

$$4) \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, R=1$$

$$x \in R \quad (1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, R=1$$

$$x \in R \rightarrow \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} \quad \left(\binom{n}{0} = 1 \right)$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, R=1$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, R=1$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, R=1$$

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

Функции на две независимы переменные
величины - граница, непрерывность.

$$\overline{X} \subset R$$

$$f: \forall x \in \overline{X} \xrightarrow{f} y \in R, y = f(x) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{ф-я на 1 независимой} \\ \text{проп. величина} \end{array} \right.$$

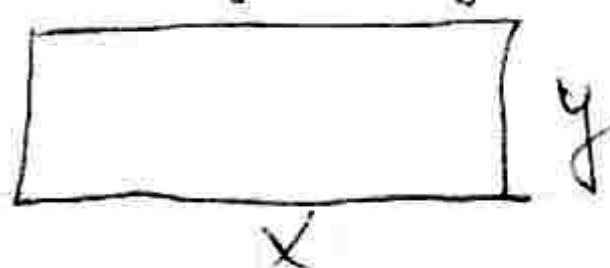
$$R^2 = R \times R = \{(x, y) : x, y \in R\}$$

$$\overline{X} \subset R^2$$

$$f: \overline{X} \rightarrow R$$

$$\text{пр } f \circ \pi: \forall (x, y) \in \overline{X} \xrightarrow{f \circ \pi} z \in R$$

$$z = f(x, y)$$



$$S = S(x, y) = x \cdot y \quad (x > 0, y > 0)$$

Пример: $f(x, y) = x \cdot y$
 $\left. \begin{array}{l} x = e^u \\ y = e^v \end{array} \right\}$

$$\left. \begin{array}{l} x = u \cdot v \\ y = u \cdot e^v \end{array} \right\}$$

$$z = (u, v) = f(u, v, u \cdot e^v) = u \cdot u \cdot e^v = u^2 \cdot e^v$$

$$d(x, y) = |x - y|$$

$$x_0 - \delta \quad x_0 \quad x_0 + \delta$$

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \sim \{x : |x - x_0| < \delta\} = \{x : d(x, x_0) < \delta\}$$

$$(x_0, y_0) \in R^2$$

$$\delta > 0$$

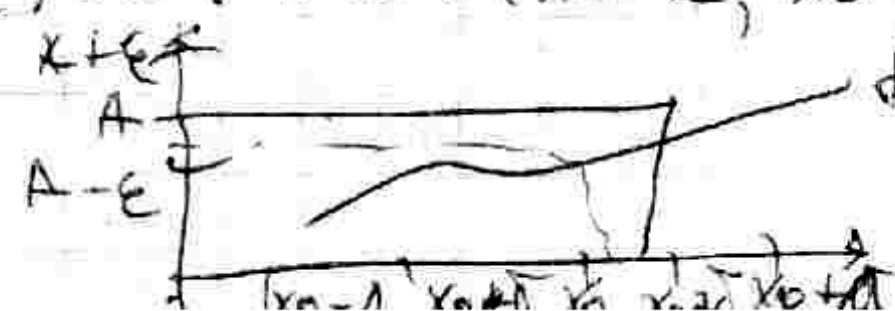
$$B_\delta(x_0, y_0) = \{(x, y) : d((x, y), (x_0, y_0)) < \delta\}$$

$$d((x, y), (x_0, y_0)) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

$$S_\delta(x_0, y_0) = \{(x, y) : d((x, y), (x_0, y_0)) < \delta\}$$

$$\text{Нека } f: D \rightarrow R \text{ е } f(x) \in \mathcal{O} \in \mathcal{O} \quad (x_0 - \Delta, x_0 + \Delta) \mid x_0$$

$$D \mid A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \text{ ако } \forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), x \neq x_0, |A - f(x)| < \varepsilon$$



Def 1 Нека $z = f(x, y)$ е деф $B \Delta (x_0, y_0) \setminus \{(x_0, y_0)\}$

казваме, че $A = \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$, ако: $\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$:

$$\forall (x, y) \in B \Delta (x_0, y_0), (x, y) \neq (x_0, y_0) \text{ и } d((x, y), (x_0, y_0)) < \delta \Rightarrow |A - f(x, y)| < \epsilon$$

Уопйство 1) $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = A$ е единствена

2) Def 1 казваме, че ϕ -та $f(x, y)$ е опр. б/у нн. $\mathbb{R}$ с k ако $\exists M > 0: \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow |f(x, y)| \leq M$

$\Rightarrow$ 2) Ако $\exists \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$, то $\exists B \delta (x_0, y_0): f(x, y)$ е опр. б/у

$$B \delta (x_0, y_0) \setminus \{(x_0, y_0)\}$$

3) Ако $\exists \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = A, A \neq 0$, то

3.1) Ако $A > 0$, то $\exists B \delta (x_0, y_0): \forall (x, y) \in B \delta (x_0, y_0),$

$$(x, y) \neq (x_0, y_0) \Rightarrow f(x, y) > 0$$

$$3.2) \text{ Ако } A < 0, \text{ то } \frac{f(x, y)}{g(x, y)} < 0$$

4) ~~3.2)~~ Ако $f(x, y) \leq g(x, y) \forall (x, y) \in B \Delta (x_0, y_0) \setminus \{(x_0, y_0)\}$

$$\text{и } \exists \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = A \quad \text{то } A \leq B$$

$$\exists \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} g(x, y) = B$$

5) Ако $\exists \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$ и $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} g(x, y)$, то $\Leftrightarrow$

$$\exists \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} [f \pm g](x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) \pm \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} g(x, y) \quad (\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} g(x, y) \neq 0)$$

