2 Редове с неотрицателни членове, признак за сравнение. Критерий на Даламбер. Критерий на Коши. Интегрален критерий на Коши

D БЧРед $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, за който $a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, се нарича БЧРед с неотрицателни членове.

T БЧРед с неотрицателни членове е сходящ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена.

Доказателство:

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$; $S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} a_k = S_n + a_{n+1} \geq S_n \Rightarrow \{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ е монотонно растяща

БЧРед $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ $\Leftrightarrow \{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена

T Признак за сравнение

Нека $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ са БЧРед, за които $0 \leq a_n \leq b_n$.

Тогава, ако:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ - сходящ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходящ

2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - разходящ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ - разходящ

Доказателство:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ е сходящ

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$; $\hat{S}_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$. Т.к. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ е сходящ

$\Rightarrow \{\hat{S}_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена.

По условие $a_n \leq b_n \ (\forall n \in \mathbb{N}) \Rightarrow S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \leq \hat{S}_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \ (\forall n \in \mathbb{N})$

$\Rightarrow \{\hat{S}_n\}_{n=1}^{\infty}$ - ограничена $\Rightarrow \exists M: \forall n \in \mathbb{N} \rightarrow S_n \leq M$ и

$S_n \leq \hat{S}_n \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 \leq S_n \leq M \Rightarrow \{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ

$\boxed{\text{Т}}$ Критерий на Даламбер

Нека $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$. Тогава, ако:

1) $\exists\, 0 < q < 1: \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходящ

2) $\forall n \in \mathbb{N}: \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - разходящ.

Доказателство:

1) $\exists\, 0 < q < 1: \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q, \forall n \in \mathbb{N}$

$\frac{a_2}{a_1} \leq q \Rightarrow a_2 \leq a_1 . q$

$\frac{a_3}{a_2} \leq q \Rightarrow a_3 \leq a_2 q \Rightarrow a_3 \leq a_1 . q^2$

. . . - - - - -

$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q \Rightarrow a_{n+1} \leq a_1 q^n$

$0 \leq a_n \leq a_1 . q^n$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^n = a_1 \sum_{n=1}^{\infty} q^n$ - сходящ при $|q| < 1$

$\Rightarrow$ от Признака за сравнение $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходящ.

2) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \Rightarrow a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n \leq \dots$

$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - разходящ.

__Следствие:__

Нека $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0 \ (\forall n \in \mathbb{N})$ и $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$.

$\Rightarrow$ Ако: 1) $l < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ

2) $l > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е разходящ

3) $l = 1$ - неопределеност

Доказателство:

1) $l > 1 \Rightarrow \exists \varepsilon_0 > 0 : l + \varepsilon_0 < 1$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \Rightarrow \varepsilon_0 \to \exists N : \forall n > N \Rightarrow \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - l \right| < \varepsilon_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon_0 \cancel{<} 1 \Rightarrow$ по критерия на Даламбер $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходящ

$\boxed{\text{Т}}$ Критерий на Коши

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \ a_n \geq 0 \ (\forall n \in \mathbb{N})$

Тогава, ако: 1) $\exists 0 < q < 1 : \sqrt[n]{a_n} \leq q, \forall n \in \mathbb{N} \to \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходящ

2) $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ - разходящ

Доказателство

1) $\exists 0 < q < 1 : \sqrt[n]{a_n} \leq q, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 \leq a_n \leq q^n \ (\forall n \in \mathbb{N})$

$\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ - сходящ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходящ

2) $\sqrt[n]{a_n} \geq 1, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \ a_n \geq 1 \Rightarrow 0 < 1 \leq a_n$

$\sum_{n=1}^{\infty} 1$ - разходящ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - разходящ

Следствие:

Нека $\sum_{n=1}^{\infty} a_n : a_n \geq 0 \ (\forall n \in \mathbb{N})$ и $\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$.

Ако: 1) $\ell < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходящ

2) $\ell > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - разходящ

3) $\ell = 1$ — неопределеност

$\boxed{\text{T}}$ Интегрален признак за сходимост / Интегрален критерий на Коши.

Нека $f(x)$ е дефинирана $[1, +\infty)$, неотрицателна и монотонно намаляваща върху $[1, +\infty)$. БЧРед $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ и $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ са едновременно сходящи или разходящи.

Доказателство:

$\forall n \in \mathbb{N} : f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$, $x \in [n, n+1]$

$$\Rightarrow f(n+1) = \int_n^{n+1} f(n+1)\,dx \leq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq \int_n^{n+1} f(n)\,dx = f(n)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} f(k+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

Ако $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) \Rightarrow S_{n+1} - f(1) \leq \int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq S_n$

1) Ако $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ е сходящ $\Rightarrow \{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ от $\int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq S_n \Rightarrow \exists M > 0 : S_n \leq M \ (\forall n \in \mathbb{N}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq M \ (\forall n \in \mathbb{N}) \Rightarrow \forall \xi \geq 1 \Rightarrow \int_1^{\xi} f(x)\,dx \leq M \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ е сходящ

2) Ако $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ е сходящ $\Rightarrow F(\xi) = \int_1^{\xi} f(x)\,dx$ - ограничена $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists M > 0 : \int_1^{\xi} f(x)\,dx \le M \; (\forall \xi \in [1, +\infty)) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Т.к. $S_{n+1} \le \int_1^{n+1} f(x)\,dx + f(1) \le M + f(1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \{S_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ - ограничена $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ - сходящ