5) Функционални редици и редове – сходимост и равномерна сходимост. Критерий на Вайерщрас

D Нека $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ е редица от функции, дефинирани върху $E \subset \mathbb{R}$. Такава редица се нарича **функционална**.

Казваме, че:

1) Е **сходяща в точка** $x_0 \in E$, ако е сходяща БЧРедица $f_1(x_0), f_2(x_0), \dots f_n(x_0) \dots$ –

2) Е **сходяща върху** E, ако $\forall x \in E$ съответната БЧРедица $f_1(x), f_2(x), \dots f_n(x) \dots$ е сходяща

3) Е **сходяща към** $f(x)$ **в точка** x_0, ако БЧРедица $f_1(x_0), f_2(x_0) \dots f_n(x_0) \dots \to f(x_0)$.

4) Е **сходяща към** $f(x)$, ако за $\forall x \in E$ $f_1(x), f_2(x) \dots f_n(x) \dots \to f(x)$.

D $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{E} f(x)$, ако $\forall x \in E \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon, x)$:

$$\forall n > N \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

D Казваме, че функционалната редица $f_n(x)$ е **равномерно сходяща към** $f(x)$ **върху** E, ако

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n > N \ \forall x \in E : |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$

Записваме $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{E}{\rightrightarrows}} f(x)$

Тв $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{E}{\rightrightarrows}} 0 \Leftrightarrow$ БЧРедица $\sup\limits_{x\in E} |f_n(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Доказателство:

$\Rightarrow$) Нека $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{E}{\rightrightarrows}} 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon)$: $\Rightarrow |f_n(x)| < \varepsilon/2$

$\forall n > N, \forall x \in E \Rightarrow$

$\Rightarrow$ За $\forall x \in E \Rightarrow \sup\limits_{x\in E} |f_n(x)| \le \varepsilon/2 < \varepsilon \Rightarrow \sup\limits_{x\in E} |f_n(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\Leftarrow$) Нека $\sup\limits_{x\in E}|f_n(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon): \forall n>N \to$

$\to \sup\limits_{x\in E}|f_n(x)|<\varepsilon$

$|f_n(x)| \le \sup\limits_{x\in E}|f_n(x)| < \varepsilon$ за $\forall x\in E \Rightarrow f_n(x) \overset{E}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} 0$

$\boxed{T}$ $f_n(x) \overset{E}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} f(x) \Leftrightarrow \sup\limits_{x\in E}|f_n(x)-f(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\boxed{TB}$ Ако $f_n(x) \overset{E}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} f(x)$ и $F\subset E \Rightarrow f_n(x) \overset{F}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} f(x)$

Доказателство:

$f_n(x) \overset{E}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} f(x) \Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon): \forall n>N, \forall x\in E\ |f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$

$\forall x\in F\subset E \Rightarrow f_n(x) \overset{F}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} f(x)$

$\boxed{D}$ Нека $f_n(x), n\in\mathbb{N}$, са дефинирани върху $E\subset\mathbb{R}$. Формалната сума $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ се нарича **БЕЗКРАЕН ФУНКЦИОНАЛЕН РЕД**.

$S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$ – **n-ТА ПАРЦИАЛНА СУМА**

Ако $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща върху E, то казваме, че функционалният ред е **СХОДЯЩ ВЪРХУ E**.

Ако $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)=S(x), \forall x\in E$, то наричаме $S(x)$ **СУМА НА ФРЕД**

Записваме $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)=S(x)$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)=S(x)$, ако $\forall x\in E, \forall\varepsilon>0\ \exists N(x,\varepsilon)>0:$

$\forall n>N \to |S(x)-S_n(x)|<\varepsilon$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ е **РАВНОМЕРНО СХОДЯЩ** и $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, ако

$\forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)>0: \forall n>N, \forall x\in E \to |S(x)-S_n(x)|<\varepsilon$

$\Updownarrow$

$\forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)>0: \forall n>N \to \sup\limits_{x\in E}|S(x)-S_n(x)|<\varepsilon$

Ако $r_n(x)=S(x)-S_n(x)=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \to \sup\limits_{x\in E}|r_n(x)|<\varepsilon$ $\triangleleft$

$\boxed{D}$ Казваме, че ФРЕД $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ е **АБСОЛЮТНО СХОДЯЩ** върху E, ако $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$ е сходящ върху E.

Т] Критерий на Вайерщрас

Нека $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ е дефиниран върху E и $\exists$ БЧРед $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$, $0 \leq |f_n(x)| \leq a_n, \forall x \in E$. Ако БЧРед е сходящ, то ФРед е абсолютно и равномерно сходящ върху E.

Доказателство:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходящ $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon): \forall n > N \rightarrow \left|\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k\right| < \varepsilon \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k < \varepsilon$

$$0 \leq \sum_{m=n+1}^{\infty} |f_m(x)| \leq \sum_{m=n+1}^{\infty} a_m \quad (\forall x \in E)$$

$$0 \leq \sup_{x \in E} \sum_{m=n+1}^{\infty} |f_m(x)| \leq \sum_{m=n+1}^{\infty} a_m \Rightarrow 0 \leq \sup_{x \in E} \sum_{m=n+1}^{\infty} |f_m(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k < \varepsilon \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ е сходящ. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ - абсолютно сходящ върху E.

2) $\left|\sum\limits_{m=n+1}^{\infty} f_m(x)\right| \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| < \varepsilon \quad (\forall x \in E) \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ е равномерно сходящ върху E.