$\hat{S}_n$ – n-та парц. сума на (*)

$S_{n^2}^{\wedge} = S_n . \overline{S_n}$, където $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $\overline{S_n} = \sum_{k=1}^{n} b_k$

• $|(*)|$ $|a_1 b_1| + |a_1 b_2| + |a_2 b_1| + |a_2 b_2| + \dots = \hat{S}^{(\cdot)}$ – n-та парц. сума на $|(*)|$

$\Rightarrow \hat{S}_{n^2}^{(\cdot)} = S_n^{(\cdot)} . \overline{S_n}^{(\cdot)}$, к. $S_n^{(\cdot)} = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$, $\overline{S_n}^{(\cdot)} = \sum_{k=1}^{n} |b_k|$

т.к. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ са абс. сх. $\Rightarrow$

$\{S_n^{(\cdot)}\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\overline{S_n}^{(\cdot)}\}_{n=1}^{\infty}$ са огр., т.е. $\exists M > 0$: $\begin{cases} S_n^{(\cdot)} \le M \\ \overline{S}_n^{(\cdot)} \le M \end{cases}$

$\Rightarrow \hat{S}_{n^2}^{(\cdot)} = S_n^{(\cdot)} . \overline{S_n}^{(\cdot)} \le M . M = M^2 \Rightarrow \{\hat{S}_{n^2}^{(\cdot)}\}_{n=1}^{\infty}$ е огр. $\Rightarrow$

$\hat{S}_n^{(\cdot)} \le \hat{S}_{n^2}^{(\cdot)} \le M^2 \Rightarrow \{\hat{S}_n^{(\cdot)}\}_{n=1}^{\infty}$ е огр. $\Rightarrow$

$|(*)|$ е сх. $\Rightarrow$ (*) е абс. сх.

$\hat{S}_{n^2} = S_n . \overline{S_n} \xrightarrow[n \to \infty]{} S . \overline{S} \Rightarrow$ сумата на (*) е $S . \overline{S}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_n b_m = S . \overline{S} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_m\right)$

17. Функционални редици и редове – сходимост и равномерна сходимост. Критерий на Вайерщрас

Деф Нека $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ е деф. в/у $E \subset \mathbb{R}$
Нека $x_0 \in E$.

1) Казваме, че ф.ф.р. $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ е сх. в т. x_0, ако ч.р. $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ е сх.

2) Казваме, че ф. функционална редица $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ е сх. в/у E, ако $\forall x \in E$, ч.р. $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ е сх.

3) Казваме, че ф.ф.р. $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ е сх към ф-та $f(x)$ в/у E, ако $\forall x \in E$, $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$: $f_n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{E} f(x)$

Пример: 2) $\forall n \in \mathbb{N}: f_n(x) = x^{n-1}$, $x \in (-1,1)$, $\forall x \in (-1,1)$:

$1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$: $\lim_{n \to \infty} x^{n-1} = 0$ в/у $(-1,1)$

3) $f_n(x) = x^{n-1}$, $f(x) = 0$

$x^{n-1} \xrightarrow[n \to \infty]{(-1,1)} 0$

$x_0 = 0$, $f_n(0) = \cancel{}\, n\, 0 = 0$ $\quad f_n(0) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

$f_n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{E} f(x) \Leftrightarrow \forall x \in E, f_n(x) \longrightarrow f(x) \Leftrightarrow$

$\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists N = N(x, \varepsilon): \forall n > N \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$

Деф Казваме, че ф.ф.р. $\{f_n(x)\}$ е равномерно сх. към $f(x)$ в/у E, ако $\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon)$; $\forall x \in E$, $\forall n > N \Rightarrow \underbrace{|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon}$ $\quad f_n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{E} f(x)$ равном. сх.

Т1 $f_n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{E} 0 \Leftrightarrow \sup_{x \in E} |f_n(x)| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

8-60.

$\Rightarrow$| Нека $f(x) \underset{n\to\infty}{\overset{E}{\rightrightarrows}} 0$, т.е. $\forall \varepsilon>0, \exists N=N(\varepsilon), \forall n>N \Rightarrow$

$|f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, (\forall x\in E)$

$\Downarrow$

$\sup_{x\in E}|f_n(x)| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in E}|f_n(x)|$

$\Leftarrow$| Нека $\sup_{x\in E}|f_n(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \forall\varepsilon>0, \exists N=N(\varepsilon)$

$\forall n>N \Rightarrow |f_n(x)| \underset{\forall x\in E}{\le} \sup_{x\in E}|f_n(x)|<\varepsilon$

$|f_n(x)|<\varepsilon, (\forall x\in E) \Rightarrow f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{E}{\rightrightarrows}} 0$

<u>Пример:</u> 1) $f_n(x)=x^{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{(-1,1)} 0$

$x^{n-1} \underset{n\to\infty}{\overset{(-1,1)}{\not\rightrightarrows}} 0$? (равном. сх. ли е?)

$1=\sup_{x\in(-1,1)}|x^{n-1}| \underset{n\to\infty}{\not\rightarrow} 0$

2) $x^{n-1} \underset{n\to\infty}{\overset{[-q,q]}{\rightrightarrows}} 0$, където $0<q<1$

$\sup_{x\in[-q,q]}|x^{n-1}| = q^n \to 0$

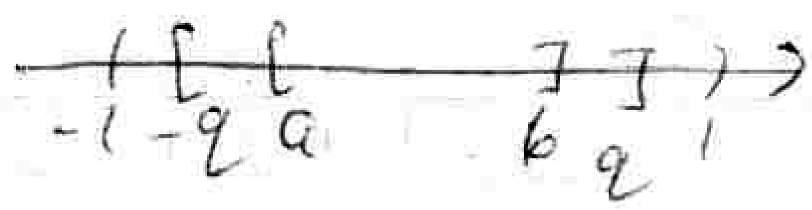
<u>Следствие:</u> $f_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows} f(x) \Leftrightarrow \sup_{x\in E}|f(x)-f_n(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

<u>Т|</u> Ако $f_n(x)\underset{n\to\infty}{\overset{E}{\rightrightarrows}} f(x)$ и $F\subset E \Rightarrow$

$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{F}{\rightrightarrows}} f(x)$

$\underset{0}{\underset{\Downarrow}{0}} \le \sup_{x\in F}|f(x)-\underset{0}{\underset{\downarrow}{f_n(x)}}| \le \sup_{x\in E}|f(x)-\underset{0}{\underset{\downarrow}{f_n(x)}}|$

<u>Пример:</u> $x^{n-1} \underset{n\to\infty}{\overset{E}{\rightrightarrows}} 0$, където $[a,b]\subset(-1,1)$



$\exists\ 0<q<1 : [a,b]\subset[-q,q]$

<u>Деф|</u> Нека $f_n(x), (n\in N)$, деф в/у $E\subset R$

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ – функционален ред.

<u>Деф|</u> Казваме, че ф.р. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, определена в/у E е:

1) сх. в т. x_0, ако ч.р. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ е сх.

2) сх. в/у мн. E, ако $\forall x\in E$, ч.т.р $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ е сх.

<u>Пример:</u> $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$, $(-1,1)$ <u>е сх.</u>

3) Казваме, че $f(x)$ е сума на ф. ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ в/у E, ако редицата от парциалната сума $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ е сх към $f(x)$, $\forall x\in E$

$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\ (x\in E) \Leftrightarrow x\in E,$

$\forall \varepsilon>0, \exists \nu=\nu(x,\varepsilon): \forall n>\nu \Rightarrow |f(x)-S_n(x)|<\varepsilon$

Деф Казваме, че ~~f(x) е~~ б. ф. р. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ е равном. сх. към $f(x)$ в/у м-вото E, ако $S_n(x) \overset{E}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} f(x)$, т.е. $\forall \varepsilon>0, \exists \nu=\nu(\varepsilon): \forall n>\nu \Rightarrow$

$$|f(x)-S_n(x)|<\varepsilon \ (\forall x\in E)$$

Нека $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)=f(x)$ в/у E. Означаваме чрез $r_n(x)=f(x)-S_n(x)$

Т Функционалният ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ е равномерно сх. в/у $E \Leftrightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E} |r_n(x)|$$

Д-во!

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ е равном. сх. $\Leftrightarrow S_n(x) \overset{E}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} f(x) \Leftrightarrow$

$$\sup_{x\in E} |\underbrace{f(x)-S_n(x)}_{r_n(x)}| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Leftrightarrow \sup_{x\in E} |r_n(x)| \xrightarrow[n\to q]{} 0$$

Пример: $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$; $x\in(-1,1)$

i) $E=[-q,q]$, $0<q<1$

$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ е равн. сх. в/у $[-q,q]$

$f(x)=\frac{1}{1-x}$, $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} x^{k-1}=\frac{1-x^n}{1-x}$

$\underbrace{f(x)-S_n(x)}_{r_n(x)}=\frac{1}{1-x}-\frac{1-x^n}{1-x}=\frac{x^n}{1-x}$

$|r_n(x)|=\left|\frac{x^n}{1-x}\right|=\frac{|x|^n}{|1-x|}\le\frac{|x^n|}{1-|x|}\le\frac{q^n}{1-q}$

$\sup_{x\in[-q,q]} |r_n(x)|=\sup_{x\in[-q,q]} \frac{|x|^n}{|1-x|}\le\frac{q^n}{1-q}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{0}{1-q}=0$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ е равн. сх. в/у $[-q,q]$

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ не е равн. сх. в/у $(-1,1)$

$\sup_{x\in(-1,1)} |r_n(x)|=\sup_{x\in(-1,1)} \frac{|x|^n}{|1-x|} \overset{\forall n\in\mathbb{N}:\ x_n=1-\frac{1}{n}}{\ge} |r_n(x_n)|=\frac{(1-\frac{1}{n})^n}{|1-(1-\frac{1}{n})|}=n(1-\frac{1}{n})^n$

$\sup_{x\in(-1,1)} |r_n(x)|\ge n(1-\frac{1}{n})^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$
e^{-1} (~~конст.~~ $\cdot$ $n o(+))=+\infty$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(-1,1)} |r_n(x)|=+\infty\neq 0$

$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ не е равном. сходящо в/у $(-1,1)$

Т | Критерий на Вайерщрас |

Ако за ф. ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), (x \in E)$, $\exists \sum_{n=1}^{\infty} a_n, (a_n \geq 0)$: $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$|f_n(x)| \leq a_n, (\forall x \in E) \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \text{ е абс. равном. сх. в/у } E$$

(редът от сума от модулите)

Def | Казваме, че $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ е абс. сх. в/у E, ако е сх. в/у E ф. ред, $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$

Д-во:

$$r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x \in E} |r_n(x)| = 0 ?$$

$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$

$$|r_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

$q_n(x)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ е сх} \Rightarrow \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = (S - S_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\underset{\downarrow\atop 0}{0} \leq \sup \underset{\downarrow\atop 0}{|r_n(x)|} \leq \underset{\downarrow\atop 0}{\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \text{ е равн. сх. в/у } E$$

- $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$, $E = [-q, q]$, $0 < q < 1$

$\forall x \in [-q, q]: |x^n| \leq q^n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} \text{ е сх} \xRightarrow{\text{кр. В.}} \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \text{ е абс. и равн. сх. в/у } [-q, q]$$

18. Степенни редове - радиус и област на сходимост.

Def | Функц. ред от вида $(*)\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, където $a_n \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, се нарича <u>степенен ред</u>.

<u>В частност:</u> Ако $x_0 = 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

В т. $x = x_0$ степенният ред $(*)$ е сх.

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ пол. $t = x - x_0$

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$

Ако (1) е сх. в т. $x \Rightarrow$ ст. ред (2) е сх. в т. $t = x - x_0$

Ако (2) е сх. в т. $t \Rightarrow$ ст. ред (1) е сх. в т. $x = t + x_0$