21 | Класове от интегруеми функции

Т Ако функцията $f(x,y)$ е непрекъсната върху компактното измеримо по Жордан множество G, то тя е интегруема.

Доказателство:

Т.к. $f(x,y)$ е непрекъсната върху компактното множество G, то тя е равномерно непрекъсната.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \varepsilon_0 = \varepsilon / 2m(G)$

$\exists \delta = \delta(\varepsilon_0) : \forall (x',y'), (x'',y'') : \rho((x',y'),(x'',y'')) < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x',y') - f(x'',y'')| < \varepsilon_0$

$\tau = \{G_i\}_{i=1}^{N}, \ \delta_\tau < \delta$

$\omega_i(f) = \sup\limits_{G_i} |f(x',y') - f(x'',y'')| \leq \varepsilon_0$

$\rho((x',y'),(x'',y'')) \leq \delta_\tau < \delta$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} \omega_i(f) \cdot m(G_i) \leq \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_0 \cdot m(G_i) = \varepsilon_0 \sum_{i=1}^{N} m(G_i) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Т Нека $f(x,y)$ е ограничена върху компактното измеримо по Жордан множество $G \subset \mathbb{R}^2$ и $E = \{(x,y) \in G : f$ е прекъсната в $(x,y)\}$ е с Жорданова мярка 0. $\Rightarrow f(x,y)$ е интегруема върху G.

Доказателство:

$M = \sup\limits_{G} |f(x,y)| > 0$

E е с Жорданова мярка $0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists A_\varepsilon$ - отворено клетъчно множество:

$E \subset A_\varepsilon$ и $m(A_\varepsilon) < \varepsilon / 4M$.

$G' = G \setminus A_\varepsilon$ - компактно $\Rightarrow f(x,y)$ е интегруема върху G'

$\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \tau' = \{G_i\}_{i=2}^{N} \ \delta_{\tau'} < \delta \Rightarrow S_{\tau'} - s_{\tau} < \varepsilon / 2$

Нека $G_1 = G \cap A_\varepsilon \Rightarrow \tau = \{G_1\} \cup \tau' = \{G_i\}_{i=1}^{N}$ - разбиване на G.

$M_1 - m_1 \le |M_1 + m_1| \le 2M$

$S_\tau - s_\tau = (M_1 - m_1) \cdot m(G_1) + S_{\tau'} - s_{\tau'} \le 2M \cdot m(G_1) + \varepsilon/2 \le$

$\le 2M \cdot \dfrac{\varepsilon}{4M} + \dfrac{\varepsilon}{2} \doteq \varepsilon \Rightarrow$ от силния критерий $\Rightarrow f$ е интегруема върху G.