3) $0<R<+\infty \Rightarrow$ ст. ред $\sum_{n=0} a_n x^n$ е сх. в/у $(-R,R)$ и разх в/у $(-\infty,-R)\cup(R,+\infty)$

Д-во:

Нека $D=\{x\in\mathbb{R}:$ ст. р. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е сх.$\}$, $D\neq\emptyset$, т.к. $D\ni 0$

- Случай 1: Нека D е неогр., т.е. $\forall x\in\mathbb{R}, \exists x_0\in D: |x|<|x_0| \xRightarrow{\text{Т. Абел}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е сх. в т. $x\in\mathbb{R} \Rightarrow x\in D \Rightarrow D=(-\infty,+\infty) \Rightarrow R=+\infty$

- Случай 2: Нека D е огр. м-во
  - 2.1) $D=\{0\} \Rightarrow$ ст. ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е сх. само в т. $x_0=0$ и е разх. $\forall x\neq 0 \Rightarrow R=0$
  - 2.2) $D\neq\{0\} \Rightarrow \exists x\neq 0:$ ст. р. $\sum_{n=0} a_n x^n$ е сх. в т. x

    Нека $R=\sup_{x\in D}|x|>0$

    $\forall x\in(-R,R) \Leftrightarrow |x|<R \Rightarrow \exists x_0\in D: |x|<|x_0| \xRightarrow{\text{Т. Абел}}$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е сх. в тази т. x

    $\forall x\in(-\infty,-R)\cup(R,+\infty)$ т.е. $|x|>R \Rightarrow x_0\notin D$: $|x|>|x_0| \xRightarrow{\text{сл. 1}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е разх. в тази т. x

Деф R - радиус на сх. на ст. ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $(-R,R)$ - област на ст. ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

19. ~~Почленно диференциране и интегриране на степенни редове. Ред на Тейлор.~~ Разлагане в ред на Тейлор на някои елементарни функции.

Т] Нека за ст. ред (*) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е в сила поне 1 от 2-те твърдения:

1) $\exists \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$ или
2) $\exists \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = l$

$\Rightarrow R=\frac{1}{l}$ е радиус на сх. на (*)

Д-во:

2) Нека $\exists \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=l$

1) $0<l<+\infty$
Разгл. $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$.

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n x^n|}=\lim_{n\to\infty}|x|\sqrt[n]{|a_n|}=|x|\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=|x|\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=|x|\cdot l$

Ако $|x|l>1 \Leftrightarrow |x|>\frac{1}{l} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$ е разх

Ако $|x|\ell<1 \Leftrightarrow |x|<\frac{1}{\ell} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е сх $\left(-\frac{1}{\ell}, \frac{1}{\ell}\right)$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е разх. Действ., ако доп., че $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е сх за някои x

$|x|>\frac{1}{\ell} \Rightarrow$ в т. $x_0 : |x| > |x_0| > \frac{1}{\ell} \overset{\text{Т. Абел}}{\Rightarrow}$ ст. ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ е абс. сх.

$|x_0|\ell > 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x_0^n|} = |x|\cdot \ell > 1$ $\lightning$

$R=\frac{1}{\ell}$ е ред на сходимост на $(*)$

ii) $\ell = 0$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |x|\cdot 0 = 0 < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ е сх. $\forall x \in R$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е сх. $\forall x \in R$, т.е. $R = \infty = \frac{1}{\ell} = \frac{1}{0}$

iii) $\ell = +\infty$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |x|(+\infty) = \begin{cases} +\infty, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

$R = 0 = \frac{1}{\ell} = \frac{1}{+\infty}$

Примери!
1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $a_n \frac{1}{n!}$

$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 = \ell$

$\Rightarrow R = \frac{1}{0} = +\infty$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n.3^n}$, $a_n = \frac{1}{n.3^n}$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n.3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{3} = \ell$

$\Rightarrow R = \frac{1}{\ell} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$

Следствие:
(1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ (R_1)$

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \ (R_2)$ имат един и същи радиус на сходимост

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} n . a_n x^{n-1} \ (R_3)$

Д-во:

Нека R_1, R_2, R_3 – рад. на сх. на ст. редове (1), (2), (3).
Тр. да док. че $R_1 = R_2 = R_3$?

