=f(x,y)$ е дефинирана в $U(x_0,y_0)$ и диференцируема в (x_0,y_0). Нека $x=x(t)$, $y=y(t)$ – дефинирани върху $U(t_0)$ и такива, че за $\forall t\in U(t_0) \Rightarrow (x(t),y(t))\in U(x_0,y_0)$; $x(t_0)=x_0$, $y_0=y(t_0)$; $x(t)$ и $y(t)$ са диференцируеми в t_0. Тогава сложната функция $z(t)=f(x(t),y(t))$, $t\in U(t_0)$ е диференцируема в t_0. При това

$$\frac{dz(t_0)}{dt}=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\cdot\frac{dx(t_0)}{dt}+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\cdot\frac{dy(t_0)}{dt}$$

Т Нека функцията $z=f(x,y)$ е дефинирана в $U(x_0,y_0)$ и диференцируема в (x_0,y_0) и нека функциите $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ са дефинирани в $U(u_0,v_0)$ и такива, че $x(u_0,v_0)=x_0$ и $y(u_0,v_0)=y_0$, $\forall (u,v)\in U(u_0,v_0) \rightarrow (x(u,v),y(u,v))\in U(x_0,y_0)$ и диференцируеми в (u_0,v_0). Нека $z(u,v)=f(x(u,v),y(u,v))$. Тогава $z(u,v)$ е диференцируема в (u_0,v_0). При това:

$$\frac{\partial z(u_0,v_0)}{\partial u}=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\cdot\frac{\partial x(u_0,v_0)}{\partial u}+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\cdot\frac{\partial y(u_0,v_0)}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z(u_0,v_0)}{\partial v}=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\cdot\frac{\partial x(u_0,v_0)}{\partial v}+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\cdot\frac{\partial y(u_0,v_0)}{\partial v}$$

$$dz(u_0,v_0)=\frac{\partial z(u_0,v_0)}{\partial u}du+\frac{\partial z(u_0,v_0)}{\partial v}dv$$

Инвариантност на формата на първия диференциал.

$$z=f(x,y);\ x=x(u,v);\ y=y(u,v) \longrightarrow z(u,v)=f(x(u,v),y(u,v))$$

$$dz(u,v)=(z'_x\cdot x'_u+z'_y\cdot y'_u)du+(z'_x\cdot x'_v+z'_y\cdot y'_v)dv=$$

$$=z'_x(x'_u du+x'_v dv)+z'_y(y'_u\cdot du+y'_v\cdot dv)=$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

$\Updownarrow \rightarrow$ ИНВАРИАНТНОСТ НА ФОРМАТА НА ПЪРВИЯ ДИФЕРЕНЦИАЛ

$$dz(u,v) = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial z}{dv} dv$$

$\boxed{T}$ Нека f и g са функции на две променливи.

Тогава: $d(f \pm g) = df \pm dg$

$d(f.g) = fdg + gdf$

$d(f/g) = \dfrac{gdf - fdg}{g^2}$

$\boxed{D}$ Нека $f(x,y)$ е дефинирана в $U(x_0,y_0)$ и $z_0 = f(x_0,y_0)$.
Равнината $\alpha: z = a(x - x_0) + b(y - y_0) + z_0 = 0$ се нарича ~~допирателна~~ ДОПИРАТЕЛНА РАВНИНА КЪМ ГРАФИКАТА НА $f(x_0,y_0)$ В ТОЧКАТА (x_0,y_0), ако

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f(x,y) - z(x,y)) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f(x,y) - (a(x-x_0) + b(y-y_0) + z_0)) = 0$$

$\boxed{T}$ Ако функцията $f(x,y)$ е диференцируема в (x_0,y_0), то равнината $z(x,y) = f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0) + f(x_0,y_0)$ е допирателната равнина в точката (x_0,y_0,z_0).

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0) + \underbrace{\varepsilon_1(x-x_0) + \varepsilon_2(y-y_0)}_{z(x,y)}$$