(22) Локален екстр. на ф-я на 2 пром. – необх. и дост. усл.

D| $f(x)$ е деф. в/у $X \subset \mathbb{R}$; $x_0 \in X$

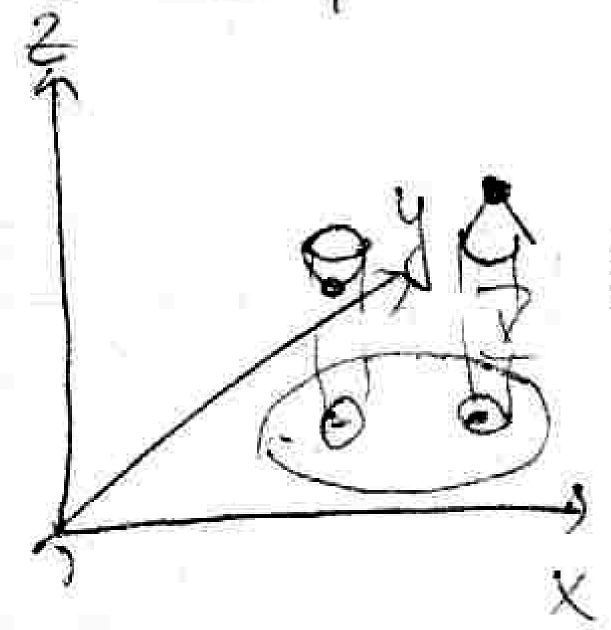
1) Казваме, че т. x_0 е т. на лок. max, ако $\exists (x_0-\delta, x_0+\delta) \subset X$:
$\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \to f(x) \leq f(x_0)$

2) т. x_0 – т. на лок. min, ако $\exists (x_0-\delta, x_0-\delta) \subset X$:
$\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \to f(x) \geq f(x_0)$

D| Нека $f(x,y)$ е деф. в/у $X \subset \mathbb{R}^2$, $(x_0,y_0) \in X$.

Казваме, че: 1) т. (x_0,y_0) е т. на лок. max, ако $\exists B_\delta(x_0,y_0) \subset X$:
$\forall (x,y) \in B_\delta(x_0,y_0) \Rightarrow f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$

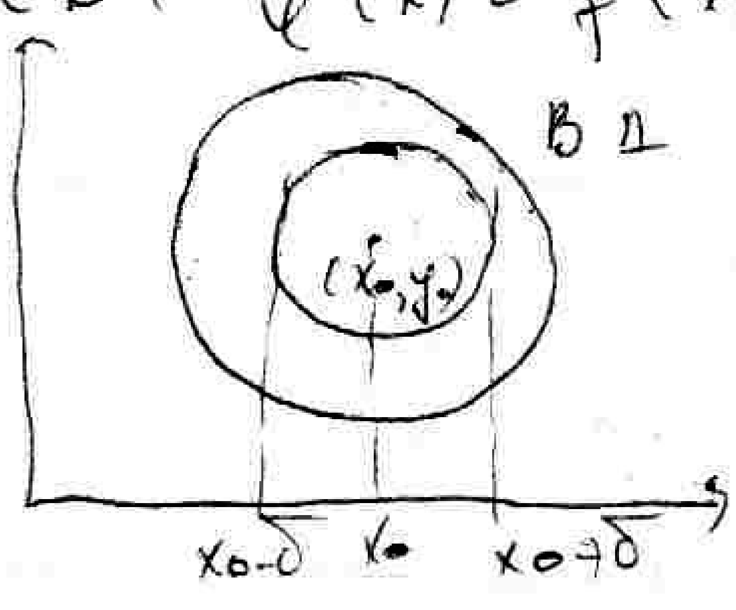
2) т. (x_0,y_0) – т. на лок. min, ако $\exists B_\delta(x_0,y_0) \subset X$:
$\forall (x,y) \in B_\delta(x_0,y_0) \Rightarrow f(x,y) \geq f(x_0,y_0)$



