

11 ДИФЕРЕНЦИРАНЕ НА СЛОЖНА ФУНКЦИЯ. ИНВАРИАНТНОСТ НА ФОРМА НА ПЪРВИЯ ДИФЕРЕНЦИАЛ. ГЕОМЕТРИЧЕН СМИСЪЛ НА ДИФЕРЕНЦИАЛ

□ Нека функцията $z=f(x,y)$ е дефинирана в $U(x_0, y_0)$ и диференцируема в (x_0, y_0) . Нека $x=x(t), y=y(t)$ — дефинирани в $I(t_0)$ и такива, че за $\forall t \in U(t_0) \Rightarrow (x(t), y(t)) \in U(x_0, y_0)$, $x(t_0)=x_0, y(t_0)=y_0$; $x(t)$ и $y(t)$ са диференцируеми в t_0 . Тогава сложната функция $z(t)=f(x(t), y(t)), t \in U(t_0)$ е диференцируема в t_0 . При това:

$$\frac{dz(t_0)}{dt} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \cdot \frac{dx(t_0)}{dt} + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \cdot \frac{dy(t_0)}{dt}$$

□ Нека функцията $z=f(x,y)$ е дефинирана в $U(x_0, y_0)$ и диференцируема в (x_0, y_0) и нека функциите $x=x(u,v), y=y(u,v)$ са дефинирани в $U(u_0, v_0)$ и такива, че $x(u_0, v_0)=x_0$ и $y(u_0, v_0)=y_0, \forall (u,v) \in U(u_0, v_0) \Rightarrow (x(u,v), y(u,v)) \in U(x_0, y_0)$ и диференцируеми в (u_0, v_0) . Нека $z(u,v)=f(x(u,v), y(u,v))$. Тогава $z(u,v)$ е диференцируема в (u_0, v_0) . При това:

$$\frac{\partial z(u_0, v_0)}{\partial u} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \cdot \frac{\partial x(u_0, v_0)}{\partial u} + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \cdot \frac{\partial y(u_0, v_0)}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z(u_0, v_0)}{\partial v} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \cdot \frac{\partial x(u_0, v_0)}{\partial v} + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \cdot \frac{\partial y(u_0, v_0)}{\partial v}$$

$$dz(u_0, v_0) = \frac{\partial z(u_0, v_0)}{\partial u} du + \frac{\partial z(u_0, v_0)}{\partial v} dv$$

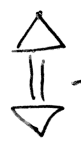
ИНВАРИАНТНОСТ НА ФОРМАТА НА ПЪРВИЯ ДИФЕРЕНЦИАЛ:

$$z=f(x,y); x=x(u,v), y=y(u,v) \rightarrow z(u,v)=f(x(u,v), y(u,v))$$

$$dz(u,v) = (z'_x \cdot x'_u + z'_y \cdot y'_u) du + (z'_x \cdot x'_v + z'_y \cdot y'_v) dv =$$

$$= z'_x (x'_u du + x'_v dv) + z'_y (y'_u du + y'_v dv) =$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$



→ ИНВАРИАНТНОСТ НА ФОРМАТА НА ПЪРВИЯ ДИФЕРЕНЦИАЛ

$$dz(u,v) = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv$$

□ Ако f и g са функции на две променливи.

Тогава:

$$d(f \pm g) = df \pm dg$$

$$d(f \cdot g) = f dg + g df$$

$$d(f/g) = \frac{g df - f dg}{g^2}$$

□ Ако $f(x,y)$ е дефинирана в $U(x_0, y_0)$ и $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Равнината $\alpha: z = a(x - x_0) + b(y - y_0) + z_0 = 0$ се нарича ~~допирателна~~ ДОПИРАТЕЛНА РАВНИНА към ГРАФИКАТА на $f(x_0, y_0)$

В ТОЧКАТА (x_0, y_0) , ако

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} (f(x,y) - z(x,y)) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} (f(x,y) - (a(x - x_0) + b(y - y_0) + z_0)) = 0$$

□ Ако функцията $f(x,y)$ е диференцируема в (x_0, y_0) , то равнината $z(x,y) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0)$ е допирателната равнина в точката (x_0, y_0, z_0) .

$$f(x,y) = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \underbrace{\epsilon_1(x - x_0) + \epsilon_2(y - y_0)}_{z(x,y)}$$