7 + Почленно диференциране и интегриране на степенни редове. Ред на Тейлор. Разлагане в ред на Тейлор на някои елементарни функции.

Т Степенните редове

1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

интегриране

2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$

диференциране

3) $\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1}$

имат един и същи радиус на сходимост

Доказателство:

Нека R_i е радиусът на сходимост на ред (i), $i=\overline{1,3}$.

1) $R_3 \le R_1 \le R_2$?

2) $R_2 \le R_3$?

$\Rightarrow R_1 = R_2 = R_3$?

$\forall n \in \mathbb{N}: \frac{1}{n+1} \le 1 \le n \quad |\cdot|a_n x^{n+1}| \Rightarrow$

$\Rightarrow \left|\frac{a_n x^{n+1}}{n+1}\right| \le |a_n x^n| \cdot |x| \le |n a_n x^{n-1}| \cdot |x^2|$

1) $x \in (-R_3, R_3) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n n \cdot x^{n-1}|$ - сходящ $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |n a_n x^{n-1}||x^2|$ - сх.

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n||x|$ - сходящ $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ - сходящ $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ - сходящ $\Rightarrow$

$\Rightarrow x \in (-R_1; R_1) \Rightarrow (-R_3; R_3) \subseteq (-R_1, R_1) \Rightarrow R_3 \le R_1$

2) $x \in (-R_1; R_1) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ - абсолютно сходящ $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ - сходящ

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n||x|$ - сходящ $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{a_n x^{n+1}}{n+1}\right|$ - сходящ $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$ - абс. сх.

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$ - сходящ $\Rightarrow x \in (-R_2; R_2) \Rightarrow (-R_1; R_1) \subseteq (-R_2; R_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow R_1 \le R_2 \Rightarrow R_3 \le R_1 \le R_2$

3) $x \in (-R_2; R_2) \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$ – абсолютно сходящ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left| \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} \right|$ – сходящ

Нека $t: |x| < t < R_2$

$$|n a_n x^{n-1}| = \left| \frac{a_n}{n+1} \cdot t^{n+1} \cdot \frac{x^{n+1}}{t^{n+1}} \cdot \frac{n(n+1)}{x^2} \right| = \frac{n(n+1)}{x^2} \left| \frac{x}{t} \right|^{n+1} \cdot \left| \frac{a_n}{n+1} t^{n+1} \right|$$

$t \in (-R_2; R_2) \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} t^{n+1}$ – абсолютно сходящ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left| \frac{a_n}{n+1} t^{n+1} \right|$ – сходящ $\Rightarrow \left\{ \left| \frac{a_n}{n+1} t^{n+1} \right| \right\}_{n=0}^{\infty}$ – ограничена

$\Rightarrow \exists M > 0 : \left| \frac{a_n}{n+1} t^{n+1} \right| < M$ за $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{n(n+1)}{|x^2|} \cdot \left| \frac{x}{t} \right|^{n+1} \cdot \left| \frac{a_n}{n+1} t^{n+1} \right| < \frac{M}{x^2} \cdot n(n+1) q^{n+1} \Rightarrow q = \left| \frac{x}{t} \right| < 1$$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{M}{x^2} n(n+1) q^{n+1} = \frac{M}{x^2} \sum\limits_{n=0}^{\infty} n(n+1) q^{n+1}$ – сходящ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ от принципа за сравнение $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n . n . x^{n-1}|$ – сходящ $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ – сходящ $\Rightarrow$

$\Rightarrow x \in (-R_3; R_3) \Rightarrow (-R_2; R_2) \subseteq (-R_3, R_3) \Rightarrow R_2 \leq R_3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{\underline{R_1 = R_2 = R_3}}$

$\boxed{T}$ без доказателство

Нека $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ върху $(-R;R) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ 1) $\exists f'(x)$ върху $(-R;R)$ и $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n . a_n x^{n-1}$;

2) $f(x)$ - интегруема върху $(-R;R)$ и за $x \in (-R;R)$

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

Следствие: $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \Rightarrow \boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0).x^n}{n!}}$

Ред на Маклорен

$f(x)$ върху $(x_0-\delta; x_0+\delta) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!}}$$

Ред на Тейлор

Нека $f(x)$ е дефинирана в $(-\delta;\delta)$ и $\exists f^{(n)}(x)\ \forall n \in \mathbb{N}$ в о.

Тогава $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}$ е сходящ в $(-R;R)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!} \text{ върху } (-\delta,\delta) \\ S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!} \end{array}\right\} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0).x^n}{n!} \text{ за } x \in (-\delta,\delta)$$

$\Rightarrow \underbrace{f(x) - S_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$ $\rightarrow r_n(x)$ - остатъчен член по формулата на Тейлор: $f(x) = S_n(x) + r_n(x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow r_n(x) = f(x) - S_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$\boxed{T}$ Достатъчно условие

Нека $f(x)$ е дефинирана в $(-\delta;\delta)$ и $\exists f^{(n)}(x)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ върху $(-\delta;\delta)$. Ако $f(x)$ и $f^{(n)}(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, са равномерно ограничени върху $(-\delta;\delta)$ (т.е. $\exists M > 0 : \forall x \in (-\delta;\delta)$ $|f(x)| < M$ и $|f^{(n)}(x)| < M$ за $\forall n \in \mathbb{N}$), $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}$ върху $(-\delta;\delta)$

Доказателство:

Формулата на Тейлор

$\forall x \in (-\delta;\delta]$ $\exists c$ от интервала с краища x и 0:

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!}}_{S_n} + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

$$\left| \frac{f^{(n+1)}(c)\, x^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \right| |x|^{n+1} \leq M \cdot \frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \to \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}} = \frac{a}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$\to$ сходящ