Т (НУ)| Нека $f(x,y)$ е деф. в/у $B_\Delta(x_0,y_0)$ и (x_0,y_0) е т. на лок. екстр на $f(x,y)$. Ако $\exists\ \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x/y} \Rightarrow \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x//y} = 0$

Д-во:

Нека т. (x_0,y_0) е т. на лок. max (за опр.) $\Rightarrow$
$\exists B_\delta(x_0,y_0): \forall (x,y) \in B_\delta(x_0,y_0) \to f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$.
Нека $\varphi(x) = f(x,y_0)$ в/у $(x_0-\delta, x_0+\delta) \Rightarrow$



$\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \Rightarrow \varphi(x) = f(x,y_0) \leq f(x_0,y_0) = \varphi(x_0)$
$\Rightarrow$ т. x_0 – лок. max за $\varphi(x)$
$\Rightarrow \varphi'(x_0) = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = 0$ (Т. 3-то, $\exists$ частна пр. отн. x)

Аналог. за y.

Деф| т. (x_0,y_0): $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = 0 \Rightarrow$ т. (x_0,y_0) – <u>стационарна точка</u>

ТD (ДУ)| (само за 2 пром.!) Нека $f(x,y)$ е непр. заедно със своите ч. пр. до 2-ри ред в ок. $B_\Delta(x_0,y_0)$ и $f'_x(x_0,y_0)=0$, $f'_y(x_0,y_0)=0$

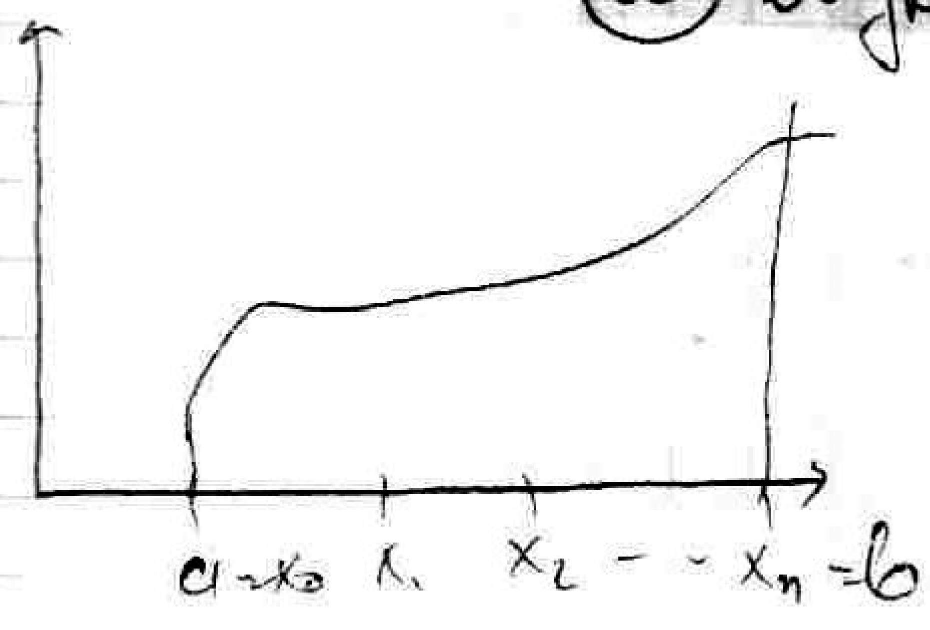
Нека $D(x_0,y_0) = f''_{xx}(x_0,y_0) \cdot f''_{yy}(x_0,y_0) - [f''_{xy}(x_0,y_0)]^2$. Тогава, ако:

1) $D(x_0,y_0) > 0 \Rightarrow$ т. (x_0,y_0) – т. на лок. екстр. при това, ако:
1.1) $f''_{xx}(x_0,y_0) > 0$ – min   1.2) $f''_{xx}(x_0,y_0) < 0$ – max

2) $D(x_0,y_0) < 0 \Rightarrow (x_0,y_0)$ не е т. на лок. екстр.

