17. Локални екстремуми на функции на две променливи. Условни екстремуми. Множители на Лагранж

D) Нека $f(x,y)$ е дефинирана върху $X \subset \mathbb{R}^2$ и $(x_0,y_0) \in X$.

Казваме, че:

1) (x_0,y_0) е ТОЧКА НА ЛОКАЛЕН МАКСИМУМ на $f(x,y)$, ако
$\exists B_\delta(x_0,y_0) \subset X : \forall (x,y) \in \overset{\circ}{B}_\delta(x_0,y_0) \Rightarrow f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$

2) (x_0,y_0) е ТОЧКА НА ЛОКАЛЕН МИНИМУМ на $f(x,y)$, ако
$\exists B_\delta(x_0,y_0) \subset X : \forall (x,y) \in \overset{\circ}{B}_\delta(x_0,y_0) \Rightarrow f(x,y) \geq f(x_0,y_0)$.

T) Нека $f(x,y)$ е дефинирана върху $X \subset \mathbb{R}^2$ и (x_0,y_0) е точка на локален екстремум $\Rightarrow$

1) ако $\exists f'_x(x_0,y_0) \Rightarrow f'_x(x_0,y_0) = 0$

2) ако $\exists f'_y(x_0,y_0) \Rightarrow f'_y(x_0,y_0) = 0$

Доказателство

Нека (x_0,y_0) е точка на локален максимум. Тогава $\equiv$

$\exists B_\delta(x_0,y_0) \subset X : \forall (x,y) \in \overset{\circ}{B}_\delta(x_0,y_0) \Rightarrow f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$.

Дефинираме функцията $\varphi(x) = f(x,y_0) \to x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$.

$\Rightarrow x_0$ е точка на локален максимум на $\varphi(x)$.

$\Rightarrow \varphi'(x_0) = 0 \Rightarrow f'_x(x_0,y_0) = 0$.

Следствие: Нека $f(x,y)$ е дефинирана върху $X \subset \mathbb{R}^2$ и (x_0,y_0) е точка на локален ~~максимум~~ екстремум. Ако $\exists df(x_0,y_0) \Rightarrow$

$\Rightarrow df(x_0,y_0) = 0$

$$df(x_0,y_0) = \underbrace{\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}}_{0} dx + \underbrace{\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}}_{0} dy = 0$$

D) Ако за функцията $f(x,y)$ $df(x_0,y_0) = 0$, точка (x_0,y_0) наричаме СТАЦИОНАРНА ТОЧКА.

$\boxed{T}$ Нека $f(x,y)$ е дефинирана в $B_\delta(x_0,y_0)$ и $f(x,y)$ е диференцируема до втори ред и $f'_x(x_0,y_0) = f'_y(x_0,y_0) = 0$. Дефинираме $D(x_0,y_0) = f''_{xx}(x_0,y_0) \cdot f''_{yy}(x_0,y_0) - \left(f''_{xy}(x_0,y_0)\right)^2$.

Ако: 1) $D(x_0,y_0) > 0$ и $f''_{xx}(x_0,y_0) > 0 \to (x_0,y_0)$ - локален минимум.

2) $D(x_0,y_0) > 0$ и $f''_{xx}(x_0,y_0) < 0 \to (x_0,y_0)$ - локален максимум

3) $D(x_0,y_0) < 0$ - не е екстремум

4) $D(x_0,y_0) = 0$ - неопределеност.

$\boxed{D}$ 1) Квадратичната форма $\Phi(x_1 \ldots x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ се нарича **СИМЕТРИЧНА**, ако $a_{ij} = a_{ji}$, $i \neq j$

2) симетричната квадратична форма $\Phi(x_1 \ldots x_n)$ се нарича **ПОЛОЖИТЕЛНО ДЕФИНИТНА**, ако $\Phi(x_1 \ldots x_n) > 0$ за $(x_1 \ldots x_n) \neq (0 \ldots 0)$

3) симетричната квадратична форма $\Phi(x_1 \ldots x_n)$ се нарича **ОТРИЦАТЕЛНО ДЕФИНИТНА**, ако $\Phi(x_1 \ldots x_n) < 0$ за $(x_1 \ldots x_n) \neq (0 \ldots 0)$

4) $\Phi(x_1 \ldots x_n)$ не е дефинитна, ако е нито положително, нито отрицателно дефинитна.

