15 + Неявни функции. Съществуване и диференцируемост на неявно зададена функция. Неявни функции, зададени чрез функционални уравнения.

Нека $F(x,y)$ е дефинирана в $\mathbb{R}^2$. Разглеждаме уравнението $F(x,y)=0$.

$\boxed{D}$ $\{(x,y): F(x,y)=0\} = G_F$ – графика на $F(x,y)=0$

$\boxed{D}$ $A_F = G_{F O_x} = \{x : (x,y)\in G_F\}$ – проекция на G_F върху абсцисната ос.

$P_r : G_F \to A_F$ – когато е взаимно еднозначно, можем да дефинираме $y=f(x) : A_F \to \mathbb{R} : F(x,f(x)) \equiv 0$.

$\Rightarrow$ функцията f е зададена неявно чрез уравнението $F(x,y)=0$

$\boxed{D}$ Ако $\exists [x_0-a, x_0+a]\times[y_0-b, y_0+b] = \Pi_{ab}(x_0,y_0)$ – правоъгълник и $\Pi_{ab}\cap G_F \to O_x$ е взаимно еднозначно, можем да зададем функция $y=f(x) : P_r(\Pi_{ab}\cap G_F)\to\mathbb{R}$:

$F(x,f(x))=0$ и я наричаме неявно зададена от $F(x,f(x))=0$

$\boxed{T}$ Нека $F(x,y)$ е дефинирана върху $U(x_0,y_0)$ и има непрекъснати частни производни $F'_x(x,y)$ и $F'_y(x,y)$ върху $U(x_0,y_0)$:

1) $F(x_0,y_0)=0 \to (x_0,y_0)\in G_F = \{(x,y): F(x,y)=0\}$

2) $F'_y(x_0,y_0) \Rightarrow \exists \Pi = [x_0-a, x_0+a]\times[y_0-b, y_0+b]$, върху който уравнението $F(x,y)=0$ определя неявно функцията $y=f(x)$:

1) $f(x)$ – непрекъснато диференцируема върху (x_0-a, x_0+a)

2) $f'(x_0) = \dfrac{F'_x(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)}$