19 Двукратен интеграл на Риман

D Нека $z=f(x,y)$ е дефинирана върху измеримо по Жордан множество $G\subset\mathbb{R}^2$.

$\tau=\{G_i\}_{i=1}^n$; G_i – измерими: 1) $\overset{\circ}{G_i}\cap\overset{\circ}{G_j}=\emptyset$; $i\neq j$; $i,j=\overline{1,n}$

РАЗБИВАНЕ НА G 2) $\bigcup\limits_{i=1}^n G_i=G$

$\forall i=\overline{1,n}\Rightarrow \xi_i(x_i,y_i)\in G_i\Rightarrow \xi=\{\xi_i\}_{i=1}^n$

$\Rightarrow \sigma_\tau(f,\xi)=\sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i).m(G_i)$

$\rightarrow$ СУМА НА РИМАН

D Казваме, че $z=f(x,y)$ е **ИНТЕГРУЕМА ПО РИМАН** върху G, ако $\exists I\in\mathbb{R}$:

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0:\ \forall\tau=\{G_i\}_{i=1}^n: \delta_\tau<\delta, \forall\xi=\{\xi_i\}_{i=1}^n: \xi_i\in G_i\Rightarrow$

$\Rightarrow |I-\sigma_\tau(f,\xi)|<\varepsilon$

I се нарича **ДВУКРАТЕН ИНТЕГРАЛ НА РИМАН НА $f(x,y)$ ВЪРХУ G.**

D $E\subset\mathbb{R}^2$ – измеримо $\Rightarrow$ ДИАМЕТЪР на E: $d(E)=\sup\limits_{M,N\in E}\rho(M,N)$

$\Rightarrow \delta_\tau=\max\limits_{i=\overline{1,n}} d(G_i)$

D Нека $f(x,y)$ е дефинирана върху измеримото по Жордан $G\subset\mathbb{R}^2$. Казваме, че $f(x,y)$ е **СЪЩЕСТВЕНО ОГРАНИЧЕНА**, ако $\exists$ множество E с Жорданова мярка 0: $f(x,y)$ е ограничена върху $G\setminus E$.

D Казваме, че $f(x,y)$ е **СЪЩЕСТВЕНО НЕОГРАНИЧЕНА**, ако $\forall$ множество E с Жорданова мярка $0\Rightarrow f(x,y)$ е неограничена върху $G\setminus E$.

T Ако $f(x,y)$ е съществено неограничена върху измеримото по Жордан множество G, то $f(x,y)$ не е интегруема върху G.

Доказателство:

Да допуснем, че $f(x,y)$ е интегруема върху G. $\Rightarrow \exists I\in\mathbb{R}$:

За $\varepsilon=1\ \exists\delta>0:\ \forall\tau=\{G_i\}_{i=1}^n: \delta_\tau<\delta$ и $\forall\xi=\{\xi_i\}_{i=1}^n: \xi_i\in G_i\Rightarrow$

$\Rightarrow |I-\sigma_\tau(f,\xi)|<1$

Фиксираме $\tau = \{G_i\}_{i=1}^{N} : \delta_\tau < \delta$.

Т.к. f е съществено неограничена $\Rightarrow \exists i_0 : f(x,y)$ е неограничена върху $G_{i_0} : m(G_{i_0}) > 0$.

За определеност нека $i_0 = 1$.

За $\forall i = \overline{2,N}$ избираме $\xi_i^0 \in G_i$.

$\xi_1 \in G_1$ - произволна

$\xi = \{\xi_1, \xi_2^0, \dots, \xi_N^0\}$

Разглеждаме

$$I - 1 < \sigma_\tau(f,\xi) = f(\xi_1).m(G_1) + \underbrace{\sum_{i=2}^{N} f(\xi_i^0).m(G_i)}_{A} < I + 1$$

$$\Updownarrow$$

$$I - 1 - A < f(\xi_1).m(G_1) < I + 1 - A; \; m(G_1) > 0 \Rightarrow \; |: m(G_1)$$

$$\underbrace{\frac{I-1-A}{m(G_1)}} < \underbrace{f(\xi_1)} < \underbrace{\frac{I+1-A}{m(G_1)}} \Rightarrow \xi_1 \in G_1 \text{ - произволна, но } f \text{ е неограничена върху } G_1 \; \lightning$$

фиксирани