I] Ако ф-та $f(x,y)$ е непр. в/у свързаното м-во $\bar{X} \subset R^2$ и

∃ $(x_0,y_0)(x_1,y_1) \in \bar{X}$, $f(x_0,y_0)\cdot f(x_1,y_1)<0 \Rightarrow$:

∃ $(c,d)\in \bar{X}$: $f(c,d)=0$

Д-во:

т.к. $\bar{X}$ е свързано м-во $\Rightarrow$ ∃ криви линии l (непр.)

$l: \begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t)\end{cases}, t\in[\alpha,\beta]$ и $(x(\alpha),y(\alpha))=(x_0,y_0)$, $(x(\beta);y(\beta))=(x_1,y_1)$ и $l\subset \bar{X}$

Образуваме ф-та $h(t)=f(x(t),y(t))$, $t\in[\alpha,\beta]$ (непр. в/у $[\alpha,\beta]$)

и $h(\alpha)\cdot h(\beta)=f(x(\alpha),y(\alpha))\cdot f(x(\beta),y(\beta))=$

$=f(x_0,y_0)\cdot f(x_1,y_1)<0 \xRightarrow{\text{т. от Ан. I}} \exists\, t_0\in(\alpha,\beta): h(t_0)=0$, но $h(t_0)=\underset{0}{f(x(t_0),y(t_0))}$

т.е. в т. $(c,d)=(x(t_0),y(t_0))$ ф-та $f(x,y)$ се нанулира в (c,d)

Деф] Нека $f(x,y)$ е деф. в/у $\bar{X}\subset R^2$. Казваме, че $f(x,y)$ е равном. непр. в/у $\bar{X}$, ако $\forall\, \varepsilon>0, \exists\, \delta=\delta(\varepsilon)>0$:

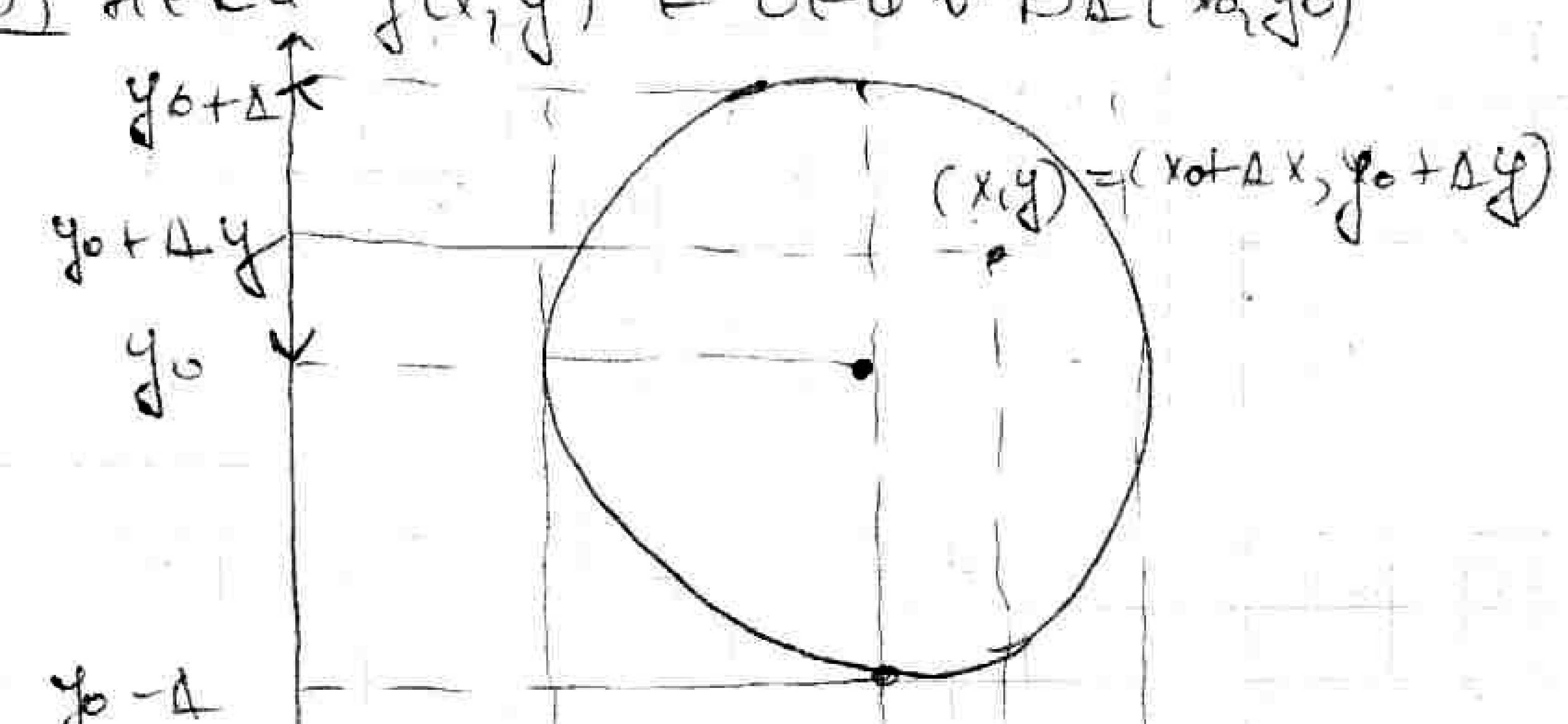
$\forall (x',y'),(x'',y'')\in\bar{X}$: $d((x',y'),(x'',y''))<\delta \Rightarrow$

