$\forall \xi \in [1, +\infty) \Rightarrow \exists\, n : n \leq \xi < n+1 \Rightarrow$ $\quad \int_1^{\xi} + \int_{\xi}^{n+1} = \int_1^{n+1}$

$$F(\xi) = \int_1^{\xi} f(x)\,dx \leq \int_1^{n+1} f(x)\,dx$$

$\Rightarrow F(\xi)$ е огр. в/у $[1, +\infty) \Rightarrow \int_1^{+\infty} f(x)$ е сх.

Пример) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}, (\alpha \in \mathbb{R}) \Rightarrow$ е сх., ако $\alpha > 1$; е разх., ако $\alpha \leq 1$

1) $\alpha = 0$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^0} = \sum_{n=1}^{\infty} 1$ – разх.

2) $\alpha < 0 \Rightarrow \frac{1}{n^{\alpha}} = n^{-\alpha} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ – разх., т.к. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = +\infty$

• $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx = \begin{cases} \text{сх}, & \alpha > 1 \\ \text{разх}, & 0 < \alpha \leq 1 \end{cases}$

$f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, к. $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$

• $f'(x) = \left(\frac{1}{x^{\alpha}}\right)' = (x^{-\alpha})' = -\alpha \cdot x^{-\alpha-1} = \frac{-\alpha}{x^{\alpha+1}} < 0 \Rightarrow$

$f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$ е м. непр. в/у $[1, +\infty)$

3) ако $0 < \alpha \leq 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ е разх.

4) ако $\alpha > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ е сх.

## (15) Критерий на Лайбниц за редове с алтернативно сменящи се знаци

Де) Редът от вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n, \quad (a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N})$$

се нарича ред с алт. сменящи се знаци.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$$

Т) (Критерий на Лайбниц)

Нека за реда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ $(a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N})$ имаме:

1) $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \ldots$

2) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ е сх.

• $a_n = \frac{1}{n}$ – сх.

Д-во:

$n \to$ n-та парц. сума

$S_n = \sum_{n=1} (-1)^{k-1} a_k$

разгл. подр. $S_2, S_4, S_6, \dots, S_{2n}, \dots$

1) $S_{2n} \le S_{2n+2}$

$S_{2n+2} = S_{2n} + \underbrace{a_{2n-1} - a_{2n+2}}_{\text{нег. инд.} \oplus} \ge S_{2n}$, т.е. ред. е н.р.

2) $S_{2n} = \underbrace{a_1 - a_2}_{+} + \underbrace{a_3 - a_4}_{+} + \overset{\oplus}{\dots} + \underbrace{a_{2n-1} - a_{2n}}_{+} \ge 0$ $\quad a_1$

$S_{2n} = a_1 - \underbrace{(a_2 - a_3)}_{+} - \underbrace{(a_4 - a_5)}_{+} - \dots - \underbrace{(a_{2n-2} - a_{2n-1})}_{+} - a_{2n}$

$\Rightarrow \forall n: 0 \le S_{2n} \le a_1 \overset{1,2}{\Rightarrow}$ т.е. $\{S_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ е огр.

нека $S = \lim_{n\to\infty} S_{2n}$

разгл. $S_1, S_3, S_5, \dots, S_{2n+1}, \dots$

$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$

$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} (S_{2n} + a_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = S + 0 = S$

- $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} S_n = S \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ е сх.

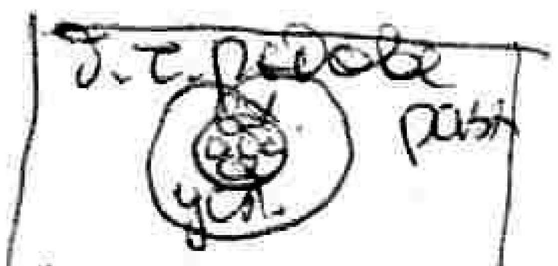
## 16 Условно и абсолютно сходящи се редове

**Деф** 1) б.т.р. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ се нарича абс. сх., ако е сх. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

2) б.т.р. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ се нар. усл. сх., ако е сх. и не е абс. сх.

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ - сх., $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \to$ разх.
  
  усл. сх. $\qquad$ харм. ред

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$, $a_n = \frac{1}{n^2} \to 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сх.
  
  сх. кр. Л.




**Т** Ако б.т.р. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е абс. сх. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сх.

Д-во:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е абс. сх. $\Rightarrow$ е сх. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \Rightarrow$ (кр. Коши)

$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N_\varepsilon : \forall n > N_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow \left| \sum_{k=1}^{p} a_{n+k} \right| < \varepsilon$?

т.к. $\left| \sum_{k=1}^{p} a_{n+k} \right| \le \sum_{k=1}^{p} |a_{n+k}| < \varepsilon \Rightarrow$ (кр. Коши) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ

**Пример:** 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \to$ абс. сх., т.к. $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ е сх.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ е сх. по кр. на Лайбниц, но

$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - х.р. $\to$ разходящ