6) Ако $f(x, y) \leq h(x, y) \leq g(x, y)$ б/у $B \Delta (x_0, y_0) \setminus \{(x_0, y_0)\}$ и

$$\exists \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) \text{ и } \exists \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} g(x, y) \text{ и те са равни на } l \Rightarrow$$

$$\exists \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} h(x, y) = l \quad (\text{т-ка за 2-та теорема})$$

* δ -ба за ϵ

Def 2 Нека $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n), \dots$ казваме, че $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (x_0, y_0)$, ако $\forall \epsilon > 0, \exists N > 0 \Rightarrow d((x_n, y_n), (x_0, y_0)) < \epsilon$

Def 3 Редица от точки $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0) \Leftrightarrow$

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \rightarrow x_0 \text{ и } y_1, y_2, \dots, y_n, \dots \rightarrow y_0$$

2-го:

$\Rightarrow$ | Если $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (x_0, y_0) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon), \forall n > N \Rightarrow$

$$\varepsilon \rightarrow d((x_n, y_n), (x_0, y_0)) = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} \geq \begin{cases} |x_n - x_0| \\ |y_n - y_0| \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$$

$\Leftarrow$ | Если $x_1, x_2, \dots, x_n \rightarrow x_0$ и $y_1, y_2, \dots, y_n \rightarrow y_0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon):$
 $\forall n > N \rightarrow |x_n - x_0| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $|y_n - y_0| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$d((x_n, y_n), (x_0, y_0)) = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} < \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2}} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (x_0, y_0)$$

Пример: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right) = (0, 1)$

$\bullet x(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$ // точка с число

$\bullet (x, y) + (z, t) = (x+z, y+t)$ // сумма на точки

Def (Хейне) | Если $f(x)$ ^{принимает значения} ~~принимает значения~~ $\text{def. в } (x_0 - \Delta, x_0 + \Delta) \setminus \{x_0\}$. Назовем, что

$A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, ако $\forall x_1, x_2, \dots, x_n \rightarrow x_0: x_n \neq x_0, x_n \in (x_0 - \Delta, x_0 + \Delta) \Rightarrow$

$$f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n) \rightarrow A$$

Def (Хейне) | Если $z = f(x, y)$ ^{принимает значения} ~~принимает значения~~ $\text{def. в } B_\Delta(x_0, y_0) \setminus \{(x_0, y_0)\}$.

Назовем, что $A = \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$ ако

$$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0)$$

$$(x_n, y_n) \neq (x_0, y_0), (x_n, y_n) \in B_\delta(x_0, y_0) \Rightarrow f(x_1, y_1), f(x_2, y_2), \dots, f(x_n, y_n) \rightarrow A$$

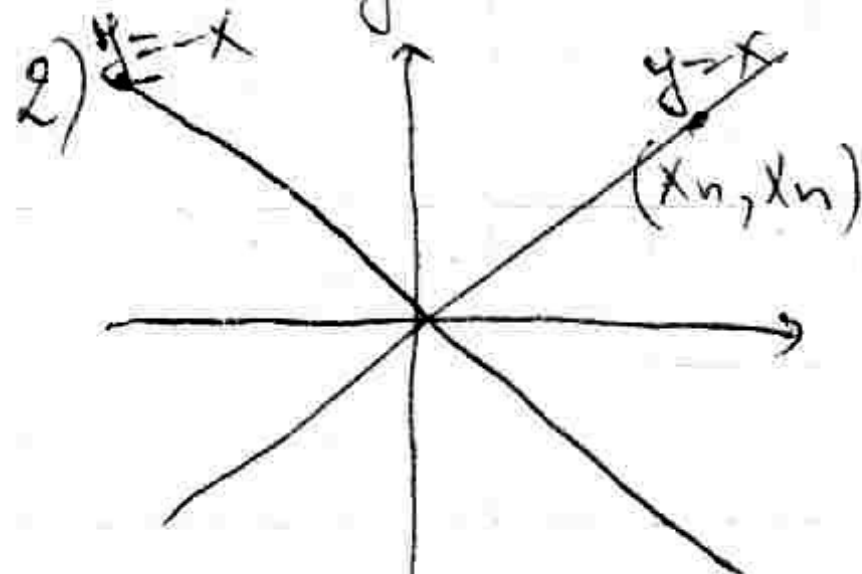
Хейне $\Leftrightarrow$ Хейне

Пример 1) $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 + y^2}$
 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \sqrt[3]{x^2 + y^2}$
 $\forall (x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (0, 0) \Leftrightarrow$

произвольная фиксировка

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_n \rightarrow 0 \\ y_n \rightarrow 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_n^2 \rightarrow 0 \\ y_n^2 \rightarrow 0 \end{cases} \Rightarrow x_n^2 + y_n^2 \rightarrow 0 + 0 = 0 \xrightarrow{\text{н.к. н.р.}} \sqrt[3]{0} = 0$$

$$\sqrt[3]{x_n^2 + y_n^2} \rightarrow \sqrt[3]{0} \Rightarrow \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \sqrt[3]{x^2 + y^2} = 0$$



$$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}, D(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

$$1) \{(x_n, x_n)\}_{n=1}^\infty, x_n \neq 0$$

$$(x_n, x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (0, 0)$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(x_n, x_n) = \frac{2x_n^2}{x_n^2 + x_n^2} = \frac{2x_n^2}{2x_n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

$$ii) (x_n, x_n), x_n \neq 0, (x_n, -x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (0, 0)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}: f(x_n, -x_n) = \frac{-2x_n^2}{x_n^2 + (-x_n^2)} = \frac{-2x_n^2}{2x_n^2} = -1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -1$$

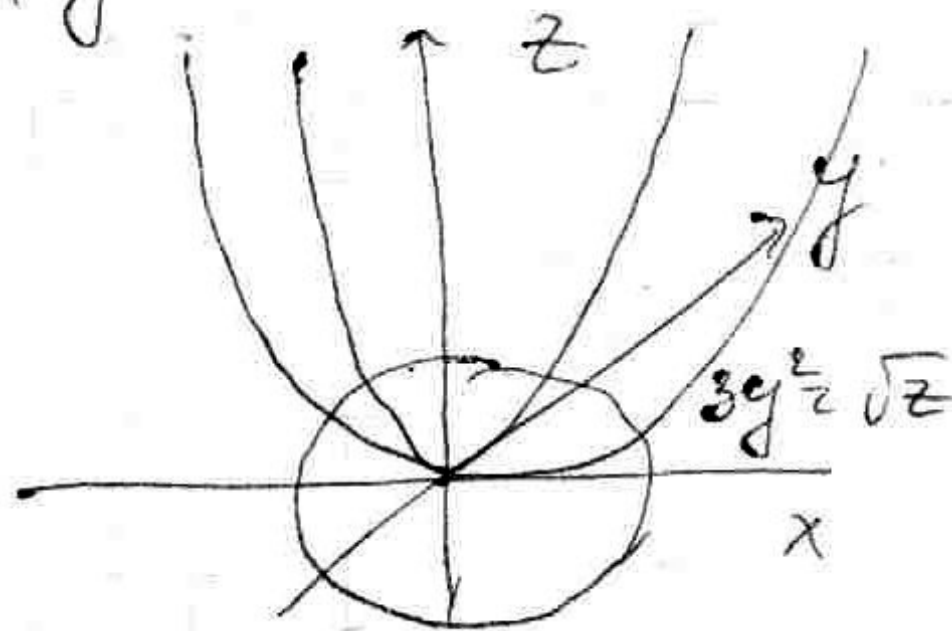
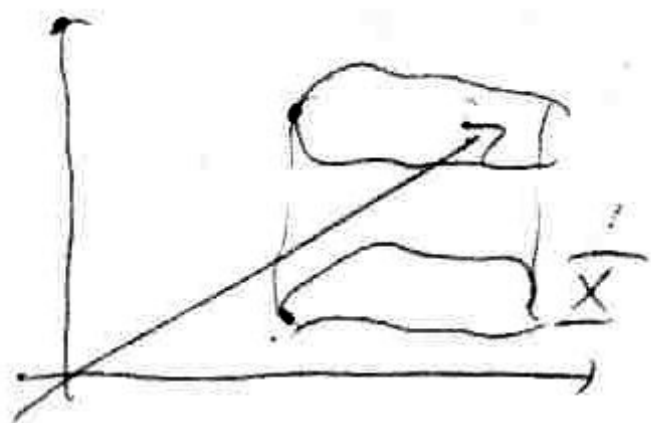
$\Rightarrow \nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$ // i и ii не клонят към 1 число

Def 1 $z = f(x, y)$ $\partial \in \mathbb{C}$ $\forall y \in \mathbb{R}^2$

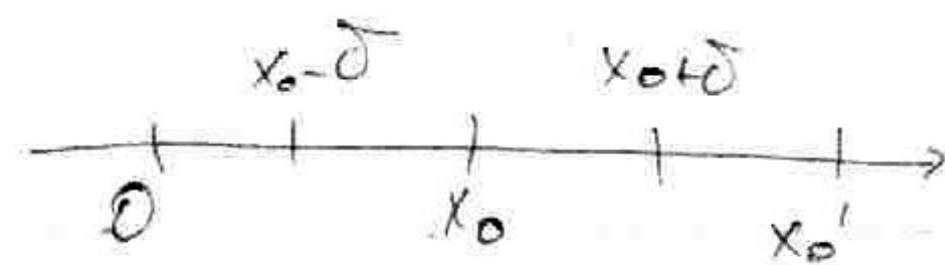
$$\Gamma_f = \{(x, y), f(x, y) : (x, y) \in \bar{X}\}$$

$\hookrightarrow$ графика на ф-я

Пример 1 $z = f(x, y) = x^2 + y^2$



$$x^2 + y^2 = r^2 / \text{окр. с рад. } r$$

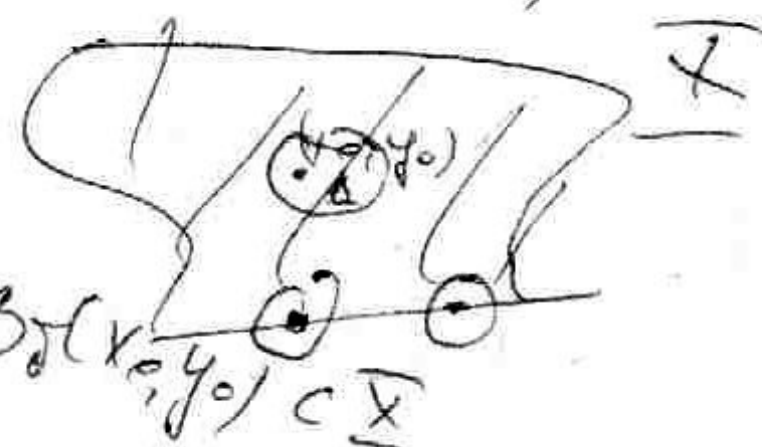


Def 1 Назовем, что x_0 - т. на $\bar{X}$, если $\forall \delta > 0: X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \neq \emptyset$

