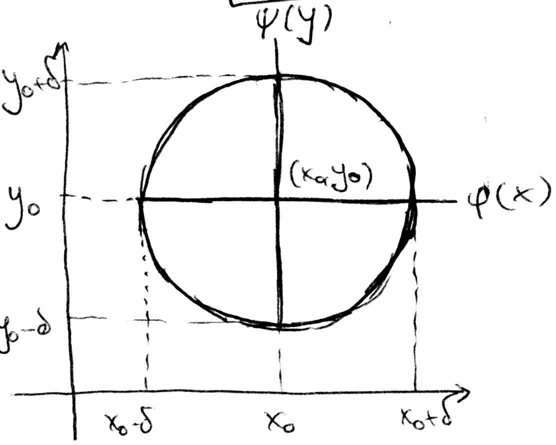
10 Частни производни. Диференцируемост. Диференциал.

НДУ за диференцируемост



Нека $z=f(x,y)$ е дефинирана върху $B_\delta(x_0,y_0)$; $\varphi(x)=f(x,y_0)$; $x\in(x_0-\delta;x_0+\delta)$; ~~$\psi(y)=f(x_0,y)$~~

D Производната $\varphi'(x_0)$ се нарича първа частна производна на $f(x,y)$ в (x_0,y_0) по променливата x.

Записваме $\varphi'(x_0)=\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$

$\psi(y)=f(x_0,y)$, $y\in(y_0-\delta;y_0+\delta)$

D Производната $\psi'(y_0)$ се нарича първа частна производна на $f(x,y)$ в (x_0,y_0) по променливата y. Записваме $\psi'(y_0)=\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$

$$\varphi'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\underbrace{\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}}_{\text{диференчно частно}}=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$$

$$\psi'(y_0)=\lim_{y\to y_0}\frac{\psi(y)-\psi(y_0)}{y-y_0}=\lim_{y\to y_0}\overbrace{\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}}^{\text{диференчно частно}}=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$$

$\Delta x=x-x_0 \to x=x_0+\Delta x$

$\Delta y=y-y_0 \to y=y_0+\Delta y$

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

$f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$ → нарастване на f около (x_0,y_0) по x $=\Delta_x f$

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

$f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$ → нарастване на f около (x_0,y_0) по y $=\Delta_y f$

$\boxed{D}$ Нека $z=f(x,y)$ е дефинирана в $B_\delta(x_0,y_0)$. Казваме, че $f(x,y)$ е ДИФЕРЕНЦИРУЕМА в (x_0,y_0), ако
$\exists A, B \in \mathbb{R}: \Delta f = f(x,y)-f(x_0,y_0) = A(x-x_0)+B(y-y_0)+\varepsilon_1(x-x_0,y-y_0).(x-x_0)+\varepsilon_2(x-x_0,y-y_0).(y-y_0)$.

$\boxed{D}$ $df(x_0,y_0) = A(x-x_0)+B(y-y_0)$ се нарича ДИФЕРЕНЦИАЛ на $f(x,y)$ на функцията $f(x,y)$ в точката (x_0,y_0).

$\boxed{D}$ $z=f(x_0,y_0)+A(x-x_0)+B(y-y_0)$ – ДОПИРАТЕЛНА РАВНИНА в точката $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$.

$\boxed{T}$ Нека $z=f(x,y)$ е дефинирана в $B_\delta(x_0,y_0)$ и диференцируема в $(x_0,y_0) \Rightarrow f(x,y)$ е непрекъсната в (x_0,y_0).

Доказателство:

$f(x,y)$ – диференцируема в $(x_0,y_0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} (f(x_0,y_0)+A\Delta x+B\Delta y+\varepsilon_1(\Delta x,\Delta y)\Delta x+\varepsilon_2(\Delta x,\Delta y)\Delta y) =$$

$$= f(x_0,y_0)+A.0+B.0+0.0+0.0 = f(x_0,y_0) \Rightarrow f(x,y) \text{ е непрекъсната в } (x,y).$$

$\boxed{T}$ Ако $f(x,y)$ е дефинирана върху $B_\delta(x_0,y_0)$ и диференцируема в (x_0,y_0), то $\exists f'_x(x_0,y_0)$ и $f'_y(x_0,y_0)$. При това

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = A \quad \text{и} \quad \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = B$$

Доказателство:

Нека $f(x,y)$ – диференцируема в (x_0,y_0). Тогава

$$\Delta f = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = A\Delta x + B\Delta y + \varepsilon_1(\Delta x,\Delta y)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x,\Delta y)\Delta y$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{A\Delta x+\varepsilon_1(\Delta x,\Delta y)\Delta x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}(A+\varepsilon_1(\Delta x,\Delta y)) = \lim_{\Delta x\to 0} A + \lim_{\Delta x\to 0}\varepsilon_1(\Delta x,\Delta y) = A$$

Аналогично за y.

Следствие: $df(x_0,y_0) = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y$

! Невинаги, когато съществуват частните производни, това е диференциал на f.

Т. Достатъчно условие за диференцируемост

Нека $z = f(x,y)$ е дефинирана върху $U(x_0,y_0)$ и $\exists f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ върху $U(x_0,y_0)$ и са непрекъснати в (x_0,y_0). Тогава $f(x,y)$ е диференцируема в (x_0,y_0).

Доказателство:

$\Delta f = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = [f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y)] +$

$+ [f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)]$ (1).

$\varphi(x) = f(x, y_0+\Delta y) \Rightarrow \Delta\varphi = \varphi(x_0+\Delta x) - \varphi(x_0) = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y)$.

$\varphi(x)$ има производни за $\forall x$ от интервала с граници x_0 и $x_0+\Delta x$

$\Rightarrow$ можем да приложим теорема за крайните нараствания

$\Rightarrow \exists\, 0<\theta_1<1: \Delta\varphi(x) = \varphi'(x_0+\theta_1\Delta x).\Delta x = f'_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y)\Delta x$

$\psi(y) = f(x_0,y)$ върху интервала с граница y_0 и $y_0+\Delta y$

$\Rightarrow \Delta\psi = f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) \Rightarrow \exists\, 0<\theta_2<1:$

$\Delta\psi = \psi'(y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y = f'_y(x_0, y_0+\theta_2\Delta y).\Delta y$

$\Rightarrow (1) = f'_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y).\Delta x + f'_y(x_0, y_0+\theta_2\Delta y).\Delta y =$

$= f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y$

$+ \underbrace{[f'_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y) - f'_x(x_0,y_0)]}_{\varepsilon_1(\Delta x,\Delta y)}\Delta x +$

$+ \underbrace{[f'_y(x_0, y_0+\theta_2\Delta y) - f'_y(x_0,y_0)]}_{\varepsilon_2(\Delta x,\Delta y)}\Delta y$

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_1(\Delta x,\Delta y) = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \left(f'_x(x_0+\theta\Delta x, y_0+\Delta y) - f'_x(x_0,y_0)\right) =$$

$$= f'_x(x_0,y_0) - f'_x(x_0,y_0) = 0$$

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_2(\Delta x,\Delta y) = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \left(f'_y(x_0,y_0+\theta_2\Delta y) - f'_y(x_0,y_0)\right) = f'_y(x_0,y_0) - f'_y(x_0,y_0) = 0$$

$\Rightarrow f(x,y)$ е диференцируема в (x_0,y_0).