# 3. Интеграл с променлива горна граница. Формула на Нютон-Лайбниц.

**Деф.** Нека $f(x)$ е инт. в/у $[a,b] \Rightarrow \forall x \in [a,b] \Rightarrow f$ е инт. в/у $[a,x] \Rightarrow$

$\exists \int_a^x f(t)\,dt,\ x \in [a,b] \Rightarrow F(x) = \int_a^x f(t)\,dt,\ x \in [a,b]$ интегр. като ф-я на горната и гр.

$G(x) = \int_x^b f(t)\,dt,\ x \in [a,b]$ — " — на долната гр. граница

**Свойство 1** (теорема) Ако $f(x)$ е инт. в/у $[a,b] \Rightarrow F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ е непр. в/у $[a,b]$.

Д-во:

Нека $x \in [a,b]$

$? \lim_{\Delta x \to 0} F(x+\Delta x) = F(x)\ ? \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} [F(x+\Delta x) - F(x)] = 0\ ?$

$F(x+\Delta x) - F(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \cancel{\int_a^x f(t)\,dt} + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \cancel{\int_a^x f(t)\,dt}$ (св 4) $= \int_x^{x+\Delta x} f(t)$

Нека $|F(x+\Delta x) - F(x)| = \left|\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt\right| \le \left|\int_x^{x+\Delta x} |f(t)|\,dt\right|$

$f(x)$ - инт. в/у $[a,b] \Rightarrow$ е огр. в/у $[a,b] \Rightarrow$

$\exists M > 0 : |f(x)| \le M,\ \forall x \in [a,b] \Rightarrow$

$\left|\int_x^{x+\Delta x} |f(t)|\,dt\right| \le M \left|\int_x^{x+\Delta x} 1\,dx\right| = M|\Delta x|$

$0 \le |F(x+\Delta x) - F(x)| \le M|\Delta x|$

$\Delta x \to 0$: $0 \to 0$, $\downarrow \Delta x \to 0$ $0$, $\downarrow \Delta x \to 0$ $0$

$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} [F(x+\Delta x) - F(x)] = 0 \Rightarrow f(x)$ - непр. във $\forall$ т. $x \in [a,b]$

**Свойство 2:** (теорема) Ако $f(x)$ е инт. в/у $[a,b]$ и $f(x)$ - непр. в т. $x_0 \in [a,b]$ $\Rightarrow F(x)$ е диф в т. $x_0$. При това $F'(x_0) = f(x_0)$

Д-во:

$\exists\ ?\ F'(x_0) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = f(x_0)\ ?$ $\quad ? dt$

$\frac{\Delta F}{\Delta x} - f(x_0) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x)\,dt - f(x_0)$ $(\Delta x : x_0 + \Delta x \in [a,b]) =$

$= \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x)\,dt - \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x_0)\,dt = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} [f(t) - f(x_0)]\,dt \Rightarrow$

$\forall \varepsilon > 0$, т.к. $f(x)$ е непр. в т. $x_0$, то $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$:

$\forall \Delta x : x_0 + \Delta x_0 \in [a,b],\ |\Delta x| < \delta \Rightarrow |f(x_0+\Delta x)| < \varepsilon \Leftrightarrow$

$x \in [a,b] : |\overset{\Delta x}{\overline{x - x_0}}| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$\left|\frac{\Delta F}{\Delta x} - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} [f(t) - f(x_0)]\,dt\right| = \frac{1}{|\Delta x|} \cdot \left|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} [f(t) - f(x_0)]\,dt\right| \le$

$\frac{1}{\Delta x} \left|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} |f(t) - f(x_0)|\,dt\right|$ ★

$|\Delta x| < \delta$

- $t \in [x_0, x_0 + \Delta x]$ $\Delta x > 0$
  $t \in [x_0 + \Delta x, x_0]$ $\Delta x < 0$

$|\Delta x| < \delta \Rightarrow |t - x_0| < \delta$

$|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow$

$\star \leq \frac{1}{|\Delta x|} \left| \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} \varepsilon \, dt \right| = \frac{1}{|\Delta x|} \cdot \varepsilon \left| \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} 1 \, dt \right| = \frac{1}{\cancel{|\Delta x|}} \cdot \varepsilon \, \cancel{|\Delta x|} = \varepsilon$

$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = f(x_0) \Rightarrow \exists \; F'(x_0) = f(x_0)$

Следствие: Ако $f(x)$ е непр. в/у $[a,b] \Rightarrow F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$ е диф в/у $[a,b]$. При това $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a,b]$

т.е. $F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$ е прим. ф-яна $f(x)$ в/у $dx$.

Т (Нютон-Лайбниц) Нека $f(x)$ - непр в/у $[a,b]$ и $\Phi(x)$ - прим. ф-я на $f(x)$ в/у $[a,b] \Rightarrow$

$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a) = \Phi(x)\Big|_a^b$

Пример: $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$

Д-во:

$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ е също е прим. на $f(x)$ в/у $[a,b] \Rightarrow$

$\exists\; c \in R: \Phi(x) = F(x) + c \; (\forall x \in [a,b]) \Rightarrow$

$\Phi(a) = F(a) + c = 0 + c = c$

$F(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$

$\Phi(b) = F(b) + \Phi(a) = \int_a^b f(t)\,dt + \Phi a \Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt = \Phi(b) - \Phi(a)$

## 6. Интегриране по части и смяна на пром. в опр. инт.

Т Нека $f(x)$ - непр. в/у $[A,B]$ и $\varphi(t)$ е деф в/у $[\alpha,\beta]$ със ст-сти в $[A,B]$, т.е. $\varphi\,[\alpha,\beta] \to [A,B]$, такава, че:

1) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$

2) $\exists\; \varphi'(t)$ - непр. в/у $[\alpha,\beta]$

$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \underbrace{\varphi'(t)\cdot dt}_{d\varphi(t)} = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,d\varphi(t)$

Д-во:

Нека $F(x)$ - прим. ф-я на $f(x)$ в/у $[A,B] \Rightarrow$

$\Rightarrow F(\varphi(t))$ е прим. ф-я на $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ в/у $[\alpha,\beta]$

$\forall t \in [\alpha,\beta]: [F(\varphi(t))]' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$

$\overset{\text{Ф. Н-Л.}}{=} \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t))\Big|_\alpha^\beta = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) \overset{\text{Ф. Н-Л.}}{=}$

$= \int_a^b f(x)\,dx$

Т Нека $f(x)$ и $g(x)$ имат непр. произв. $f'(x)$ и $g'(x)$ в/у $[a,b] \Rightarrow$

$\int_a^b f(x)\,dg(x) = f(x)\cdot g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)\,df(x)$