1) $\frac{1}{n+1} \leq 1 \leq n \ (\forall n \in N) \ | \cdot |a_n x^{n+1}|$

(1) $\frac{a_n}{n+1} |x^{n+1}| \leq |x| . |a_n x^n| \leq |x|^2 |n . a_n x^{n-1}|$

Ако $x \in (-R_3, R_3) \overset{?}{\Rightarrow} x \in (-R_1, R_1)$

$\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |n . a_n x^{n-1}|$ е сх $\Rightarrow \sum |x|^2 |n . a_n x^{n-1}| \Rightarrow$ (пр. за ср.)

сх. $\sum_{n=0}^{\infty} |x| |a_n x^n| \Rightarrow$ сх. $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| \Rightarrow x \in (-R_1, R_1) \Rightarrow$

$(-R_3, R_3) \subseteq (-R_1, R_1) \Rightarrow R_1 \leq R_1 \ (*)$

Ако $x \in (-R_1, R_1) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ е сх $\Rightarrow$ сх. $\sum_{n=0}^{\infty} |x| |a_n x^n| \Rightarrow$ (п-п за ср.

сх. $\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{a_n}{n+1} \cdot x^{n+1} \right| \Rightarrow x \in (-R_2, R_2) \Rightarrow (-R_1, R_1) \subseteq (-R_2, R_2)$

$\Rightarrow R_1 \leq R_2$ (⁎⁎)

От (⁎) и (⁎⁎) $\Rightarrow R_3 \leq R_1 < R_2$ (I)

2) $R_2 \leq R_3$ (ще док.)

Нека $x \in (-R_2, R_2) \Rightarrow 0 < |x| < t < R_2$

(2) $\left| n \cdot a_n x^{n-1} \right| = \left| \frac{a_n}{n+1} \cdot t^{n+1} \cdot \frac{x^{n+1}}{t^{n+1}} \cdot \frac{n(n+1)}{x^2} \right| =$

$= \left| \frac{a_n}{n+1} \cdot t^{n+1} \right| \cdot \left| \frac{x}{t} \right|^{n+1} \cdot \frac{n(n+1)}{x^2} \leq (\heartsuit)$

Т.к. $x \in (-R_2, R_2) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{a_n}{n+1} \cdot x^{n+1} \right|$ е сх.

$\Rightarrow \exists M > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \Rightarrow \left| \frac{a_n}{n+1} \cdot x^{n+1} \right| \leq M$ (Δ)

$\heartsuit, \Delta \Rightarrow \leq \underbrace{\frac{M}{x^2}}_{=M_0} \cdot n(n+1) q^{n+1}$, където $q = \left| \frac{x}{t} \right| = \frac{|x|}{t} < 1$

Разглеждаме реда $\sum_{n=0}^{\infty} M_0 \cdot n(n+1) \cdot q^{n+1} = M_0 \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} n(n+1) \cdot q^{n+1}}$

// $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)(n+2) \cdot q^{n+2}}{n(n+1) \cdot q^{n+1}} = \left(1 + \frac{2}{n}\right) q \xrightarrow{n \to \infty} q < 1$ сх. согл. кр. на Даламбер

От (2) согл. пр. за сравн. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left| n \cdot a_n x^{n-1} \right|$ е сх $\Rightarrow x \in (-R_3, R_3)$

$\Rightarrow (-R_2, R_2) \subset (-R_3, R_3)$

$\Rightarrow R_2 \leq R_3$ (II)

$\xRightarrow{\text{I и II}} R_1 = R_2 = R_3$ т.к. $R_2 \leq R_3 \leq R_1 \leq R_2$

Т Ако ст. ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n\right)$ има радиус на сх. $R > 0$ и

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $\left(f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n\right)$, то:

1) $f(x)$ е диференцируема в/у $(-R, R)$ и

$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ $\left(f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}\right)$, $\forall x \in (-R, R)$

2) $f(x)$ е интегруема в/у $(-R, R)$

$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ $\left(\int_{x_0}^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-x_0)^{\overset{?}{(n+1)}}\right)$, $\forall x \in (-R, R)$

Деф Нека $f(x)$ е деф в $(x_0 - h, x_0 + h)$ и $\forall n \in \mathbb{N}: \exists f^{(n)}(x_0)$

степенния ред от вида $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$ се нарича ред на Тейлър

(Ако $x_0 = 0 \Rightarrow$ ред на Маклорен)

Ако $\hat{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$ в/у $(x_0 - R, x_0 + R)$

$\hat{f}(x) \stackrel{?}{=} f(x)$ в/у $(x_0 - R, x_0 + R) \cap (x_0 - h, x_0 + h)$

Примери 1) $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

$\forall n \in \mathbb{N}: f^{(n)}(0) = 0 \Rightarrow$ ст. ред $\hat{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0}{n!} x^n = 0$ в/у $\mathbb{R}$

$\hat{f}(x) \equiv 0 \not\equiv f(x)$

$f(x) \to \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \Rightarrow S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

$r_n(x) f(x) - S_n(x)$

остатъчен член, който можем да представим чрез ф-лата на Лагр.

I] $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)$ в/у $(x_0-R, x_0+R) \cap (x_0-h, x_0+h) \overset{\Delta}{\Leftrightarrow}$

$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0 \quad \forall x \in \Delta$

II] Нека $f(x)$ е деф. в/у (x_0-h, x_0+h) и $\forall n \in \mathbb{N}, \exists f^{(n)}$ в/у (x_0-h, x_0+h)

Ако $\{f(x), f^{n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ са огр. съвкупност, то $\exists M>0$:

$|f(x)| \leq M$ и $|f^{(n)}(x)| \leq M$ $\Big\}\ \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in (x_0-h, x_0+h) \Rightarrow$

$f(x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ в/у (x_0-h, x_0+h)

Д-во:

$r_n = f(x) - S_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^n$, където c е т. м/у x и x_0

$|r_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\right| |(x-x_0)^{n+1}| \leq M \cdot \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right.$ е сх. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left.\frac{x^n}{n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \forall x \in \mathbb{R}\right)$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0, \ \forall x \in (x_0-h, x_0+h)$

1) $f(x) = e^x, \ \forall x \in \mathbb{R}: f^{(n)}(x) = (e^x)^{(n)} e^x$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$(-h, h)$

$f^{(n)}(x) = e^x \Rightarrow |f^{(n)}(x)| = |e^x| \leq e^h \ \forall x \in (-h, h) \Rightarrow e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$,

$\forall x \in (-h, h)$

$x = 1 \Rightarrow e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

2) $f(x) = \sin x$

$f^{(n)}(x) = (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ (-1)^k & n = 2k+1 \end{cases}, \quad R = +\infty$

$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$

3) $f(x) = \cos x$

$f^{n}(x) = \cos x = \cos\left(x + \frac{\pi \cdot n}{2}\right)$

$\cos x = \sum_{k=0} \frac{(-1)^n}{(2k)!} x^{2k}, \quad R = +\infty$

$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$

4) $\ln(1+x) = \sum_{n=1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$, $R=1$

$\alpha \in R \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{\alpha} x^n$, $R=1$

$\alpha \in R \to \binom{n}{\alpha} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$ $\left(\binom{n}{0} = 1\right)$

$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $R=1$

$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$, $R=1$

$(\mathrm{arctg}\,x)' = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$, $R=1$

arc~~cot~~gx $= \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$

20. Функции на две независими променливи величини – граница, непрекъснатост.

$\bar{X} \subset R$

$f: \forall x \in \bar{X} \xrightarrow[\text{ed.}]{f} y \in R,\ y = f(x)$ } ф-я на 1 независима пром. величина

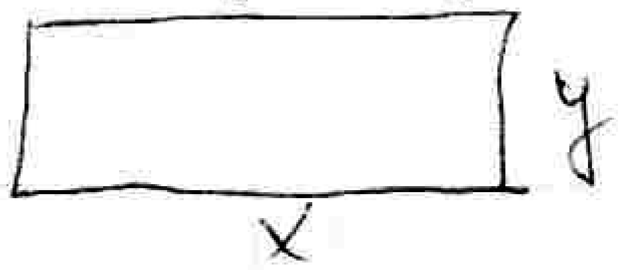
$R^2 = R \times R = \{(x,y): x, y \in R\}$

$\bar{X} \subset R^2$

$f: \bar{X} \to R$

пр. fe: $\forall (x,y) \in \bar{X} \xrightarrow[\text{ed.}]{f} z \in R$

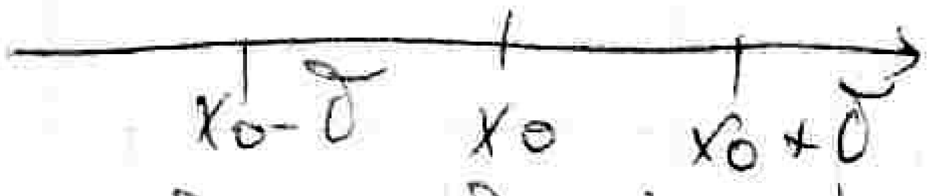
$z = f(x,y)$



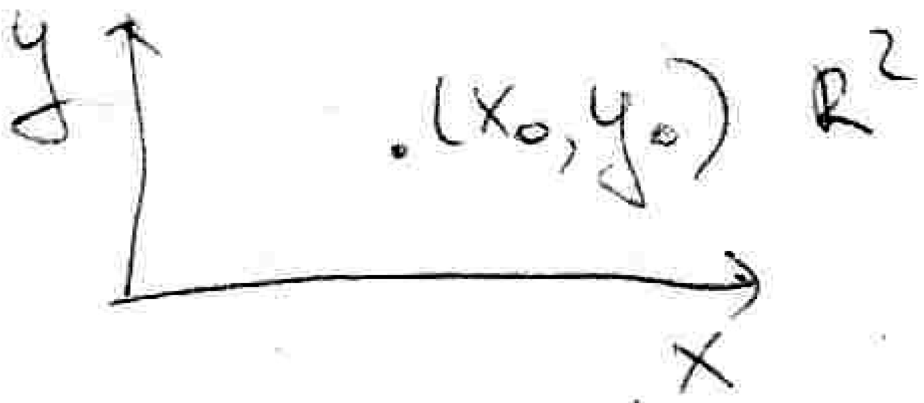
$S = S(x,y) = x \cdot y \quad (x>0,\ y>0)$

Примери: $f(x,y) = x \cdot y$

$\begin{cases} x = t \\ y = e^t \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x = uv \\ y = ue^v \end{cases}$ $\quad z = (u,v) = f(uv, ue^v) = uv \cdot ue^v = u^2 v e^v$



$d(x,y) = |x-y|$ $\qquad (x_0-\delta, x_0+\delta) = \{x: |x-x_0|<\delta\} = \{x: d(x,x_0)<\delta\}$



$\delta > 0$

$B_\delta(x_0,y_0) = \{(x,y): d((x,y),(x_0,y_0)) < \delta\}$

$d((x,y),(x_0,y_0)) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$

$S_\delta(x_0,y_0) = \{(x,y): d((x,y),(x_0,y_0)) = \delta\}$ – окр.

Нека ф-та $f(x)$ е деф $(x_0-\Delta, x_0+\Delta) \setminus \{x_0\}$

Dl $A = \lim_{x\to x_0} f(x)$, ако $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: \forall x \in (x_0-\Delta, x_0+\Delta)$

$x \neq x_0,\ |x-x_0| < \delta \Rightarrow |A - f(x)| < \varepsilon$