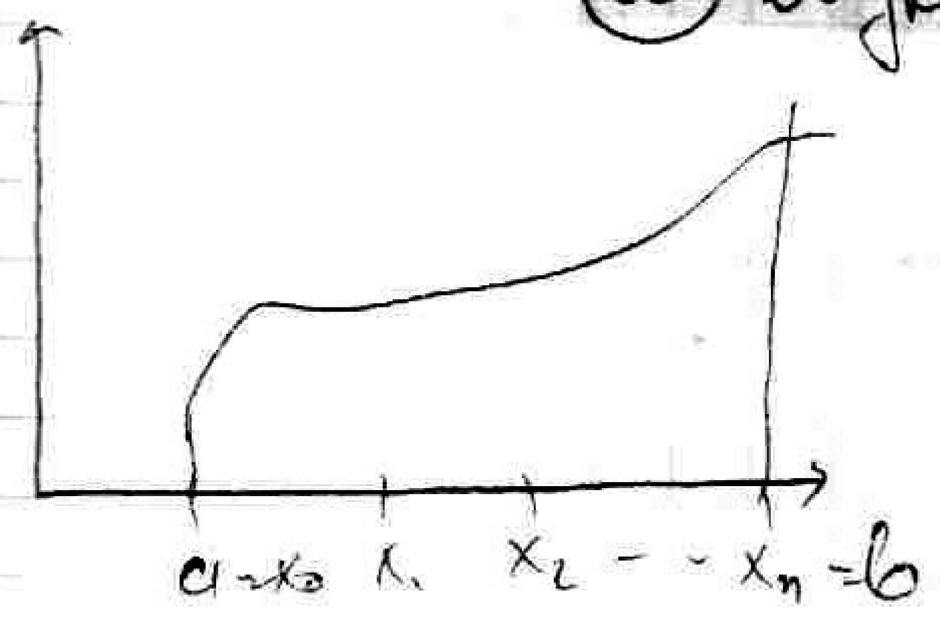
2) $D(x_0,y_0)<0 \Rightarrow (x_0,y_0)$ не е т. на лок. екстр.

3) $D=0$ – неопределеност

(23) Двукратен интеграл – определение, свойства.



$f(x)$ – деф $[a,b]$

$\tau=\{x_i\}_{i=0}^{n}$, $a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$

$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$, $\xi=\{\xi_i\}_{i=1}^{n}$,

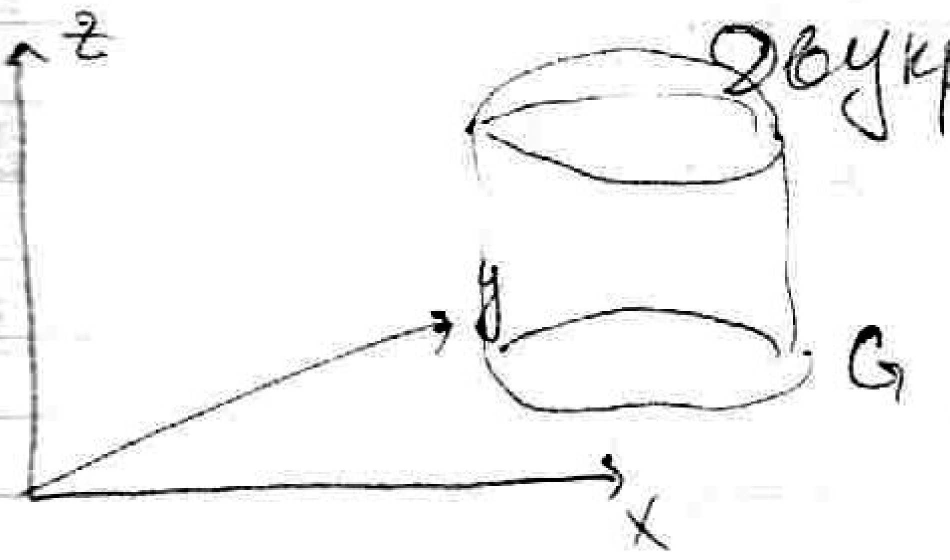
$\sigma_\tau(f,\xi)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

$\delta_\tau=\max \Delta x_i$

$\int_a^b f(x)=\lim_{\delta_\tau\to 0}\sigma_\tau(f,\xi)$

Двукратно определени интеграли



Нека $\tau=\{G_i\}_{i=1}^{n}$:

1) $G_i\subset G$, G_i – измеримо

2) $\bigcup_{i=1}^{n} G_i = G$

3) $G_i^\circ\cap G_j^\circ=\emptyset$, $\forall i,j=1\div n$, $i\neq j$

τ – разб. на G

$\forall i=1\div n$: $\xi_i(x_i,y_i)\in G(x_i,y_i)\in G_i$, $\xi=\{\xi_i\}_1^n$, $\sigma_\tau(f,\xi)=\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)m(G_i)$ ← сума на Риман

Деф $T\subset \mathbb{R}^2$: $d(T)=\max_{M,N\in T} d(M,N)=$
$=\max_{(x,y),(x',y')\in T} d((x,y),(x',y'))$ ← диаметър на T

$\delta_\tau=\max_{1\le i\le n} d(G_i)$ – големина на разбиването

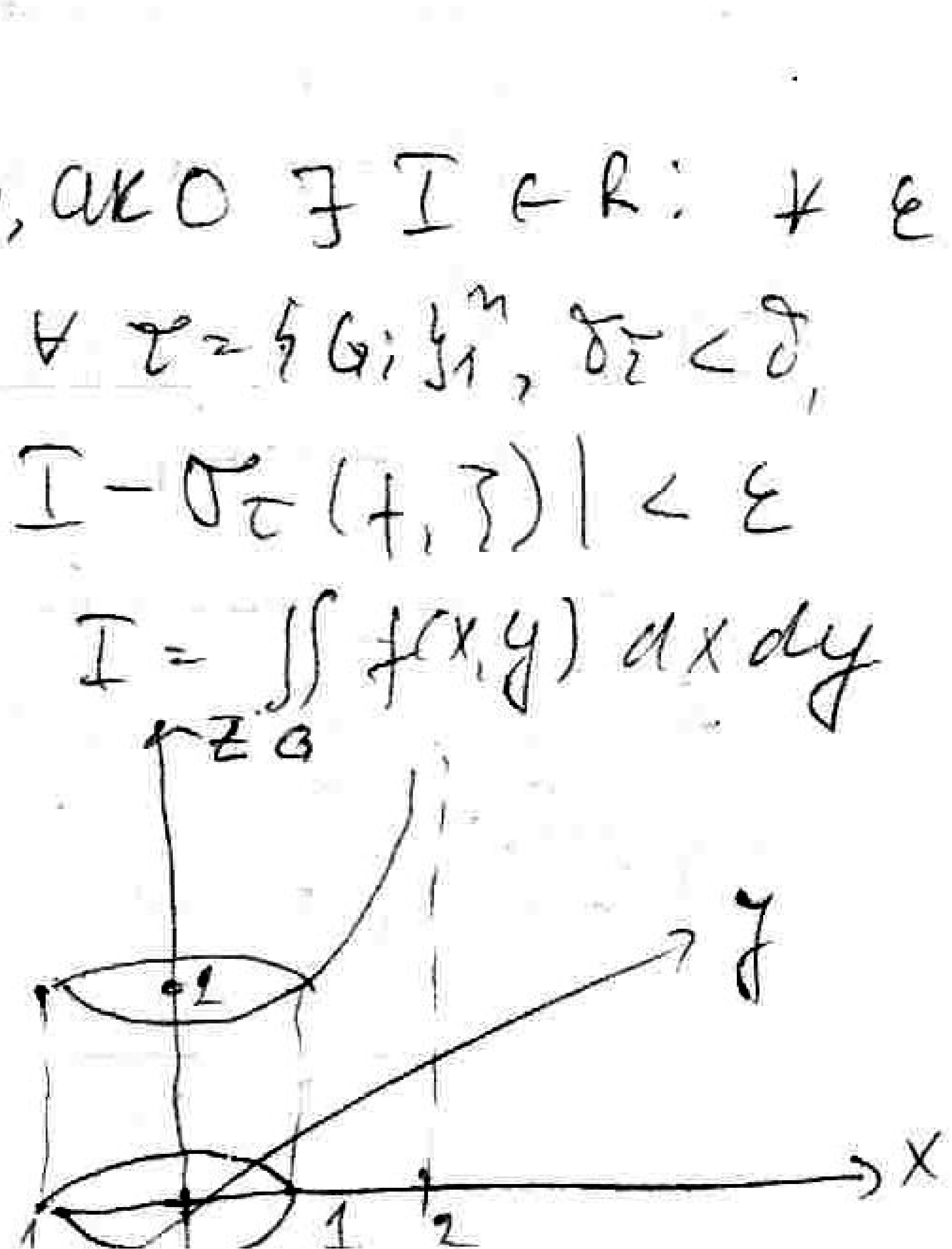
$\iint_G f(x,y)\,dx\,dy=\lim_{\delta_\tau\to 0}\sigma_\tau(f,\xi)$

