$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ е сх $\Leftrightarrow$ сх $\{S_n\}_{n=1}^{\infty} \overset{\text{кр. на К. (старция)}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon): \forall n > N, p \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$

Д-во:

$|S_{n+p} - S_n| = |\sum\limits_{k=1}^{n+p} a_k - \sum\limits_{k=1}^{n} a_k| = |\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon$

Пример | $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, $a_n = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ — разх.

Кр. на Коши (отрицанието му) | $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ е разх $\Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0, \forall N,$

$\exists n_0 > N, p_0 \in \mathbb{N}: |a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + \dots + a_{n_0+p_0}| \geq \varepsilon_0$

• $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$: $\forall N \in \mathbb{N}$, $n_0 = N$, $p_0 = N$,

$$\underbrace{\frac{1}{N+1}}_{a_{n_0+1}} + \underbrace{\frac{1}{N+2}}_{a_{n_0+2}} + \underbrace{\frac{1}{N+3}}_{a_{N+3}} + \dots + \underbrace{\frac{1}{N+N}}_{a_{N+N}} > \underbrace{\frac{1}{2N} + \dots + \frac{1}{2N}}_{N} = N \cdot \frac{1}{2N} = \underset{\varepsilon_0}{\frac{1}{2}}$$

$1 \leq k \leq N$

$\frac{1}{N+k} > \frac{1}{2N} \overset{\text{кр. Коши}}{\Rightarrow} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ е разх.

<u>хармоничен ред!</u>

14. Редове с неотрицателни членове, признак за сравнение. Крит. на Даламбер. Крит. на Коши. Интегрален критерий на Коши

Д1 Редът от вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, където $a_n \geq 0$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) се нарича <u>ред с неотрицателни членове</u>.

Т1 Редът с неотр. членове $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ е сх $\Leftrightarrow \{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ е огр.

Д-во:

Нека $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \Rightarrow S_{n+1} - S_n = a_{n+1} \geq 0 \Rightarrow$

$S_{n+1} \geq S_n$, т.е. $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ е мон. $\uparrow$ ред.

Тогава д.т.р. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ е сх. $\Leftrightarrow \{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сх. $\Leftrightarrow \{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ е огр.

Т1 (<u>Признак за сравн.</u>) Нека д.т.р. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ удовл. усл.

$0 \leq a_n \leq b_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$). Тогава:

1) ако $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ е сх $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ е сх

2) ако $\sum_{n=1} a_n$ е разх $\Rightarrow \sum_{n=1} b_n$ е разх (следва от 1))

Д-во:

1) Нека $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $S_n' = \sum_{k=1}^{n} b_k$ S_n

т.к. $\forall k = \overline{1,n}$, $a_n \le b_k \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k \le \sum_{k=1}^{n} b_k = S_n$

Редът $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ е сх $\Rightarrow$ ред $\{S_n'\}$ е огр, т.е.

$\exists M > 0 : \forall n \in \mathbb{N} : S_n' \le M$

От др. страна $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \le S_n \le S_n' \le M \Rightarrow$

$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ е огр $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сх.

Зад| $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – разх.

$\sqrt{n} < n$ $\frac{1}{n} < \frac{1}{\sqrt{n}}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$

Деф| Б.ч.р. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с $a_n \ge 0$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) д.ч.р. с неотр числа

Т| Б.ч.р ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \ge 0$ е сх $\Leftrightarrow \{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ е огр

Т| Ако $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ т.че $0 \le a_n \le b_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

$\Rightarrow$ 1) ако е сх. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \Rightarrow$ сх. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сх.

2) ако е разх. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Rightarrow$ разх $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Пример| $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ разх. – $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – разх

1) $\sqrt{n} < n \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{\sqrt{n}}$

2) Разгл. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \underset{сх}{\Leftarrow} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

$0 < \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ – сх.

$\Rightarrow$ сх. по призн. за сравн.

Критерий на Даламбер| Нека $\sum_{n=1} a_n : a_n > 0$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

Ако: 1) $\exists\, 0 < q < 1 : \forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сх.

2) $\forall n \in \mathbb{N}$: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е разх.