Def 1 $\bar{X} \subset \mathbb{R}^2, (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ Назовем, что (x_0, y_0) е т. на $\bar{X}$, если $\forall \delta > 0: \bar{X} \cap B_\delta(x_0, y_0) \setminus \{(x_0, y_0)\} \neq \emptyset$

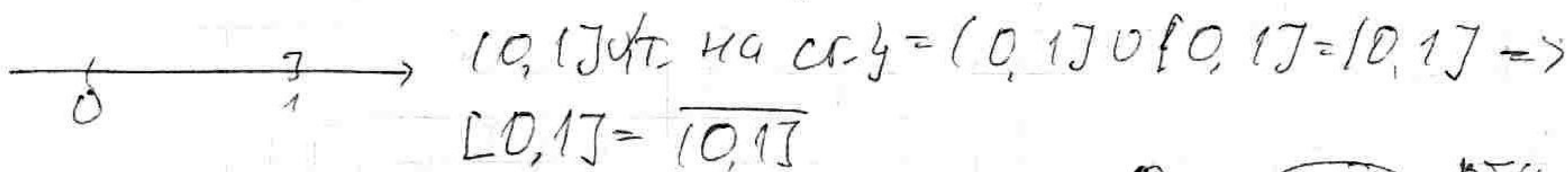
Def 1 $\bar{X} \subset \mathbb{R}^2, (x_0, y_0) \in \bar{X}$ Назовем, что (x_0, y_0) е

внутренняя т. на $\text{ли. } \bar{X}$, если $\exists B_\delta(x_0, y_0) : B_\delta(x_0, y_0) \subset \bar{X}$



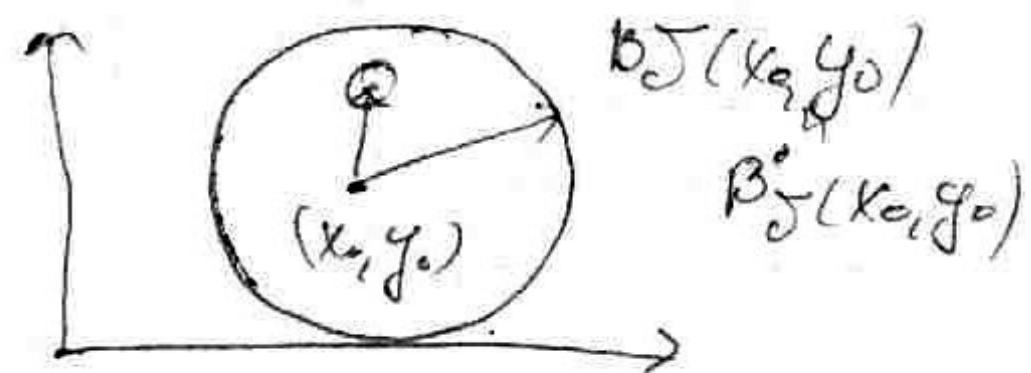
$\bar{X}$ - множ. от $\forall$ втр. т. $\bar{X}^\circ = \{x \in \bar{X} : \text{втр. т.}\}$ (обозначение)

$\bar{X} \cup \{ \text{т. на ст. } y = \bar{X} : \text{закр. на отбивка на } \bar{X} \}$



Def 1 Если $\bar{X} = \bar{X}^\circ \Rightarrow \bar{X}$ - отв. ли.

Def 1 Если $\bar{X} = \bar{X} \Rightarrow \bar{X}$ - закр. ли.

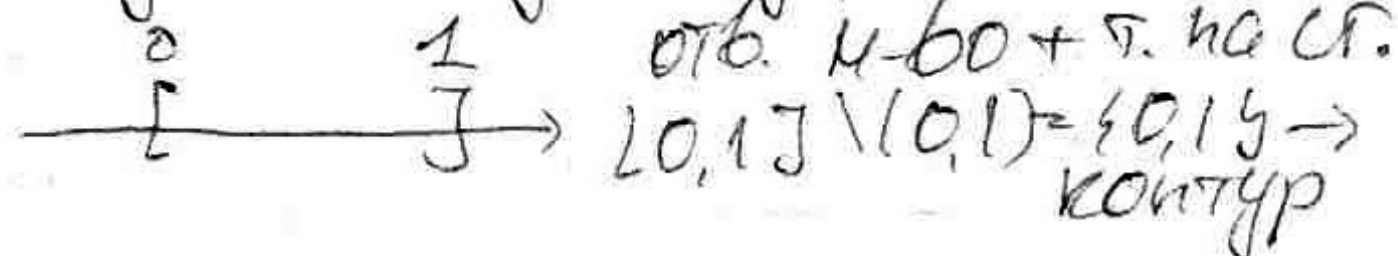


Def 1 $\partial X = \bar{X} \setminus \bar{X}^\circ$ - контур на X $\Rightarrow \bar{B}_\delta \setminus B_\delta^\circ = S_\delta(x_0, y_0)$

Def 1 $B_\delta(x_0, y_0) = \{(x, y) : d((x, y), (x_0, y_0)) < \delta\}$

$\bar{B}_\delta(x_0, y_0) = \{(x, y) : d((x, y), (x_0, y_0)) \leq \delta\}$

$\bar{B}_\delta(x_0, y_0) \setminus B_\delta^\circ(x_0, y_0) = S_\delta(x_0, y_0) = \{(x, y) : d((x, y), (x_0, y_0)) = \delta\}$



$\therefore$ от контура - граничные точки

Def: Нека $f(x, y)$ е деф. в $\bar{X} \subset \mathbb{R}^2$, (x_0, y_0) - т. на $\bar{X}$.

Казваме, че $A = \lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0) \\ (x, y) \in \bar{X}}} f(x, y)$, ако $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: \forall (x, y) \in \bar{X}$

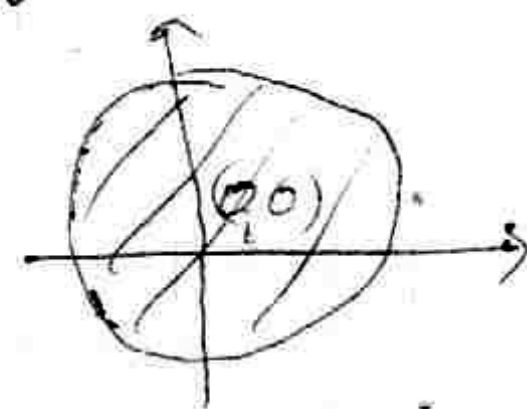
$$(x, y) \neq (x_0, y_0), d((x, y), (x_0, y_0)) < \delta \Rightarrow |f(x, y) - A| < \varepsilon$$

|| ако (x, y) - втр. т. на $\bar{X}$ разлика с предката Def
|| ако е гранична (!!!) - анализ на това и дясна пр.

$$(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2), (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \bar{X}, (x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0), (x_n, y_n) \in \bar{X}, \neq (x_0, y_0) \\ \Rightarrow f(x_1, y_1), f(x_2, y_2), \dots, f(x_n, y_n) \rightarrow A$$

Пример: $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}, \bar{X} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

$$\nexists \lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ (x, y) \in \bar{X}}} f(x, y)$$



$\bar{X}' = \{(x, x), x \neq 0\}$ || взимаме същата ф-я, др. мнот.

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ (x, y) \in \bar{X}'}} \frac{2xy}{x^2 + y^2} = 1$$

Непрекъснатост на ф-я

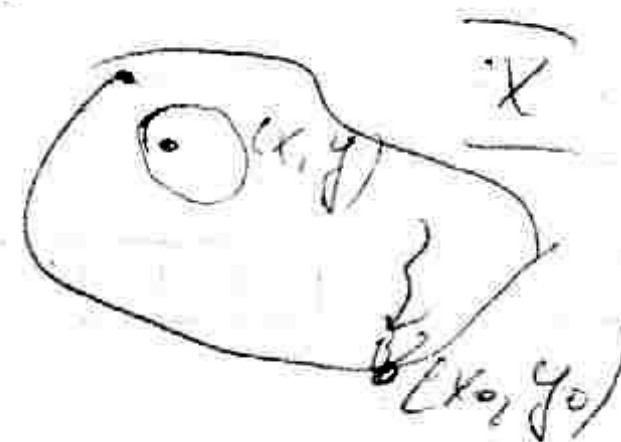
D.1 (за ф-я на 1 пром.) Нека $f(x)$ е деф. в $(x_0 - \Delta, x_0 + \Delta)$
Казваме, че $f(x)$ е непр. в т. x_0 , ако $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

D.2 (за 2 пром.) Нека $z = f(x, y)$ е деф. в $\bar{X}$ и $(x_0, y_0) \in \bar{X}$.
Казваме, че $f(x, y)$ е непр. в т. (x_0, y_0) , ако $\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0) \\ (x, y) \in \bar{X}}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$

P.1 Нека $z = f(x, y)$ е деф. в $\bar{X} \subset \mathbb{R}^2$ и $(x_0, y_0) \in \bar{X}$.

Казваме, че $f(x, y)$ е непр. в т. (x_0, y_0) по мн. $\bar{X}$, ако

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0) \\ (x, y) \in \bar{X}}} f(x, y) = f(x_0, y_0) \quad // \text{непр. по дадено м-во}$$



Пример: $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

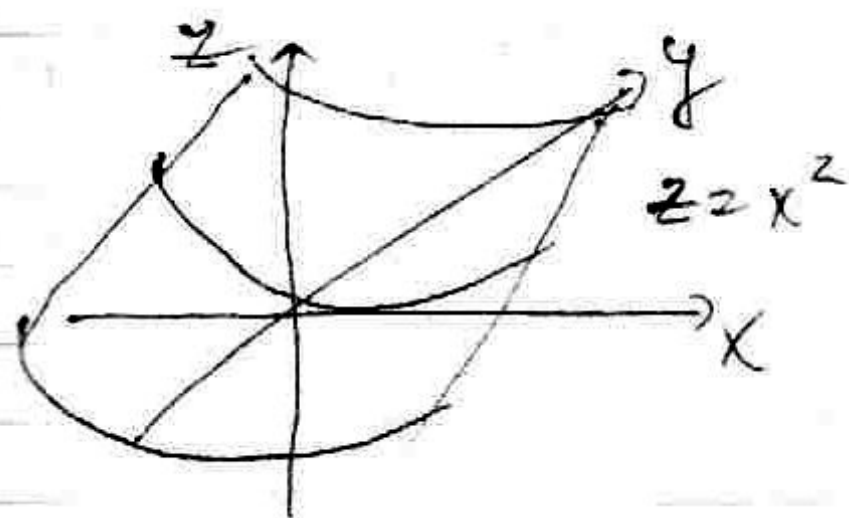
$f(x, y)$ е непр. в т. $(0, 0)$ - то $\nexists \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ (x, y) \in \bar{X}}} f(x, y) = \lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ (x, y) = (x, 0)}} \frac{2x \cdot 0}{x^2 + 0^2} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0 = 0 = f(0, 0) \Rightarrow f \text{ е непр. в } (0, 0)$$

НО! в това м-во $\bar{X} \rightarrow$ в общия смисъл е непрекъснатата

$$y = g(x) = x^2 \quad // \mathbb{R}: (-\infty, +\infty) \rightarrow \text{непр.}$$

$z = f(x, y) = x^2$ || разгл. а като ф-я на 2 пром. $\Rightarrow$ пак е непр. ф-я

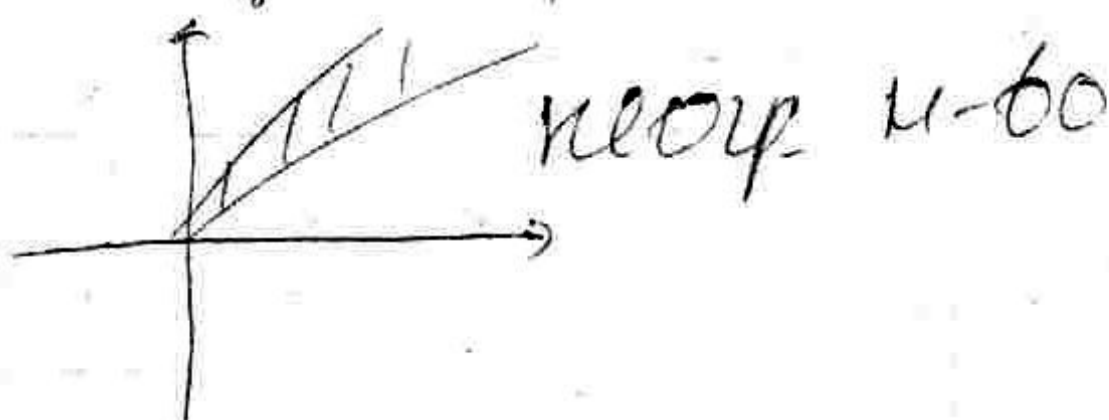
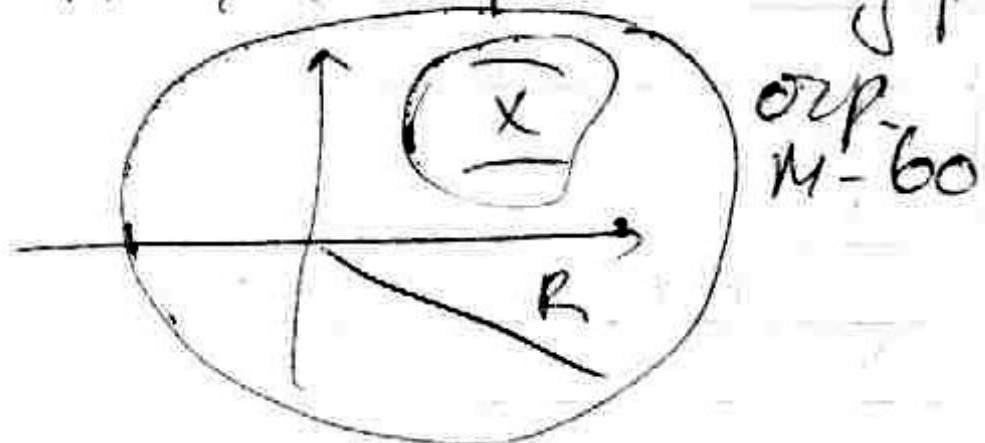


(като глук)

Def: Казваме, че $f(x,y)$ е кепр в/у $\bar{X} \subset \mathbb{R}^2$, ако $f(x,y)$ е кепр във $\forall t \in \bar{X} \rightarrow f(x,y) \in \bar{X}$

Def: Мн. $\bar{X} \subset \mathbb{R}^2$ се нарича отк., ако $\exists B_R(0,0) : X \subset B_R(0,0)$

// $B_R(0,0)$ - отк. с ц-р $(0,0)$ и рад R



Def: Мн. $\bar{X} \subset \mathbb{R}^2$ се нарича компактно, ако $\bar{X}$ е отк. и затв.

Т1: Ако ф-та $f(x,y)$ е кепр в/у комп. м-во $\bar{X} \subset \mathbb{R}^2 \Rightarrow$

$f(x,y)$ е отк. в/у $\bar{X}$, т.е. $\exists M > 0, \forall (x,y) \in \bar{X} \Rightarrow |f(x,y)| \leq M$

Т2: Ако ф-та $f(x,y)$ е кепр в/у комп. м-во $\bar{X} \subset \mathbb{R}^2 \Rightarrow$

$f(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in \bar{X} : \forall (x,y) \in \bar{X} \rightarrow f(x_0, y_0) \leq f(x,y) \leq f(x_1, y_1)$

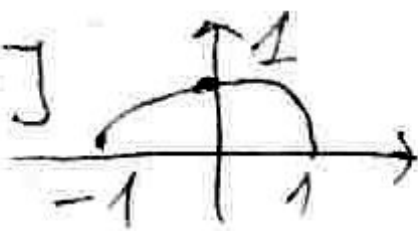
т.е. $f(x_0, y_0) = \min_{(x,y) \in \bar{X}} f(x,y), f(x_1, y_1) = \max_{(x,y) \in \bar{X}} f(x,y)$ // Док. което в. Анализ 1

Def: Мнот. $\ell = \{(x,y) : x = x(t), y = y(t), t \in [a,b]\}$ се нарича крива

линия в $\mathbb{R}^2$

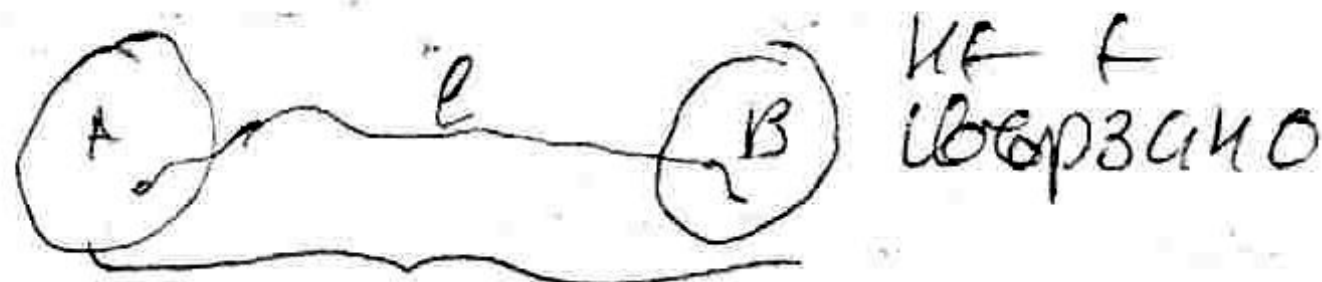
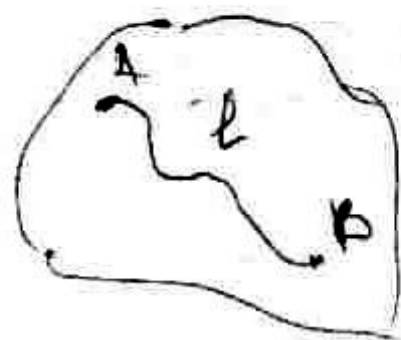
$\ell : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [a,b]$. Т. $A(x(a), y(a))$ и $B(x(b), y(b))$ - краища на ℓ

Пример: $\ell : \begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}, t \in [-1,1]$



Def: Мн. $\bar{X} \subset \mathbb{R}^2$ наричаме свързано, ако $\forall A, B \in \bar{X}, \exists$ крива линия ℓ с краища A и B и $\ell \subset \bar{X}$

Пример: $\bar{X}$ - свързано



I) Ако ф-та $f(x, y)$ е контр. в $\bar{X}$ събраното n -во $\bar{X} \subset \mathbb{R}^2$ и

$$\exists (x_0, y_0), (x_1, y_1) \in \bar{X}, f(x_0, y_0) \cdot f(x_1, y_1) < 0 \Rightarrow$$

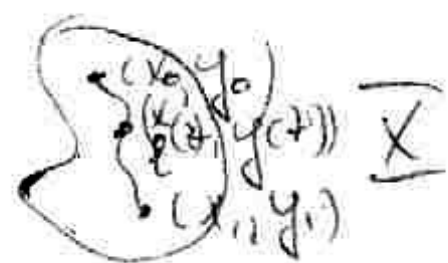
$$\exists (c, d) \in \bar{X} : f(c, d) = 0$$

8-во:

т.к. $\bar{X}$ е свързано n -во $\Rightarrow \exists$ криви линии ℓ (контр.)

$$\ell: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [\alpha, \beta] \text{ и } (x(\alpha), y(\alpha)) = (x_0, y_0) \text{ и } \ell \subset \bar{X}$$

$$(x(\beta), y(\beta)) = (x_1, y_1)$$



образуваме ф-та $h(t) = f(x(t), y(t))$,
 $t \in [\alpha, \beta]$ (контр. в $[\alpha, \beta]$)

$$\text{и } h(\alpha) \cdot h(\beta) = f(x(\alpha), y(\alpha)) \cdot f(x(\beta), y(\beta)) =$$

$$= f(x_0, y_0) \cdot f(x_1, y_1) < 0 \xrightarrow{\text{от I}} \exists t_0 \in (\alpha, \beta) : h(t_0) = 0, \text{ но } h(t_0) = f(x(t_0), y(t_0))$$

т.е. в т. $(c, d) = (x(t_0), y(t_0))$ ф-та $f(x, y)$ е нулева в (c, d)

Def. Нека $f(x, y)$ е деф. в $\bar{X} \subset \mathbb{R}^2$. Назваме, че $f(x, y)$ е
 равном. контр. в $\bar{X}$, ако $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 :$

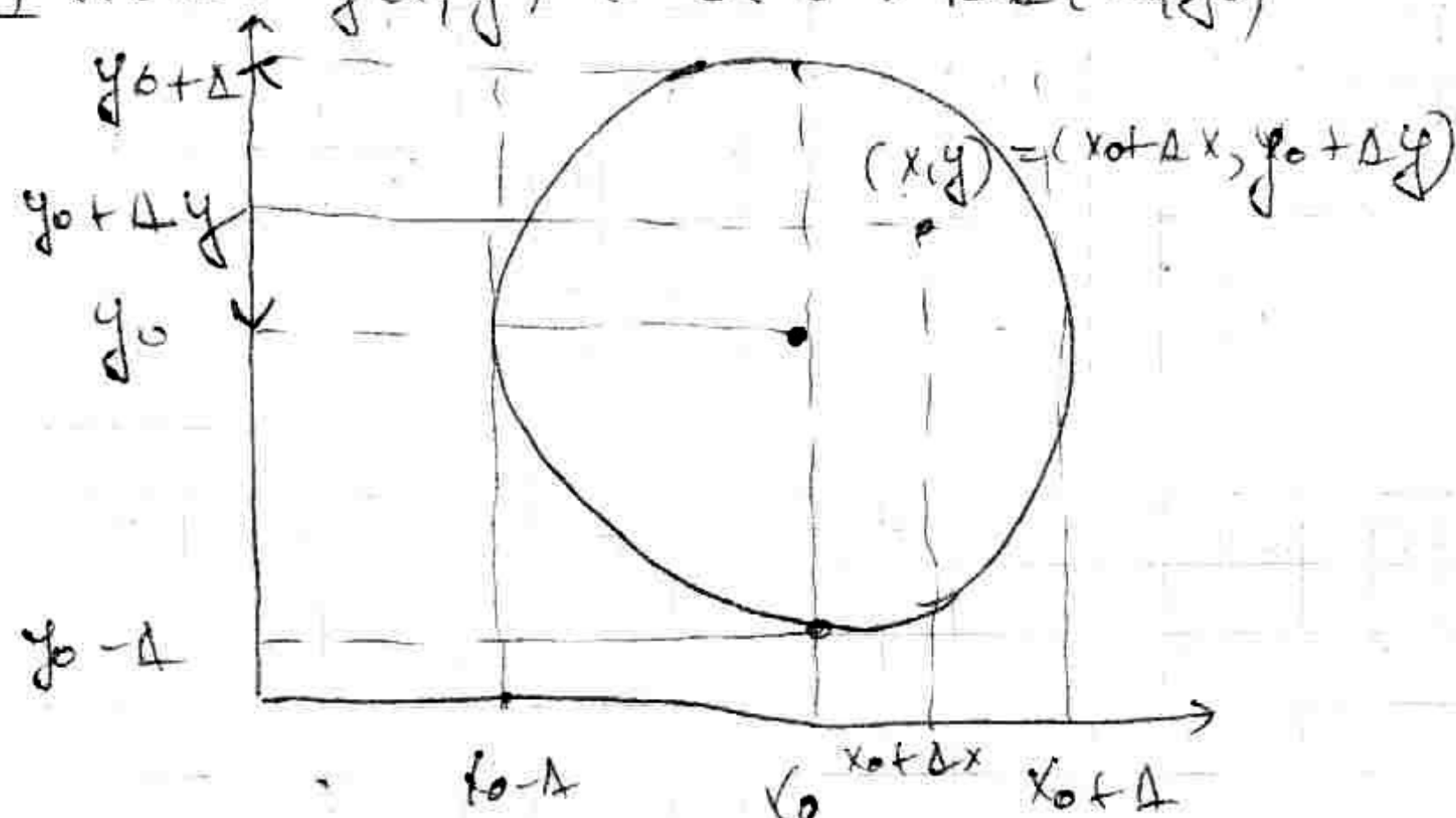
$$\forall (x', y'), (x'', y'') \in \bar{X} : d((x', y'), (x'', y'')) < \delta \Rightarrow$$

$$|f(x', y') - f(x'', y'')| < \varepsilon$$

III) Ако ф-та $f(x, y)$ е контр. в $\bar{X}$ комп. n -во $\bar{X} \subset \mathbb{R}^2 \Rightarrow$
 $f(x, y)$ е равном. контр. в $\bar{X}$ // Док. от Ан. I

(21) Частни производни. Диференцируемост,
 пълна диференциал. Достат. усл. за диференци-
 руемост. Частни впр. от по-висок ред, равенство
 на смесените производни.

D) Нека $f(x, y) \in \text{Def. в } B_\Delta(x_0, y_0)$



$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

$$\varphi(x) = f(x, y_0)$$

$$x \in (x_0 - \Delta, x_0 + \Delta)$$

Ако $\exists \varphi'(x_0)$, то тази
 производна е първа частна
 производна на $f(x, y)$ в т. (x_0, y_0)
 по пром. x .

$$\varphi'(x_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = f'_x(x_0, y_0) =$$

$$\varphi'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} =$$

Аналог, ако $\psi(y) = f(x_0, y), y \in (y_0 - \Delta, y_0 + \Delta)$, то $\psi'(y_0)$ е нарича
 първа ч пр на $f(x, y)$ в т. (x_0, y_0) по пром. y .