Деф Казваме, че $f(x,y)$ е инт. в/у G, ако $\exists I\in\mathbb{R}$: $\forall\varepsilon>0$,
$\exists I\in\mathbb{R}$. $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$: $\forall\tau=\{G_i\}_1^n$, $\delta_\tau<\delta$,
$\forall\xi=\{\xi_i\}_1^n$, $\xi_i\in G_i$, $(i=1\div n)\Rightarrow |I-\sigma_\tau(f,\xi)|<\varepsilon$

I – двукр. инт. от $f(x,y)$ в/у G: $I=\iint f(x,y)\,dx\,dy$

Пример: $f(x,y)=\begin{cases}1, & x^2+y^2\le 1\\ \frac{1}{2-x}, & x\in[1,2)\end{cases}$

$f(x,y)$ неогр $\Rightarrow$ не е инт.



Деф | Нека $f(x,y)$ е огр. в/у G – изм. в м-во. Казваме, че $f(x,y)$ е същестевно огр. в/у G, ако $\exists\ E \subset G$, E – Жорданова мярка нула $f(x,y)$ е огр. в/у $G \setminus E$.

Деф | $f(x,y)$ – огр. в/у изм. м-во G. $\tau = \{G_i\}_1^n$ – разб. на G

$m_i = \inf_{(x,y)\in G_i} f(x,y)$, $M_i = \sup_{(x,y)\in G_i} f(x,y)$

$s_\tau = \sum_{i=1}^{n} m_i . m(G_i)$ – малка

$S_\tau = \sum_{i=1}^{n} M_i . m(G_i)$ – голяма

сума на Дарбу

Т (Кр. за интегр.) | $f(x,y)$ е инт. в/у изм. м-во $G \Leftrightarrow$
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon): \forall \tau = \{G_i\}_{i=1}^{n}, \delta_\tau < \delta \Rightarrow S_\tau < \varepsilon$

Д-во: (както при 1 пром.)

Т | Ако $f(x,y)$ е непр. в/у компл. изм. м-во $G \Rightarrow f(x,y)$ е инт. в/у

Свойства: G – измеримо:

1) $\iint_G f(x,y)\,dxdy = S(G)$

2) f и g – инт. в/у $G \Rightarrow f+g$, λf – инт. в/у G, при това
$\iint_G (\lambda f(x,y) + \mu g(x,y))\,dxdy = \lambda \iint_G f(x,y)\,dxdy + \mu \iint_G g(x,y)\,dxdy$

3) Ако $f(x,y) \geq 0$ и интегр. в/у $G \Rightarrow \iint_G f(x,y)\,dxdy \geq 0$

4) $G = G_1 \cup G_2$, $\{G_1, G_2\}$ – разб. на G, измерими ...
$\Rightarrow \iint_G f(x,y)\,dxdy = \iint_{G_1} f(x,y)\,dxdy + \iint_{G_2} f(x,y)\,dxdy$

5) Ако f е инт. в/у $G \Rightarrow |f|$ е инт. в/у G и
$\left| \iint_G f(x,y)\,dxdy \right| \leq \iint_G |f(x,y)|\,dxdy$

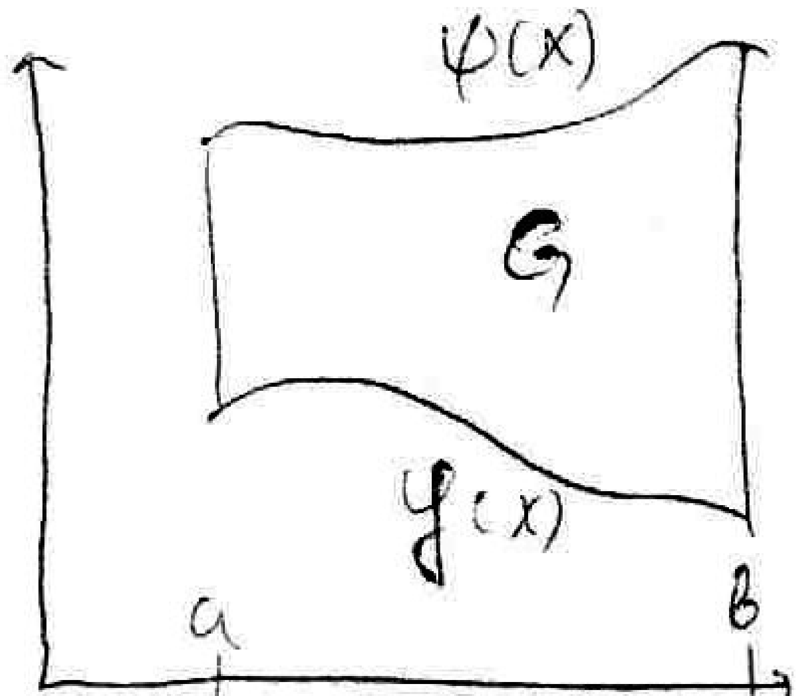
6) Ако f е непр. в/у свърз. комп. измер. м-во G =>