$|f(x',y')-f(x'',y'')|<\varepsilon$

Т] Ако ф-та $f(x,y)$ е непр. в/у комп. м-во $\bar{X}\subset R^2 \Rightarrow$ $f(x,y)$ е равном. непр. в/у $\bar{X}$ //Док. от Ан. I

21. Частни производни. Диференцируемост, пълен диференциал. Достат. усл. за диференцируемост. Частни пр. от по-висок ред, равенство на смесените производни.

D] Нека $f(x,y)$ е деф. в $B_\Delta(x_0,y_0)$



$\varphi(x)=f(x,y_0)$

$x\in(x_0-\Delta,\ x_0+\Delta)$

Ако ∃ $\varphi'(x_0)$, то тази производна е първа частна производна на $f(x,y)$ в т. (x_0,y_0) по пром. x.

$$\varphi'(x_0)=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=f'_x(x_0,y_0)=$$

$$f_x(x_0,y_0)$$

$$\varphi'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}.$$

Аналог. ако $\psi(y)=f(x_0,y)$, $y\in(y_0-\Delta,\ y_0+\Delta)$, то $\psi'(y_0)$ се нарича първа ч. пр. на $f(x,y)$ в т. (x_0,y_0) по пром. y.

$\varphi'(y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = f'_y(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0)$ – озн.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ – оператор, не частно!

Пример: $f(x,y) = xy^2 e^{x-y}$

$\frac{\partial f}{\partial x} = (xy^2 e^{x-y})'_x = y^2 (x e^{x-y})'_x = y^2(e^{x-y} + x . e^{x-y} . 1) =$ пр. спрямо x

$= (1+x) y^2 e^{x-y}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = (xy^3 e^{x-y})'_y = x(y^2 e^{x-y})'_y = x(2y e^{x-y} + y^2 . e^{x-y}(-1)) =$

$= xy(2-y) e^{x-y}$

Def| $y = f(x)$ деф в $(x_0 - \Delta, x_0 + \Delta)$. Ф-та $f(x)$ е диф. в т. x_0, ако $\exists A \in \mathbb{R}$: $\Delta f = f(x) - f(x_0) = \underline{A(x - x_0)} + \alpha(x - x_0)$, където $\lim_{x \to x_0} \alpha(x - x_0) = 0$,

$df(x_0) = A(x - x_0)$ – диференциал

$df(x_0) = f'(x_0) dx$, $f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx}$

T| Ако $f(x)$ е диф. в т. x_0, то $f(x)$ е непр.