Критерий на Силвестър:

$\Phi(x_1 \ldots x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ - симетрична

$\to \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

1. Ако $a_{11} > 0$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \ldots \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0 \Rightarrow \Phi$ е положително дефинитна

2. Ако $a_{11} < 0$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0 \ldots (-1)^n \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0 \Rightarrow \Phi$ е отрицателно дефинитна

$\boxed{T}$ Нека функцията $f(x_1 \ldots x_n)$ е дефинирана в $B_\delta(x_1^0 \ldots x_n^0)$ и има непрекъснати частни производни до втори ред включително, и $d_1 f(x_1^0, \ldots, x_n^0) = 0$

1) Ако $d^2 f(x_1^0 \ldots x_n^0)$ е положително дефинитен, то $(x_1^0 \ldots x_n^0)$ е точка на (строг) локален минимум.

2) Ако $d^2 f(x_1^0 \dots x_n^0)$ е отрицателно дефинитен, то $(x_1^0 \dots x_n^0)$ е точка на (строг) локален максимум.

3) Ако $d^2 f(x_1^0 \dots x_n^0)$ не е дефинитна, то $(x_1^0 \dots x_n^0)$ не е точка на локален екстремум.

$$d^2 f(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}\Delta x^2 + \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y \partial x}\Delta y \Delta x + \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}\Delta y^2$$

симетрична форма

1. $f''_{xx}(x_0,y_0)$

2. $\begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0,y_0) & f''_{xy}(x_0,y_0) \\ f''_{yx}(x_0,y_0) & f''_{yy}(x_0,y_0) \end{vmatrix} = D(x_0,y_0)$

Условни екстремуми:

Нека върху множеството $G \subset \mathbb{R}^n$ са дефинирани функциите:

$f(x_1 \dots x_n);\ f_i(x_1 \dots x_n),\ i=\overline{1,m} \quad 1 \le m < n$

$\boxed{D}$ Казваме, че $(x_1^0 \dots x_n^0)$ е **точка на условен максимум**, ако $\exists B_\delta(x_1^0 \dots x_n^0) \subset G : \forall (x_1 \dots x_n) \in B_\delta(x_1^0 \dots x_n^0) \cap E : f(x_1 \dots x_n) \le f(x_1^0 \dots x_n^0)$

$\boxed{D}$ Казваме, че $(x_1^0 \dots x_n^0)$ е **точка на условен минимум**, ако $\exists B_\delta(x_1^0 \dots x_n^0) \subset G : \forall (x_1 \dots x_n) \in B_\delta(x_1^0 \dots x_n^0) \cap E : f(x_1 \dots x_n) \ge f(x_1^0 \dots x_n^0)$.

Има 2 подхода за намиране на условни екстремуми.

I) Да се намерят решения $x_i = g_i(x_{m+1} \dots x_n),\ i=\overline{1,m}$:

$F(x_{m+1} \dots x_n) = f(g_1(x_{m+1} \dots x_n) \dots g_m(x_{m+1} \dots x_n), x_{m+1} \dots x_n)$

$\rightarrow$ локалните екстремуми на F върху E.

II) Множители на Лагранж

$L(x,\lambda) = L(x_1 \dots x_n, \lambda_1 \dots \lambda_m) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x)$, $x=(x_1 \dots x_n)$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$

$L(x,\lambda)$ — функция на Лагранж; λ_i — множители на Лагранж

$\boxed{D}$ (x^0,λ^0): $\frac{\partial L(x^0,\lambda^0)}{\partial x_i} = \frac{\partial L(x^0,\lambda^0)}{\partial \lambda_j} = f_j(x^0) = 0;\ i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m}$

(x^0,λ^0) — стационарна