$n \to \infty$ ... парц. суми

$S_n = \sum_{n=1}^{n} (-1)^{k-1} a_k$

разгл. подр. $S_2, S_4, S_6, \dots, S_{2n}, \dots$

1) $S_{2n} \le S_{2n+2}$

$S_{2n+2} = S_{2n} + \underbrace{a_{2n+1} - a_{2n+2}}_{\text{нег. инд. } \oplus} \ge S_{2n}$, т.е. ред. е н.р.

2) $S_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + a_{2n-1} - a_{2n} \ge 0$ $\quad a_1$

$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}$

$\Rightarrow \forall n: 0 \le S_{2n} \le a_1 \stackrel{1,2}{\Rightarrow}$ т.е. $\{S_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ е огр.

нека $S = \lim_{n \to \infty} S_{2n}$

разгл. $S_1, S_3, S_5, \dots, S_{2n+1}, \dots$

$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$

$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} (S_{2n} + a_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = S + 0 = S$

• $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} S_n = S \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ е сх.

## 16) Условно и абсолютно сходящи се редове

Деф 1) б.ч.р. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ се нарича абс. сх., ако е сх. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

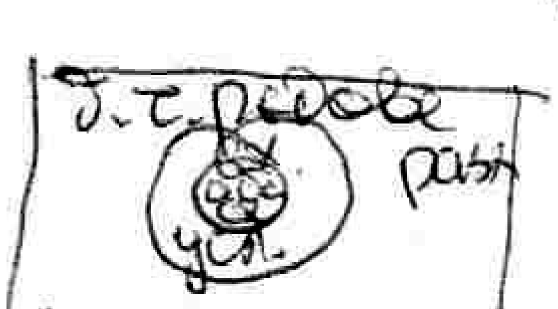
2) б.ч.р. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ се нар. усл. сх., ако е сх. и не е абс. сх.

• $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ - сх., $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \to$ разх.

усл. сх. $\quad$ харм. ред

• $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$, $a_n = \frac{1}{n^2} \to 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сх.

сх. кр. Л.




Т) Ако б.ч.р. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е абс. сх. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сх.

Д-во:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е абс. сх. $\Rightarrow$ е сх. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \Rightarrow$ (кр. Коши)

$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N_\varepsilon : \forall n > N_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow \left| \sum_{k=1}^{p} a_{n+k} \right| < \varepsilon$?

т.к. $\left| \sum_{k=1}^{p} a_{n+k} \right| \le \sum_{k=1}^{p} |a_{n+k}| < \varepsilon \Rightarrow$ (кр. Коши) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ

Пример: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \Rightarrow$ абс. сх., т.к. $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ е сх.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ е сх. по кр. на Лайбниц, но $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - х.р. $\to$ разходящ

**Т |** Нека $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1} b_n$ са абс. сх. $\Rightarrow$

1) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ е абс сх. ;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ е абс. сх.

Д-во:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – абс. сх., т.е. са сх. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ и $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \Rightarrow$

сх. е $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$, т.к. за $\forall\, n \in \mathbb{N}$:

$|a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n| \Rightarrow$ (п-п заравняването)

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n|$ е сх $\overset{D.}{\Longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ е сх.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е абс. сх $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ е сх. $\Rightarrow |\lambda| \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda a_n|$ е сх $\Rightarrow$

$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ е абс. сх, к. $(\lambda \in \mathbb{R})$

**Т |** Ако ч.ч. ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е абс. сх. $\Rightarrow$

ч.ч.р. $\sum_{n=1} a_{\pi(n)}$, където $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ е биекция,

е абс. сх. и $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = S$ $(S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n)$

Изображението $\pi$ е биекция, ако:

1) $\forall\, n \in \mathbb{N}, \exists\, m_n \in \mathbb{N} : \pi(m_n) = n$

2) $\forall\, n, m \in \mathbb{N}, n \neq m \Rightarrow \pi(n) \neq \pi(m)$

Д-во:

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $S_n^{|\cdot|} = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$, $S_n(\pi) = \sum_{k=1}^{n} a_{\pi(k)}$, $S_n^{|\cdot|}(\pi) = \sum_{k=1}^{n} |a_{\pi(k)}|$

1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ е абс. сх, т.е. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{\pi(n)}|$ е сх?

т.к. $\sum_{n=1} a_n$ е абс. сх $\Rightarrow$ сх. е $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \Rightarrow \{S_n^{|\cdot|}\}_{n=1}^{\infty}$ е огр. $\Rightarrow$

$\exists\, M > 0 : 0 \leq S_n^{|\cdot|} \leq M$ $(\star)$

Взимаме $S_n^{|\cdot|}(\pi) = \sum_{k=1}^{n} |a_{\pi(k)}|$, нека $m_n = \max_{1 \leq k \leq n} \pi(k) \Rightarrow$

$S_n^{|\cdot|}(\pi) = \sum_{k=1}^{n} |a_{\pi(k)}| \leq \sum_{k=1}^{m_n} |a_k| = S_{m_n}^{|\cdot|} \overset{(\star)}{\leq} M$

$\Rightarrow \{S_n^{|\cdot|}(\pi)\}_{n=1}^{\infty}$ е огр $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_{\pi(n)}|$ е сх.

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ е абс. сходящ

**Т В |** $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ е сх $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = S$, където $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ?

Д-во:

Т.к. $\sum_{n=1} a_n$ е абс. сх. $\Rightarrow \sum_{n=1} |a_n|$ и $\sum_{n=1} a_n = S$ - сходящ

(? $\lim_{n\to\infty} S_n(\pi) = S \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \nu : \forall n > \nu \Rightarrow |S - S_n(\pi)| < \varepsilon$ ?)

$\forall \varepsilon > 0 \to \exists \nu_1, \forall n > \nu_1, \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{k=1}^{p} |a_{n+k}| < \frac{\varepsilon}{2}$,

$\exists \nu_2, \forall n > \nu_2 \Rightarrow |S - S_n| < \frac{\varepsilon}{2}$

Взимаме $\nu > \max\{\nu_1, \nu_2\} \Rightarrow$

$\forall n > \nu_1, \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow \begin{cases} \sum_{k=1}^{p} |a_{n+k}| < \frac{\varepsilon}{2} & (1) \\ |S - S_n| < \frac{\varepsilon}{2} & (2) \end{cases}$

$\forall k \in \mathbb{N}, k \le \nu, \exists!\, m_k \in \mathbb{N} : \pi(m_k) = k$, т.е. $\pi^{-1}(k) = m_k$

Нека $\bar{\nu} = \max_{1 \le k \le \nu} m_k \quad (\bar{\nu} \ge \nu)$

$\{1,2,3,\dots,\nu\}$
$\{m_1, m_2, \dots, m_\nu\}$
$\bar{\nu}$ - др. ел. $\{1,\dots,\bar{\nu}\}$
$\{1,2,3,\dots,\bar{\nu}\} \supset \{m_1,\dots,m_\nu\}$

$\forall n > \bar{\nu} \Rightarrow |S - S_n(\pi)| = |(S - S_n) + (S_n - S_n(\pi))| \le$

$\le |S - S_n| + |S_n(\pi) - S_\nu| \overset{(2)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + |S_n(\pi) - S_n| = (*)$

$S_n(\pi) - S_n = \sum_{n=1}^{\nu} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_{\pi(k)} = \sum_{k=1}^{\nu} a_{\pi(m_k)} = \sum_{k \in M} a_{\pi(k)}$,

$\{1,2,\dots,n\} \supset \{m_1,\dots,m_\nu\}$

където $M = \{1,2,\dots,n\} \setminus \{m_1, m_2, \dots, m_\nu\}$ (3)

$* \overset{(3)}{=} \frac{\varepsilon}{2} + \left|\sum_{k \in M} a_{\pi(k)}\right| \le \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k \in M} |a_{\pi(k)}| = (**)$

Нека $\hat{\nu} = \max_{k \in M} \pi(k) \Rightarrow \exists\, p \in \mathbb{N} : \nu + p = \max_{k \in M} \pi(k) = \hat{\nu}$

$p = \hat{\nu} - \nu$, т.к. $\forall k \in M : \pi(k) > \nu$, $\nu + 1 \le \pi(k) \le \nu + p$

$\{\pi(k) : k \in M\} \subset \{\nu+1, \dots, \nu+p\}$

$(**) = \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k \in M} |a_{\pi(k)}| \le \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^{p} |a_{\nu+k}| \overset{(1)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n(\pi) = S$, т.е. $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

**Т (Риман)** Ако ч.т. ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е усл. сх. $\Rightarrow$

$\forall L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $\exists$ биекция $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : \sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = L$

**Т)** Нека $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ са абс. сх. редове $\Rightarrow$

ч.т.р. $\sum_{n,m \in \mathbb{N}} a_n b_m$, получен от сумирането на $\{a_n b_m\}_{n,m \in \mathbb{N}}$ в някакъв ред е абс. сходящ.

Неговата сума е равна на произв. на $S, \bar{S}$, където

$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\bar{S} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a_1 b_1$ | $a_1 b_2$ | $a_1 b_3$ | — |
| $a_2 b_1$ | $a_2 b_2$ | $a_2 b_3$ | — |
| $a_3 b_1$ | $a_3 b_2$ | $a_3 b_3$ | — |

$* \; a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_2 b_2 + a_1 b_3 + a_3 b_1 + a_2 b_3 + a_3 b_2 + a_3 b_3 + \dots$

$\hat{S}_n$ – $n^{\text{та}}$ парц. сума на (*)

$S_n^{2\wedge} = S_n . \overline{S_n}$, където $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $\overline{S_n} = \sum_{k=1}^{n} b_k$

• |(*)| $|a_1 b_1| + |a_1 b_2| + |a_2 b_1| + |a_2 b_2| + \dots = \hat{S}^{(\cdot)}$ – $n^{\text{та}}$ парц. сума на |(*)|

$\Rightarrow \hat{S}_{n^2}^{(\cdot)} = S_n^{(\cdot)} . \overline{S_n}^{(\cdot)}$, к. $S_n^{(\cdot)} = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$, $\overline{S_n}^{(\cdot)} = \sum_{k=1}^{n} |b_k|$

т.к. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ са абс. сх. $\Rightarrow$

$\{S_n^{(\cdot)}\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\overline{S_n}^{(\cdot)}\}_{n=1}^{\infty}$ са огр., т.е. $\exists M > 0$: $\begin{cases} S_n^{(\cdot)} \le M \\ \overline{S_n}^{(\cdot)} \le M \end{cases}$

$\Rightarrow \hat{S}_{n^2}^{(\cdot)} = S_n^{(\cdot)} . \overline{S_n}^{(\cdot)} \le M . M = M^2 \Rightarrow \{\hat{S}_{n^2}^{(\cdot)}\}_{n=1}^{\infty}$ е огр. $\Rightarrow$

$\hat{S}_n^{(\cdot)} \le \hat{S}_{n^2}^{(\cdot)} \le M^2 \Rightarrow \{\hat{S}_n^{(\cdot)}\}_{n=1}^{\infty}$ е огр. $\Rightarrow$

|(*)| е сх. $\Rightarrow$ (*) е абс. сх.

$\hat{S}_{n^2} = S_n . \overline{S_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} S . \overline{S} \Rightarrow$ сумата на (*) е $S . \overline{S}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_n b_m = S . \overline{S} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_m\right)$

## 17. Функционални редици и редове – сходимост и равномерна сходимост. Критерий на Вайерщрас

Деф Нека $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ е деф. в/у $E \subset \mathbb{R}$

Нека $x_0 \in E$.

1) Казваме, че д. ф. р. $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ е сх. в т. $x_0$, ако д. ч. р $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ е сх.

2) Казваме, че д. функционална редица $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ е сх. в/у $E$, ако $\forall x \in E$, д. ч. р. $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ е сх.

3) Казваме, че д. ф. р. $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ е сх към ф-та $f(x)$ в/у $E$, ако $\forall x \in E$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ : $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{E} f(x)$

Пример: 2) $\forall n \in \mathbb{N}: f_n(x) = x^{n-1}$, $x \in (-1,1)$, $\forall x \in (-1,1)$:

$1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$ : $\lim_{n\to\infty} x^{n-1} = 0$ в/у $(-1,1)$

3) $f_n(x) = x^{n-1}$, $f(x) = 0$

$x^{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{(-1,1)} 0$

.. $x_0 = 0$, $f_n(0) = \cancel{\ }\,n\,0 = 0$ $\quad f_n(0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{E} f(x) \Leftrightarrow \forall x \in E$, $f_n(x) \longrightarrow f(x) \Leftrightarrow$

$\forall x \in E$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N = N(x,\varepsilon)$: $\forall n > N \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$

Деф Казваме, че д. ф. р. $\{f_n(x)\}$ е равномерно сх. към $f(x)$ в/у $E$, ако $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N = N(\varepsilon)$: $\forall x \in E$, $\forall n > N \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ $\quad f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{E}{\rightrightarrows}} f(x)$ равном. сх.

Т $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{E}{\rightrightarrows}} 0 \Leftrightarrow \sup_{x \in E} |f_n(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

8-60: