22 Свойства на двукратните интеграли

① Ако G е измеримо по Жордан множество в $\mathbb{R}^2$, то

$m(G) = \iint_G 1\,dxdy$.

② $f(x,y)$ и $g(x,y)$ - интегруеми по Жордан множество $G \subset \mathbb{R}^2$.

$\Rightarrow$ 1) $(f+g)$ интегруема върху G и $\iint_G (f+g)(x,y) = \iint_G f\,dxdy + \iint_G g\,dxdy$

2) $(\lambda f)(x,y) = \lambda f(x,y)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ - интегруема върху G и

$\iint_G \lambda f(x,y)\,dxdy = \lambda \iint_G f\,dxdy$.

③ Ако $f(x,y)$ е неотрицателна и интегруема върху измеримото по Жордан множество $G \subset \mathbb{R}^2 \Rightarrow \iint_G f(x,y)\,dxdy \geq 0$.

Следствие: Ако $f(x,y)$ и $g(x,y)$ са интегруеми върху измеримото по Жордан множество $G \subset \mathbb{R}^2$ и $f(x,y) \geq g(x,y)$ върху G

$\Rightarrow \iint_G f(x,y)\,dxdy \geq \iint_G g(x,y)\,dxdy$.

④ Ако $f(x,y)$ е интегруема върху измеримото по Жордан множество $G \subset \mathbb{R}^2 \Rightarrow |f(x,y)|$ е интегруема върху G. При това

$\left|\iint_G f(x,y)\,dxdy\right| \leq \iint_G |f(x,y)|\,dxdy$

⑤ Ако $f(x,y)$ е интегруема върху G и G' е измеримо подмножество на G, то $f(x,y)$ е интегруема и върху G'.

⑥ Ако $f(x,y)$ е интегруема върху измеримо по Жордан множество G и $G = G_1 \cup G_2$: G_1 и G_2 са измерими и $G_1^\circ \cap G_2^\circ = \emptyset$.

$\Rightarrow \iint_G f(x,y)\,dxdy = \iint_{G_1} f(x,y)\,dxdy + \iint_{G_2} f(x,y)\,dxdy$

(Т) Нека $f(x,y)$ е непрекъсната върху измеримото компактно свързано множество $G \subset \mathbb{R}^2$. Тогава съществува $(x_0, y_0) \in G$:

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy = f(x_0,y_0) . m(G).$$

D $f(x_0,y_0) = \dfrac{1}{m(G)} \iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy$ – СРЕДНА СТОЙНОСТ НА $f(x,y)$ в/у G.

(T) Доказателство:

$f(x,y)$ – непрекъсната върху G, което е компактно $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\ (x_1,y_1)$ и (x_2,y_2) от G:

$\forall (x,y)$: $f(x_1,y_1) \le f(x,y) \le f(x_2,y_2)\ \Big|\ \iint\limits_G$

$$\Rightarrow \iint\limits_G f(x_1,y_1)\,dx\,dy \le \iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy \le \iint\limits_G f(x_2,y_2)\,dx\,dy$$

$$\Rightarrow f(x_1,y_1) \cdot m(G) \le \iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy \le f(x_2,y_2)\, m(G)$$

$$\Rightarrow f(x_1,y_1) \le \frac{1}{m(G)} \iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy \le f(x_2,y_2)$$

G – свързано $\Rightarrow \exists (x_0,y_0) \in G$: $\boxed{f(x_0,y_0) = \dfrac{1}{m(G)} \iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy}$