3) $D=0$ – неопределеност

(23) Двукратен интеграл – определение, свойства.



$f(x)$ – деф. $[a,b]$

$\tau = \{x_i\}_{i=0}^{n}$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

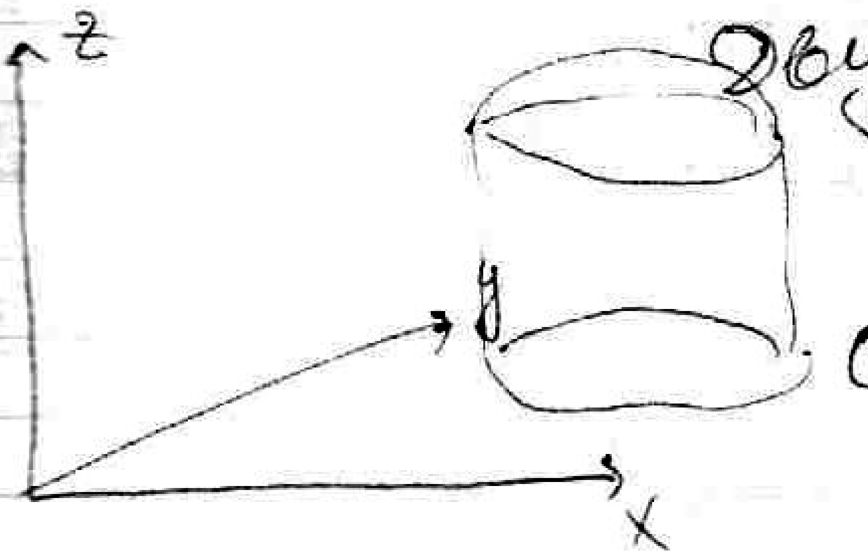
$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^{n}$,

$\sigma_\tau(f,\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

$\delta_\tau = \max \Delta x_i$

$\int_a^b f(x) = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau(f,\xi)$



Двукратно определени интеграли

Нека $\tau = \{G_i\}_{i=1}^{n}$:

1) $G_i \subset G$, G_i – измеримо

2) $\bigcup_{i=1}^{n} G_i = G$

3) $G_i^0 \cap G_j^0 = \emptyset$, $\forall i,j = 1 \div n$, $i \neq j$

τ – разб. на G

$\forall i = 1 \div n$: $\xi_i(x_i,y_i) \in G(x_i,y_i) \in G_i$, $\xi = \{\xi_i\}_1^n$, $\sigma_\tau(f,\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)m(G_i)$ ← сума на Риман

Деф. $T \subset \mathbb{R}^2$: $d(T) = \max_{M,N \in T} d(M,N) = \max_{(x,y),(x',y') \in T} d((x,y),(x',y'))$ ← диаметър на T

$\delta_\tau = \max_{1 \le i \le n} d(G_i)$ – големина на разбиването

$\iint_G f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau(f,\xi)$

Деф. Казваме, че $f(x,y)$ е инт. в/у G, ако $\exists I \in \mathbb{R}$: $\forall \varepsilon > 0$,
$\exists I \in \mathbb{R}$. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$: $\forall \tau = \{G_i\}_1^n$, $\delta_\tau < \delta$,
$\forall \xi = \{\xi_i\}_1^n$, $\xi_i \in G_i$, $(i = 1 \div n) \Rightarrow |I - \sigma_\tau(f,\xi)| < \varepsilon$

I – двукр. инт. от $f(x,y)$ в/у G: $I = \iint f(x,y)\,dx\,dy$

Пример: $f(x,y) = \begin{cases} 1, & x^2+y^2 \le 1 \\ \frac{1}{2-x}, & x \in [1,2) \end{cases}$

$f(x,y)$ неогр. $\Rightarrow$ не е инт.