T| $f(x)$ е диф. в т. $x_0 \Leftrightarrow \exists f(x_0)$. При това $A = f'(x_0)$

Деф| Нека $f(x,y)$ е деф. в $\Delta(x_0, y_0)$, ако $\exists A, B \in \mathbb{R}$:

$(*)\ \Delta f = f(x,y) - f(x_0,y_0) = A(x - x_0) + B(y - y_0) + \alpha_1(x - x_0, y - y_0).(x - x_0) +$
$+ \alpha_2(x - x_0, y - y_0)$, където $\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} \alpha_i(x - x_0, y - y_0) = 0$, $i = 1, 2$

Деф| $df(x_0, y_0) = A(x - x_0) + B(y - y_0)$ – диференциал

Т1| Ако $f(x,y)$ е диф. в т. $(x_0, y_0) \Rightarrow f(x,y)$ е непр. в т. (x_0, y_0)

Д-во:

$f(x,y)$ е диф. в т. $(x_0,y_0) \Rightarrow$ е в сила тв. $(*) \Rightarrow$

$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} [f(x,y) - f(x_0,y_0)] = \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} [A(x - x_0) + B(y - y_0) + \alpha_1(x - x_0, y - y_0).(x - x_0) +$
$\alpha_2(x - x_0, y - y_0)(y - y_0)] =$

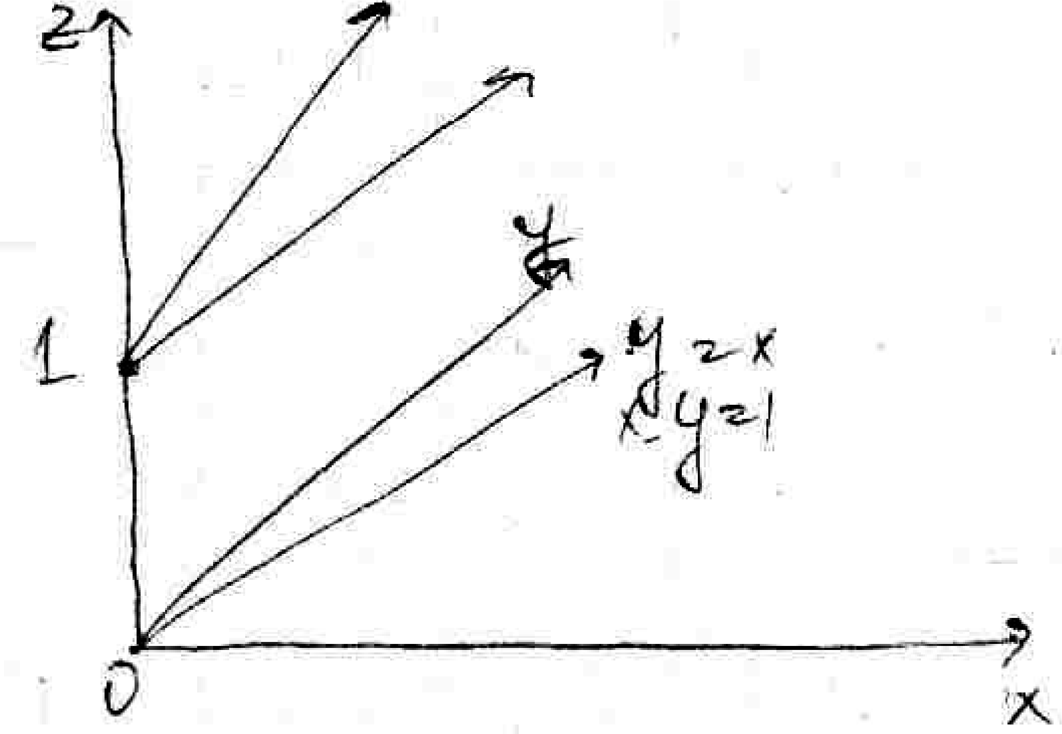
$= A . \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} (x - x_0) + B \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} (y - y_0) + \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} \alpha_1(x - x_0, y - y_0) \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} (x - x_0) + \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} \alpha_2(x - x_0, y - y_0) . \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} (y - y_0)$

$= A.B + B.0 + 0.0 + 0.0 = \underline{0}$

$\Rightarrow \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0) \overset{\text{деф.}}{\Rightarrow} f(x,y)$ е непр. в т. (x_0, y_0)

Т2| Ако $f(x,y)$ е диф. в т. (x_0,y_0) и $d(x_0,y_0) = A(x - x_0) + B(y - y_0)$ – диференциала на $f(x,y)$ в т. $(x_0,y_0) \overset{(*)}{\Rightarrow} \exists \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$, при това

$A = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$, $B = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$



Пример: $f(x,y) = \begin{cases} 0, & xy = 0 \\ 1, & xy \neq 0 \end{cases}$ (II Oxy)

$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 0$

$f(x,y)$ е прек. в т. $(0,0)$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} f(x,x) = 1 \neq f(0,0) = 0 \Rightarrow$ ф-та действ. е прек. в т. $(0,0)$

$\Rightarrow f(x,y)$ не е диф. в т. $(0,0)$

Д-во:

1) $f(x,y)$ е диф. в т. $(x_0, y_0) \Rightarrow f(x,y) - f(x_0,y_0) = A(x - x_0) + B(y - y_0) + \alpha_1(x - x_0) + \alpha_2(y - y_0)$,

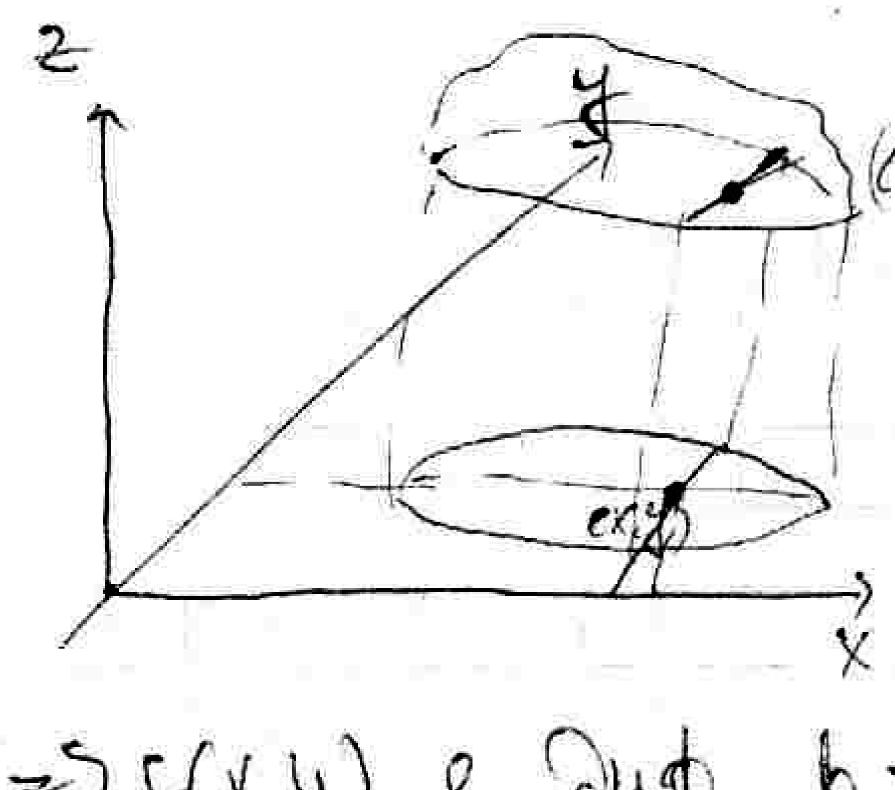
$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \alpha_i = 0$

$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{A(x-x_0) + \alpha_1(x - x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x\to x_0}(A + \alpha_1) = A + \lim\limits_{x\to x_0}\alpha_1 = A + 0 = A$

↳ пр. частна по x

$\Rightarrow \exists \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = A$

2) B - аналогично



доп. равнина: α: $z = f(x_0,y_0) = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y - y_0)$

Т(ДУ) Нека ф-та $f(x,y)$ има $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ в $(x,y) \in B_\Delta(x_0,y_0)$ и $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ са непр. в т. (x_0,y_0)

$\Rightarrow f(x,y)$ е диф. в т. (x_0,y_0)

Д-во:

$\forall (x,y) \in B_\Delta(x_0,y_0)$, $(x,y) \neq (x_0,y_0)$ и нека $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$ $\quad \varphi(x) = f(x, y_0 + \Delta y)$, $\psi(x) = f(x_0, y)$

$\Delta f = f(x,y) - f(x_0,y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0,y_0) =$

$= [\underbrace{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)}_{\varphi(x_0+\Delta x) - \varphi(x)}] + [\underbrace{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0,y_0)}_{\psi(y_0+\Delta y) - \psi(y_0)}] =$

$\exists\, 0<\theta_1,\ \theta_2<1 \quad f'_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y)\Delta x + f'_y(x_0, y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y =$

$= f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y + [\underbrace{f'_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y) - f'_x(x_0,y_0)}_{\alpha_1(\Delta x,\Delta y)}]\Delta x +$

$+ [\underbrace{f'_y(x_0, y_0+\theta_2\Delta y_0) - f'_y(x_0,y_0)}_{\alpha_2(\Delta x,\Delta y)}]\Delta y =$

$= f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y + \alpha_1\underbrace{(\Delta x,\Delta y)}\Delta x + \alpha_2\underbrace{(\Delta x,\Delta y)}\Delta y$

тр. да док, че $\to 0$

$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \overbrace{\alpha_1(\Delta x,\Delta y)}^{x} = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} [f'_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y) - f_x(x_0,y_0)]$

огр. $\downarrow 0$

$(\Delta x,\Delta y)\to(0,0) \Rightarrow (x_0+\theta_1\cdot\Delta x, y_0+\Delta y)\to(x_0,y_0) \Rightarrow f'_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y) \downarrow f'_x(x_0,y_0)$

// частните пр. са непр. в (x_0,y_0)

$\Rightarrow x = 0$

Аналог. $\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \alpha_2(\Delta x,\Delta y) = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} [f'_y(x_0, y_0+\theta_2\cdot\Delta y) - f'_y(x_0,y_0)] = 0$

$\Rightarrow f(x,y)$ е диф. в т. (x_0,y_0)

• $f(x,y)$ е диф. в $\mathring{B}_\Delta(x_0,y_0)$ и $\exists\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ и $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ за $\forall$ $(x,y)\in B_\Delta(x_0,y_0)$ и:

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = f''_{x^2}$

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x} = f''_{yx}$ – смесена частна пр. от 2ри ред

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y} = f''_{xy}$ см. ч. пр. от 2ри р.

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = f''_{y^2}$

<u>Пример</u>: $f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\partial y} = 1 \neq \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y\partial x} = -1$ – смесените пр. са $\neq$

<u>Т (рав. на смесените пр.)</u>: Нека $f(x,y)$ е диф. и $\exists\ f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ в/у $B_\Delta(x_0,y_0)$. Ако f''_{xy} и f''_{yx} са непр. в т. (x_0,y_0), то

$f''_{xy}(x_0,y_0) = f''_{yx}(x_0,y_0)$