Th (Критерий на Вайерщрас)

Ако за ф. ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $(x \in E)$, $\exists \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $(a_n \geq 0)$: $\forall n \in N$:

$|f_n(x)| \leq a_n$, $(\forall x \in E) \Rightarrow$

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ е абс. равном. сх. в/у E

(редът от сума от модулите)

Def Казваме, че $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ е абс. сх. в/у E, ако е сх. в/у E ф. ред, $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$

Д-во:

$$\tau_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E} |\tau_n(x)| = 0 ?$$

$$|\tau_n(x)| = \Big|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\Big| \leq \underbrace{\sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)|}_{r_n(x)} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ е сх} \Rightarrow \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = (S - S_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\underset{\downarrow\,0}{0} \leq \underset{\downarrow\,0}{\sup|\tau_n(x)|} \leq \underset{\downarrow\,0}{\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \text{ е равн. сх. в/у } E$$

- $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$, $E = [-q, q]$, $0 < q < 1$

  $\forall x \in [-q, q] : |x^n| \leq q^n$

  $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ е сх $\xRightarrow{\text{кр. В.}} \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ е абс. и равн. сх. в/у $[-q, q]$

18. Степенни редове - радиус и област на сходимост.

Деф Функц. ред от вида (*) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, където $a_n \in R$, $\forall n \in N \cup \{0\}$, $x_0 \in R$, се нарича <u>степенен ред</u>.

<u>Вчастност:</u> Ако $x_0 = 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

В т. $x = x_0$ степенният ред (*) е сх.

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ пол. $t = x - x_0$

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$

Ако (1) е сх. в т. $x \Rightarrow$ ст. ред (2) е сх. в т. $t = x - x_0$

Ако (2) е сх. в т. $t \Rightarrow$ ст. ред (1) е сх. в т. $x = t + x_0$

Т 1 (Абел) Ако ст. ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е сх. в т. $x_0 \neq 0 \Rightarrow$ е сх. при това абс. сх. във вс. т. $x: |x| < |x_0|$

Д-во:

Ст. ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ е сх в т. x_0, т.е. е сх. б.т.р. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n \Rightarrow a_n x_0^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow \{a_n x_0^n\}_{n=0}^{\infty}$ е огр. т.е. $\exists M > 0 : |a_n x_0^n| \le M \ (\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$

Разгл. $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$

(*) $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : |a_n x^n| = \left|a_n x_0^n \left(\frac{x^n}{x_0^n}\right)\right| = |a_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \le M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n =$

$= Mq^n$, където $q = \left|\frac{x}{x_0}\right|$

$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|}_{\text{сх.}}$ & $\sum_{n=0}^{\infty} Mq^n$ е сх., ако $q < 1 \Leftrightarrow \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1 \Leftrightarrow \forall |x| < |x_0|$

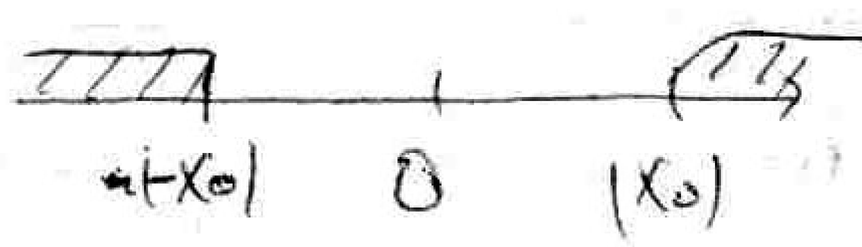
п-п за сравнение

$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, |a_n x^n| \le Mq^n \Rightarrow$

$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ е сх. $\forall x : |x| < |x_0| \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е абс. сх. $\forall x : |x| < |x_0|$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е сх. $\forall x \ |x| < |x_0|$

Следствие 1: Ако ст. ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е разх. в т. x_0 $(x_0 \neq 0) \Rightarrow$ ст. ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е разх $\forall x : |x| > |x_0|$



Следствие 2: Ако ст. ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е сх. в т. $x_0 \neq 0 \Rightarrow$ ст. ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е равномерно сходящ в/у $[-\rho, \rho]$, к. $0 < \rho < |x_0|$

Д-во:

$|a_n x^n| = \left|a_n x_0^n \cdot \frac{x^n}{x_0^n}\right| = |a_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x^n}{x_0^n}\right| \le M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \le M \left|\frac{\rho}{x_0}\right|^n, \forall x \in [-\rho, \rho]$

$\rho < |x_0|$, $0 < \frac{\rho}{x_0} < 1$

Б.т.р. $\sum_{n=0}^{\infty} M \left|\frac{\rho}{x_0}\right|^n$ е сх.

$\hookrightarrow$ безкр. геом. п-я

$\Rightarrow$ (кр. В.) ф. р. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е абсолютно (равном) сходящ в/у $[-\rho, \rho]$

Т за $\exists$ на радиус: За $\forall$ степенен ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\exists! \ R \ge 0$ или $R = +\infty$, ако: 1) $R = 0 \Rightarrow$ ст. р. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е сх. само в т. $x_0 = 0$

2) $R = +\infty \Rightarrow$ ст. р. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е сх. в/у $(-\infty, +\infty)$

3) $0 < R < +\infty \Rightarrow$ ст. ред $\sum_{n=0} a_n x^n$ е сх. вгу $(-R, R)$ и разх вгу $(-\infty, -R) \cup (R, +\infty)$

Д-во:

нека $D = \{x \in \mathbb{R} :$ ст. р. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е сх. $\}$, $D \neq \emptyset$, т.к. $D \ni 0$

- Случай 1: Нека D е неогр., т.е. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in D : |x| < |x_0|$ $\xRightarrow{\text{т. Абел}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е сх. в т. $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x \in D \Rightarrow D = (-\infty, +\infty) \Rightarrow R = +\infty$

- Случай 2: Нека D е огр. м-во

2.1) $D = \{0\} \Rightarrow$ ст. ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е сх., само в т. $x_0 = 0$ и е разх. $\forall x \neq 0 \Rightarrow R = 0$

2.2) $D \neq \{0\} \Rightarrow \exists x \neq 0$: ст. р. $\sum_{n=0} a_n x^n$ е сх. в т. x

Нека $R = \sup\limits_{x \in D} |x| > 0$

$\forall x \in (-R, R) \Leftrightarrow |x| < R \Rightarrow \exists x_0 \in D : |x| < |x_0| \xRightarrow{\text{т. Абел}}$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е сх. в тази т. x

$\forall x \in (-\infty, -R) \cup (R, +\infty)$ т.е. $|x| > R \Rightarrow x_0 \notin D$: $|x| > |x_0| \xRightarrow{\text{сл. 1}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е разх. в тази т. x

Деф| R - радиус на сх. на ст. ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $(-R, R)$ - област на ст. ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

19. ~~Почленно диференциране и интегриране на степенни редове. Ред на Тейлор.~~ Разлагане в ред на Тейлор на някои елементарни функции.

Т| Нека за ст. ред $(*) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е в сила поне 1 от 2те твърдения:

1) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$ или

2) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$

$\Rightarrow R = \frac{1}{l}$ е радиус на сх. на $(*)$

Д-во:

2) Нека $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$

1) $0 < l < +\infty$

Разгл. $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$.

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \lim\limits_{n\to\infty} |x| \sqrt[n]{|a_n|} = |x| \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |x| \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |x| \cdot l$

Ако $|x| l > 1 \Leftrightarrow |x| > \frac{1}{l} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ е разх