$\exists$ т. (x_0, y_0) : $\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy = f(x_0, y_0) \cdot m(G)$

$f(x_0, y_0) = \frac{1}{m(G)} \iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy$ = ср. ст. на $f(x,y)$ в/у G

(24) Свеждане на двукр. инт. към повторен.

Смяна на променливите в двукратен интеграл.



фигурата е измерима

Нека $G = \{(x,y) : a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$ — (криволинеен трапец)

и φ, ψ — непр. в/у $[a,b]$ — ф-ции на x

Т] $\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right] dx$

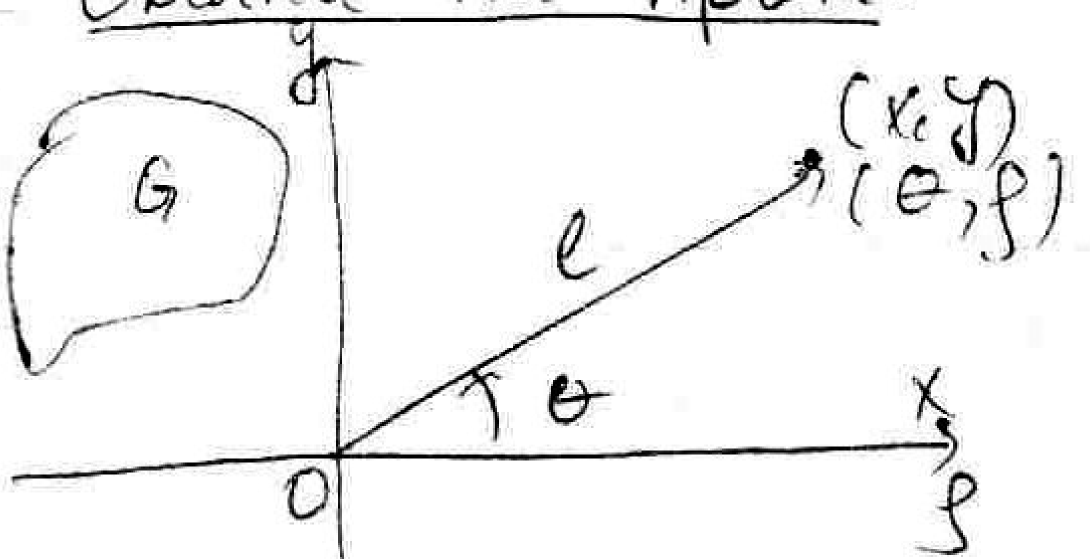
$F(x)$ — повторен интеграл

x — фикс. парам.

Ф-та е отн. y, в инт. в границите

последично интегр. ф-ции на 1 пром

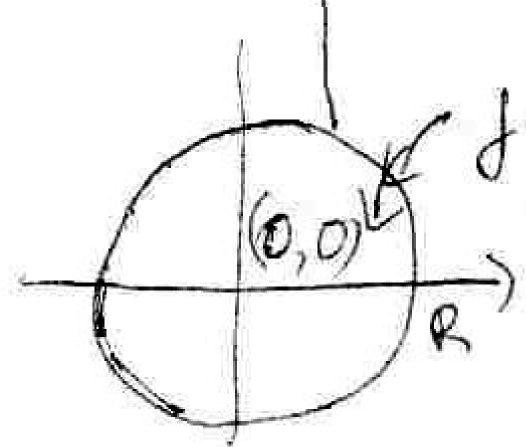
• Смяна на пром.



$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$, $\rho \ge 0$, $0 \le \theta \le 2\pi$

$$\boxed{\iint\limits_{G\,д.к.} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{G\,п.с.} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,\rho\,d\theta\,d\rho}$$

Декартова к.с. — полярна с-ма



$f(x,y)$ в целия деф.

$K : x^2 + y^2 \le R^2$

$K : 0 \le \theta \le 2\pi$
$0 \le \rho \le R$

$$\iint\limits_{K\,д.с.} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{K\,п.с.} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,\rho\,d\theta\,d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^R f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,\rho\,d\theta \right] d\rho$$