$\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

Д-во:

1) Нека $\exists\, 0 < q < 1 : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \le q$

– $\frac{a_2}{a_1} \le q \Rightarrow a_2 \le a_1 q$

$\frac{a_3}{a_2} \le q \Rightarrow a_3 \le a_2 q \le a_1 q^2$

$\frac{a_4}{a_5} \le q \Rightarrow a_4 \le a_3 q \le a_2 q^2 \le a_1 q^3$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q \Rightarrow a_{n+1} \le a_n \cdot q \le a_1 \cdot q^n$

$-\sum_{n=0}^{\infty} a_1 q^n$ - сх? $= a_1 \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ - сх, к. $|q| < 1$

$a_1 \le a_1 q^0 = a_1$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$0 < a_n \le a_1 q^{n-1} \ (\forall n \in N)$

пр. за сравн. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сх.

2) Нека $\forall n \in N: \frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1 \Rightarrow a_{n+1} \ge a_n \ (\forall n \in N)$

$0 < a_1 \le a_2 \le a_3 \dots$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_1$ - разх. $= \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \ b_n = a_1 \ (\forall n \in N) \Rightarrow b_n = a_1 \to a_1 \ne 0$
↳ n-ти член не кл. към 0 ⇒ разх.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ разх. по пр. за сравн. $\forall n \in N: 0 < a_1 \le a_n$

~~$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$~~ Зад.| Нека $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0, (\forall n \in N)$

(⇔ на кр. на Д.)

Ако: 1) $\exists\, 0<q<1, \exists \nu: \forall n > \nu \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \le q \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сх.

2) $\exists \nu: \forall n > \nu \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е разх.

Следствие| Нека $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0, \forall n \in N$ и

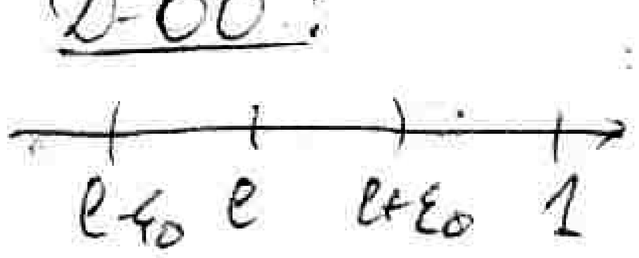
$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \Rightarrow$ 1) Ако $l < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сх

2) Ако $l > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е разх

3) Ако $l = 1$ - неопределеност

Д-во:

1) Нека $l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$



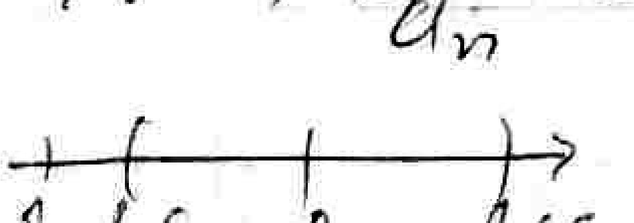
Избираме $\varepsilon_0 > 0: l + \varepsilon_0 < 1 \Rightarrow \varepsilon_0 > 0, \exists \nu = \nu(\varepsilon_0): \forall n > \nu \Rightarrow$

$\left| l - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < \varepsilon_0 \Rightarrow$

$\cancel{l - \varepsilon_0} < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \underbrace{l + \varepsilon_0}_{q} < 1$

$\Rightarrow \exists q \in (0,1): \exists \nu: \forall n > \nu \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \le q \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сх.

2) Нека $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l > 1$



Изб. $\varepsilon_0 > 0: 1 < l - \varepsilon_0$

$\Rightarrow \varepsilon_0 > 0; \exists \nu: \forall n > \nu \Rightarrow \left| l - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < \varepsilon_0 \Rightarrow 1 < \underbrace{l - \varepsilon_0}_{q} < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \cancel{l + \varepsilon_0}$

$\Rightarrow \exists \nu: \forall n > \nu \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} > q > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е разх.

Примери: 1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}, a>0$ $\qquad a=1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ е сх $\quad = e = 2,41$

$a_n = \frac{a^n}{n!}$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}} = \frac{a}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 = l < 1$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - разх. , $a_n = \frac{1}{n}$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 = l$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ е сх. $a_n = \frac{1}{n^2} > 0$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 = l$

Т-критерий на Коши | Нека $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Ако 1) $\exists\, 0 < q < 1 : \forall n > 1, \sqrt[n]{a_n} \leq q \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сх. $\qquad \{\sqrt[n]{a_n}\}_{n=2}^{\infty}$

2) $\forall n > 1 : \sqrt[n]{a_n} \geq 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е разх.

Забележка | Нека $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0 (\forall n \in \mathbb{N})$

Ако: 1) $\exists\, 0 < q < 1, \exists N : \forall n > N \rightarrow \sqrt[n]{a_n} \leq q \Rightarrow$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сх.

2) $\exists N : \forall n > N \rightarrow \sqrt[n]{a_n} \geq 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е разх

Следствие | Нека $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ и $\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l \Rightarrow$

1) ако $l < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сх

2) ако $l > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е разх.

3) $l = 1$ - неопр.

Пример: | $\binom{2n}{n} = \frac{2n!}{n!(2n-n)!} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ $\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n}$, $a_n = \binom{2n}{n} > 0$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\binom{2(n+1)}{n+1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{\frac{[2(n+1)]!}{[(n+1)!]^2}}{\frac{2n!}{(n!)^2}} = \frac{[2(n+1)]!}{(2n)!} \cdot \frac{(n!)^2}{((n+1)!)^2} =$

$= \frac{2(n+1)(2n+1)}{(n+1)^2} = 2\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) = 2\left(2 - \frac{1}{n+1}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 4 = l > 1$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n}$ е разх // $\lim_{n\to\infty} \binom{2n}{n} \neq 0$

Док-во:

1) Нека $\exists\, 0 < q < 1 : \forall n > 1 : \sqrt[n]{a_n} \leq q \Rightarrow$

1) $a_n \leq q^n$, $\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} a_n}_{\text{сх. за ср.}}$, $\sum_{n=2}^{\infty} q^n = q^2 \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} q^{n-2}}$ сх, $0 < q < 1$

$\forall n \geq 2 : 0 \leq a_n \leq q^n$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сх.

2) Нека $\forall n > 1 : \sqrt[n]{a_n} \geq 1 \Rightarrow a_n \geq 1$ $\qquad \sum_{n=2}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=2}^{\infty} 1$ - разх

$a_n \geq 1 \geq 0$

$\Rightarrow$ (п-п за сравн.) $\sum_{n=2} a_n$ е разх $\Rightarrow \sum_{n=1} a_n$ е разх, $\lim a_n \neq 0$

Д-во (следствие):

1) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$, $l < 1$ $l-\varepsilon_0 \quad l \quad l+\varepsilon_0$

за ε_0, $\exists N: \forall n > N \Rightarrow |l - \sqrt[n]{a_n}| < \varepsilon_0$

$\Rightarrow l - \varepsilon_0 < \sqrt[n]{a_n} < \underbrace{l+\varepsilon_0}_{q} < 1 \overset{\text{кр.к.}}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сх.

2) $1 < l$ $1 \quad l-\varepsilon_0 \quad l \quad l+\varepsilon_0$ избл. $\varepsilon_0 > 0: l - \varepsilon_0 > 1$

$\varepsilon_0 > 0, \exists N: \forall n > N: |l - \sqrt[n]{a_n}| < \varepsilon_0$

$1 - l - \varepsilon_0 < \sqrt[n]{a_n} < \cancel{l+\varepsilon_0}$

$\forall n > N: \sqrt[n]{a_n} > 1 \overset{\text{кр.к.}}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е разх.

Пример: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2}$, $a_n = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2} > 0$

$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2}} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n = \frac{(n+1)^n}{(n+2)^n} = \frac{n^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n^n\left(1+\frac{2}{n}\right)^n} \longrightarrow \frac{e}{e^2} = \frac{1}{e} < 1$

$\Rightarrow$ (гр. сл. на кр. на К.) е сх.

Т - Интегрален критерий на Коши (Нека $f(x)$ е мон. $\downarrow$ в/у $[1, +\infty)$)

Б.о.о.р. $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ е сх $\Leftrightarrow \int_1^{+\infty} f(x)dx$ е сх.

Д-во:

$\forall k \in N \Rightarrow \forall x \in [k, k+1]: f(k+1) \le f(x) \le f(k)$ (м. $\downarrow$)

$\int_k^{k+1} f(k+1)dx \le \int_k^{k+1} f(x)dx \le \int_k^{k+1} f(k)dx$

$f(k+1) \le \int_k^{k+1} f(x)dx \le f(k)$ (за $\forall k \in N$)

Нека $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$

$\sum_{k=1}^{n} f(k+1) \le \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(x)dx \le \sum_{k=1}^{n} f(k) = S_n$

$S_n \ge \int_1^{n+1} f(x)dx \ge S_{n+1} - f(1)$

$\sum_{s=2}^{n+1} f(s) = S_{n+1} - f(1)$

$\forall n \in N: S_{n+1} - f(1) \le \int_1^{n+1} f(x)dx$ ~~е огр. в/у $[1,+\infty)$~~ $\le S_n$ (*)

$\Leftarrow$) Нека $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ е сх $\Rightarrow$ ф-та $\int_1^{\xi} f(x)dx$ е огр в/у $[1, +\infty)$,

т.е. $\exists M > 0: \int_1^{\xi} f(x)dx \le M, \forall \xi \ge 1$

$S_{n+1} \le f(1) + \int_1^{n+1} f(x)dx \overset{(1)}{\le} f(1) + M$ ($\forall n \in N$) $\Rightarrow$

$\{S_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ е огр. $\Rightarrow \{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ е огр $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ е сх.

$\Rightarrow$) Нека $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ е сх $\Rightarrow \{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ е огр

$\exists M > 0: S_n \le M$ ($\forall n \in N$) $\overset{*}{\Rightarrow} \forall n \in N: \int_1^{n+1} f(x)dx \le S_n \le M$

$\forall \xi \in [1, +\infty) \Rightarrow \exists\, n : n \leq \xi < n+1 \Rightarrow$

$$F(\xi) = \int_1^{\xi} f(x)\,dx \leq \int_1^{n+1} f(x)\,dx$$

$$\int_1^{\xi} + \int_{\xi}^{n+1} = \int_1^{n+1}$$

$\Rightarrow F(\xi)$ е огр. в/у $[1, +\infty) \Rightarrow \int_1^{+\infty} f(x)$ е сх.

Пример| $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}, (\alpha \in \mathbb{R}) \Rightarrow \begin{cases} * \text{ е сх., ако } \alpha > 1 \\ * \text{ е разх., ако } \alpha \leq 1 \end{cases}$

1) $\alpha = 0$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^0} = \sum_{n=1}^{\infty} 1$ – разх.

2) $\alpha < 0 \Rightarrow \frac{1}{n^\alpha} = n^{-\alpha} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ – разх., т.к. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = +\infty$

• $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \text{сх}, & \alpha > 1 \\ \text{разх}, & 0 < \alpha \leq 1 \end{cases}$

$f(x) = \frac{1}{x^\alpha} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, к. $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$

• $f'(x) = \left(\frac{1}{x^\alpha}\right)' = (x^{-\alpha})' = -\alpha \cdot x^{-\alpha-1} = \frac{-\alpha}{x^{\alpha+1}} < 0 \Rightarrow$ ($\alpha > 0$, $x^{\alpha+1} > 0$)

$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ е м. непр. в/у $[1, +\infty)$

3) ако $0 < \alpha \leq 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ е разх.

4) ако $\alpha > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ е сх.

(15) Критерий на Лайбниц за редове с алтернативно сменящи се знаци

Деф| Редът от вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n, \quad (a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N})$$

се нарича ред с алт. сменящи се знаци

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 - - -$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - - - -$$

Т| (Критерий на Лайбниц)

Нека за реда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ $(a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N})$ имаме:

1) $a_1 \geq a_2 \geq - - - \geq a_n - - -$

2) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ е сх.

• $a_n = \frac{1}{n}$ – сх.

Д-во: