6 Н Степенни редове. Радиус и област на сходимост

Д Ред от вида $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{a_n(x-x_0)^n}_{f_n(x)}$, където $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ – фиксирано, се нарича **степенен ред**.

(*) $x = x_0 \Rightarrow$ степенният ред е сходящ $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n . 0^n = a_0 + 0 + 0 + \dots$

(*) (1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ и (2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$

Ако (1) е сходящ в x', то (2) също е сходящ в $t' = x' - x_0$.

Ако $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t_0^n$ е сходящ $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \bar{x}^n$ е сходящ, където $\bar{x} = t_0 + x_0$

Т на Абел

Ако СРед $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е сходящ в $x_0 \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е сходящ за $\forall x: |x| < |x_0|$

Доказателство:

По условие БЧРед $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ е сходящ $\Rightarrow a_n x_0^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, т.е.

$\{a_n x_0^n\}_{n=0}^{\infty}$ е ограничена $\Rightarrow \exists M > 0: |a_n x_0^n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$

Разглеждаме (*) $|a_n x^n| = \left| a_n x_0^n . \frac{x^n}{x_0^n} \right| = |a_n x_0^n| . \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n = Mq^n$,

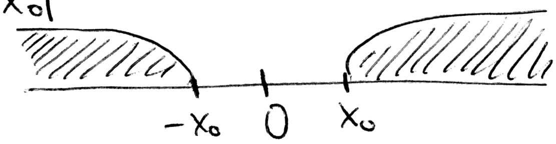
където $q = \left|\frac{x}{x_0}\right|$. Ако $x: |x| < |x_0| \Rightarrow q < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ БЧРед $\sum_{n=0}^{\infty} Mq^n$ е сходящ за $\forall x: |x| < |x_0| \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е абсолютно сходящ $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е сходящ.

Следствие 1: Ако $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е сходящ в $x_0 \neq 0$, то той е абсолютно сходящ за $\forall x: |x| < |x_0|$

Следствие 2: Ако $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е разходящ в $x_0 \neq 0$, то $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е разходящ за $\forall x: |x|>|x_0|$



Доказателство:

Да допуснем, че $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е сходящ в $x': |x'|>|x_0| \Rightarrow$

$\Rightarrow$ по Абел $\Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е сходящ в x_0 ↯ $\Rightarrow$ СРед е разходящ в x'!

Следствие 3: Ако СРед $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е сходящ в $x_0 \neq 0$, то СРед е равномерно сходящ върху всеки подинтервал $[-\rho;\rho]: 0<\rho<|x_0|$

Доказателство:

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ – сходящ в $x_0 \neq 0 \Rightarrow$ от Абел $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е абсолютно сходящ $\forall x: |x|<|x_0|$ и т.к. $0<\rho<|x_0| \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n$ е абсолютно сходящ, т.е. е сходящ редът $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n \rho^n| = \sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|\rho^n$. Разглеждаме $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|\rho^n$ – сходящ с положителни членове $\Rightarrow$ по теоремата на Вайерщрас $\Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е равномерно сходящ върху $[-\rho;\rho]$

$\boxed{T}$ За всеки СРед $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ съществува $R: 0 \le R \le +\infty$, такова, че: 1) $R=+\infty \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е сходящ върху $\mathbb{R}$;

2) $R=0 \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е сходящ само в $x_0=0$;

3) $0<R<+\infty \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е сходящ върху $(-R,R)$ и разходящ върху $(-\infty,-R)\cup(R,+\infty)$

$\boxed{D}$ $(-R,R)$, $0 \le R \le +\infty$ се нарича ОБЛАСТ НА СХОДИМОСТ на СРед, а $R \in [0,+\infty]$ се нарича РАДИУС НА СХОДИМОСТ.

Доказателство:

Нека $D = \{x \in \mathbb{R} : \text{ред} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \text{сходящ}\} \neq \emptyset \Rightarrow 0 \in D$.

1) Нека D е неограничено $\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}\ \exists x_0 \in D : |x| < |x_0| \Rightarrow$ от Абел $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е сходящ $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е сходящ върху $\mathbb{R}$

2) D - ограничено

2.1) $D = \{0\} \Rightarrow \forall x \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ - разходящ $\Rightarrow R = 0$.

2.2) $D \neq \{0\}$, ограничено $\Rightarrow \exists \sup_{x \in D} |x| = R$.

$\forall x \in \mathbb{R} : |x| < R \Rightarrow \exists x_0 \in D : |x| < |x_0| \Rightarrow$ по Т на Абел $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е сх. в x.

$\forall x \in \mathbb{R} : |x| > R \Rightarrow \exists x_0 \notin D : |x| > |x_0| \Rightarrow$ по Следствие 2 от Абел $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е разходящ в x.

$\boxed{\text{Т}}$ Нека за ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ имаме, че:

1) $\exists \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \ell$; или 2) $\exists \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell$

$\Rightarrow R = 1/\ell$ е радиуса на сходимост

Доказателство:

Нека $\exists \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell$

1) Нека $0 < \ell < +\infty$. Разглеждаме $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$

$\sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| . \sqrt[n]{|a_n|} \xrightarrow[n \to \infty]{} |x| . \ell$

1.1) $|x| \ell < 1 \Leftrightarrow |x| < 1/\ell \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ - сходящ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ - абсолютно сходящ.

1.2) $|x| \ell > 1 \Leftrightarrow |x| > 1/\ell \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ - разходящ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ - разходящ

(АКО ДОПУСНЕМ, ЧЕ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ Е СХОДЯЩ ЗА $x_0 : |x_0| \ell > 1$, Т.Е. $|x_0| > 1/\ell$

$\exists\ \hat{x}_0 : |x_0| > |\hat{x}_0| > 1/\ell \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \hat{x}_0^n$ Е АБСОЛЮТНО СХОДЯЩ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n \hat{x}_0^n|$ - СХОДЯЩ $\Rightarrow \lim_{n \to \infty} |a_n \hat{x}_0^n| = 0$, НО $\sqrt[n]{|a_n \hat{x}_0^n|} \to \ell |\hat{x}_0| > 1$ $\lightning$)

$\Rightarrow \forall x \in (-1/\ell, 1/\ell)$ - сходящ и $\forall x \in (-\infty, -1/\ell) \cup (1/\ell, +\infty)$ - разходящ

$\Rightarrow R = 1/\ell$ радиусът на сходимост.

1.3) $\ell = 0 \Rightarrow$ [redacted] $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| . \ell = 0 \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ - сходящ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ - абсолютно сходящ за $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ - сходящ за $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow R = +\infty = 1/\ell$ - радиус на сходимост

1.4) $\ell = +\infty \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow |x| . \ell = +\infty$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| . \ell = +\infty \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ - разходящ за $\forall x \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow R = 0$ - радиус на сходимост

$\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right.$ - разходящ за $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$