$\boxed{I = \int_a^b f(x)dx}$ – определен интеграл на Риман от $f(x)$ в/у $[a, b]$
↳ подинтегрална ф-я

$\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$ $\Big\}$ $D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0, & x \in \mathbb{I} \cap [0,1] \end{cases}$ не е инт.
[I - безкр. ... за ...]

$\boxed{\text{Т - НУ}}$ Ако $f(x)$ – интегруема в см. на Риман в/у $[a, b]$ ⇒
$f(x)$ е огр. в/у $[a, b]$ $\not\Leftarrow$ дирихле

Д-во:

- Да докажем противното – че $f(x)$ не е огр. в/у $[a, b]$
- Т.к. $f(x)$ е инт. в/у $[a, b]$ ⇒ $\exists I \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta_\varepsilon > 0 :$
$\forall \tau = \{x_i\}_{i=0}^n, \delta_\tau < \delta, \forall \xi = \{\xi_i\}^n, \xi_i \in [x_{i-1}, x_i], (i = \overline{1,n}) \Rightarrow$

$$|I - \sigma_\tau(f, \xi)| < \varepsilon \Leftrightarrow I - \varepsilon < \sigma_\tau(f, \xi) < I + \varepsilon$$

- фиксираме $\varepsilon > 0$, фикс. разб. τ, $\delta_\tau < \delta$

- т.к. по допускане $f(x)$ не е огр. в/у $[a, b]$ ⇒ $f(x)$ е неограничена поне в/у 1 инт. $[x_{i-1}, x_i]$
ще смятаме, че не е ограничена в/у инт. $[x_0, x_1]$
$\forall \xi = \{\xi_1, \xi_2^0, \dots, \xi_n^0\}$

$$I - \varepsilon < \sigma_\tau(f, \xi') < I + \varepsilon$$

$$I - \varepsilon < f(\xi_1)\Delta x_1 + \overbrace{\sum_{i=2}^n f(\xi_i^0)\Delta x_i}^{A} < I + \varepsilon$$

$$I - A - \varepsilon < f(\xi_1)\Delta x_1 < I - A + \varepsilon, \ \forall \xi_1 \in [x_0, x_1] : \Delta x_1 > 0$$

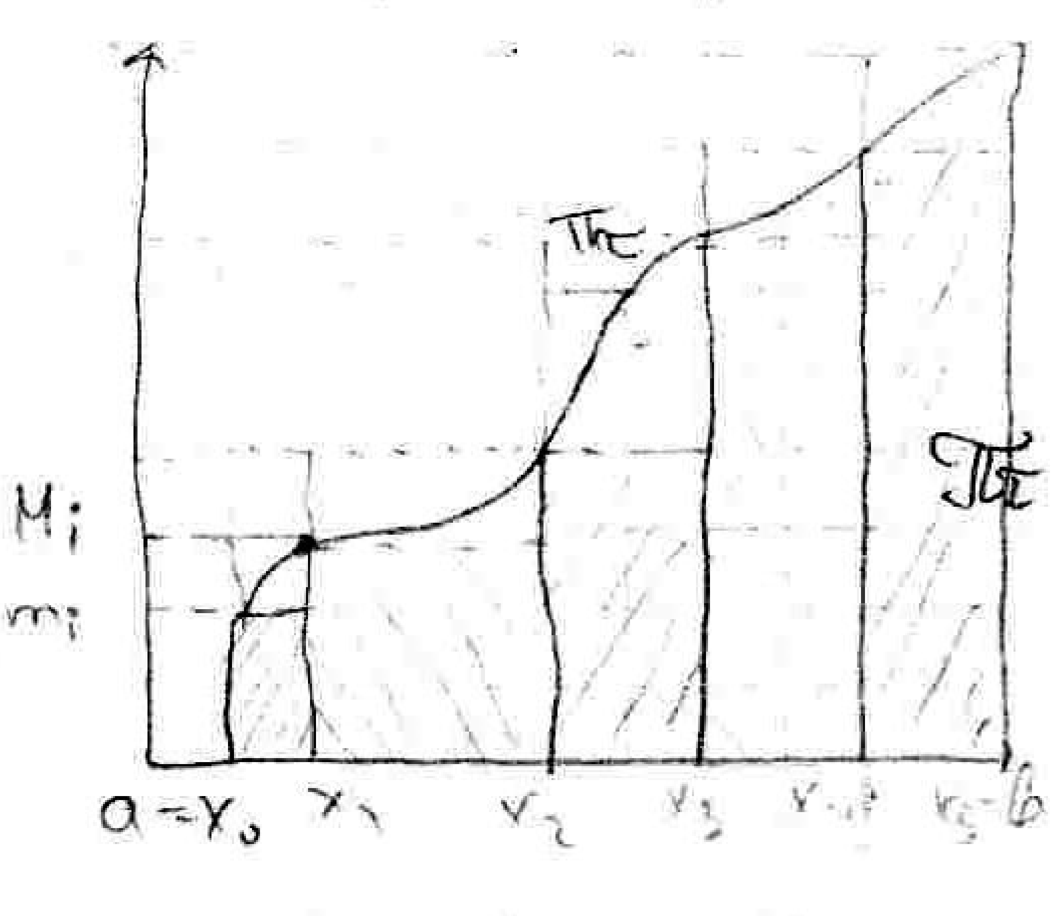
$$\frac{I - A - \varepsilon}{\Delta x_1} < f(\xi_1) < \frac{I - A + \varepsilon}{\Delta x_1}, \ \forall \xi_1 \in [x_0, x_1] \Rightarrow$$

$f(x_1)$ е огр. в/у инт. $[x_0, x_1]$ ⅄ ⇒ безкр. бр. съб. с огр. сума
$f(x)$ е огр. в/у $[a, b]$

2. Суми на Дарбу. Критерий за интегруемост на функция.

- Нека $f(x)$ е ограничена в/у $[a, b]$
$\forall \tau = \{x_i\}_{i=1}^n$
⇒ $f(x)$ е огр. в/у $\forall [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1 \div n)$
⇒ $\forall i = 1 \div n$ $\exists \sup\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) = M_i$
$\exists \inf\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) = m_i$

$S_\tau = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$ – голяма
$s_\tau = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$ – малка
} сума на Дарбу



$\Pi_\tau \subset D \subset \Pi_\tau$
$S_\tau = S(\Pi_\tau)$
$s_\tau = S(\Pi_\tau)$
$D = \{(x, y) : a \le x \le b, \ 0 \le y \le f(x)\}$

Нека $f(x)$ е огр. в/у $[a,b]$

Свойство 1: $\forall \tau=\{x_i\}_{i=0}^{n}, \forall \xi=\{\xi_i\}_{i=1}^{n}, \xi_i\in[x_{i-1},x_i], (\forall i=1\div n)$

$$\Rightarrow s_\tau \le \sigma_\tau(f;\xi)\le S_\tau$$

Д-во:

$$\sigma_\tau(f;\xi)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,\ \forall i=1\div n,\ \xi_i\in[x_{i-1},x_i],\ \xi=\{\xi_i\}_{i=1}^{n}$$

$m_i \le f(\xi_i)\le M_i \quad (\forall i=1\div n) \,|\cdot(\Delta x_i>0)$

$m_i\Delta x_i \le f(\xi_i)\Delta x_i\le M_i\Delta x_i,\ \forall i=1\div n$ (+)

$$\Rightarrow \underset{s_\tau}{\underset{\|}{\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i}} \le \underset{\sigma_\tau(f;\xi)}{\underset{\|}{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i}} \le \underset{S_\tau}{\underset{\|}{\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i}}$$

Свойство 2: $s_\tau=\inf\sigma_\tau(f;\xi)$

$S_\tau=\sup\sigma_\tau(f;\xi)$

Д-во:

$?\ s_\tau=\inf\limits_{\xi}\sigma_\tau(f;\xi) \Leftrightarrow 1)\ \forall\xi: s_\tau\le\sigma_\tau(f;\xi)$ (Св. 1)

$?\ 2)\ \forall\varepsilon>0, \exists\xi_\varepsilon: \sigma_\tau(f;\xi_\varepsilon)<s_\tau+\varepsilon$

$\forall\varepsilon>0 \Rightarrow \varepsilon_0=\boxed{\dfrac{\varepsilon}{b-a}}>0$

$m_i=\inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$, то за $\varepsilon_0>0\Rightarrow\exists\xi_i^{\varepsilon}\in[x_{i-1},x_i]$

$\tau=\{x_i\}_{i=0}^{n}$

$f(\xi_i^{\varepsilon})<m_i+\dfrac{\varepsilon}{b-a}\,\Big|\cdot\Delta x_i$

$\forall i=1\div n: f(\xi_i^{\varepsilon})\Delta x_i<m_i\Delta x_i+\dfrac{\varepsilon}{b-a}\Delta x_i$

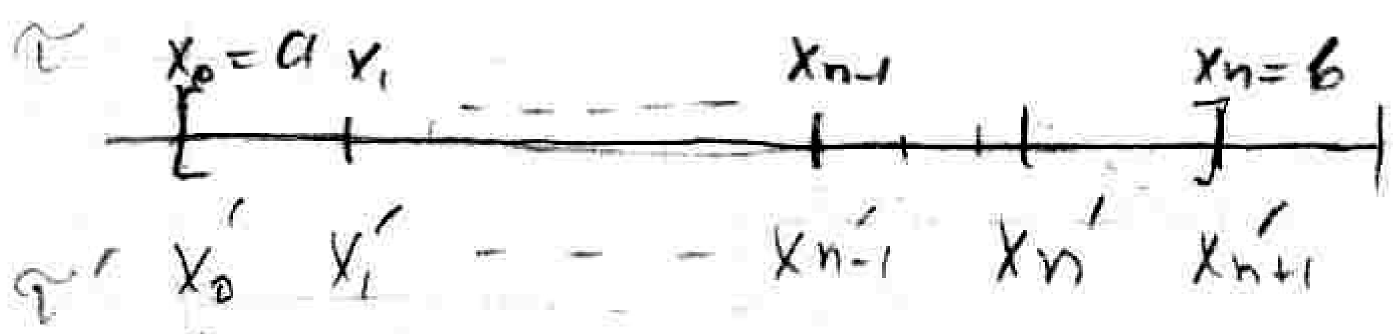
$\Rightarrow\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i^{\varepsilon})\Delta x_i<\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i+\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\varepsilon}{b-a}\Delta x_i$

$\sigma_i(f;\xi_\varepsilon)<s_\tau+\dfrac{\varepsilon}{b-a}\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i}_{=b-a}$

$\sigma_\tau(f;\xi_\varepsilon)<s_\tau+\varepsilon\Rightarrow 2)\ \checkmark$

Свойство 3: Ако $\tau<\tau'\Rightarrow s_\tau\le s_{\tau'}\le S_{\tau'}\le S_\tau$

Док:



$\tau=\{x_i\}_{i=0}^{n}$ $\quad \begin{cases} x_i'=x_i\ (\forall i=0\div n-1)\\ x_n'\in(x_{n-1},x_n),\ x_{n+1}'=x_n\end{cases}$

$\tau'=\{x_i'\}_{i=0}^{n+1}$

$\tau=s_\tau=\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i$

$\tau'=s_{\tau'}=\sum_{i=1}^{n+1} m_i'\Delta x_i'$, където $m_i'=\inf\limits_{x\in[x_{i-1}',x_i']} f(x)$, $\Delta x_i'=x_i'-x_{i-1}'$

$\forall i=1\div n-1\begin{cases} m_i'=m_i\\ \Delta x_i'=\Delta x_i\end{cases}$

$m_n^* = \inf\limits_{x\in[x_{n-1}^*, x_n^*]} f(x)$ $\Big]$ при инт.

$m_n' = \inf\limits_{x\in[x_{n-1}', x_n']} f(x)$ $\Rightarrow m_n \le m_n'$, $m_n \le m_{n+1}'$

$m_{n+1}' = \inf\limits_{x\in[x_n', x_{n+1}']} f(x)$

$\longrightarrow \Delta x_n = \Delta x_n' + \Delta x_{n+1}'$

$s_\tau = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \sum\limits_{i=1}^{n-1} m_i \Delta x_i + m_n \Delta x_n = \sum\limits_{i=1}^{n-1} m_i' \Delta x_i' + m_n \Delta x_n' + m_n \Delta x_{n+1}' \le$

$\le \sum\limits_{i=1}^{n-1} m_i' \Delta x_i' + m_n' \Delta x_n' + m_{n+1}' \Delta x_{n+1}' = \sum\limits_{i=1}^{n+1} m_i' x_i' = s_{\tau'}$

$\Rightarrow s_\tau \le s_{\tau'}$

<u>Свойство 4:</u> $\forall \tau, \tau' \Rightarrow s_\tau \le S_{\tau'}$

Д-во:

Нека τ, τ' - разб. на $[a,b]$ и $\tau'' = \tau \cup \tau'$ - разб. на $[a,b]$

т.к. $\tau < \tau''$, $\tau' < \tau''$ $\overset{св3}{\Rightarrow}$ $s_\tau \le s_{\tau''}$, $S_{\tau''} \le S_{\tau'}$ $\Rightarrow$ $s_\tau \le s_{\tau''} \le S_{\tau''} \le S_{\tau'}$

<u>Свойство 5.</u> $\exists \sup s_\tau = \underline{I}$ ← <u>долен</u>

и $\exists \inf S_\tau = \overline{I}$ ← <u>горен</u> — <u>интеграл на Дарбу</u>

При това $s_\tau \le \underline{I} \le \overline{I} \le S_\tau$ $(\forall \tau)$

Д-во:

От св. 4 $\Rightarrow \forall \tau, \tau' \Rightarrow s_\tau \le S_{\tau'}$

фиксираме $\tau' \Rightarrow \{s_\tau : \tau\}$ е огр. отгоре

т-ла за непр. $\exists \sup\limits_\tau s_\tau = \underline{I}$ (1)

τ' - произв. фикс. $\Rightarrow \underline{I} \le S_{\tau'}$, $\forall \tau'$

$\Rightarrow \{S_{\tau'} ; \tau'\}$ - огр. отдолу $\Rightarrow \exists \inf\limits_{\tau'} S_{\tau'} = \overline{I}$ (2)

$\overset{1,2}{\Rightarrow} \underline{I} \le \overline{I}$

<u>Т: Критерий за интегруемост:</u> $f(x)$ - деф. и огр. в/у $[a,b]$

Ф-та $f(x)$ е интегруема по Риман в/у $[a,b] \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$:

$\forall \tau = \{x_i\}_{i=0}^n : \delta_\tau < \delta \Rightarrow S_\tau - s_\tau < \varepsilon$

Д-во:

$\Rightarrow$ | $f(x)$ - инт. в/у $[a,b] \Rightarrow \exists I \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) : \forall \tau = \{x_i\}_{i=0}^n$,

$\delta_\tau < \delta$, $\forall \xi = \{\xi_i\}_{i=1}^n$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $(\forall i = 1 \div n) \Rightarrow$

$|I - \sigma_\tau(f, \xi)| < \frac{\varepsilon}{3}$ *

* $\Leftrightarrow I - \frac{\varepsilon}{3} \overset{1}{<} \sigma_\tau(f;\xi) \overset{2}{<} I + \frac{\varepsilon}{3}$; $(\forall \xi)$

1) $I - \frac{\varepsilon}{3} < \sigma_\tau(f, \xi)$ $\forall \xi \Rightarrow \inf\limits_{\xi} \sigma_\tau(f, \xi) \ge I - \frac{\varepsilon}{3}$

$I - \frac{\varepsilon}{3} \le s_\tau$ при τ фикс.

2) $\sigma_\tau(f,\xi) < I + \frac{\varepsilon}{3}$ $(\forall \xi)$

$\Rightarrow \sup \sigma_\tau(f;\xi) \le I + \frac{\varepsilon}{3}$

$S_\tau \le I + \frac{\varepsilon}{3}$

$\overset{1,2}{\Rightarrow} \left| \begin{array}{l} S_\tau \le I + \frac{\varepsilon}{3} \\ -s_\tau \le -I + \frac{\varepsilon}{3} \end{array} \right. \oplus \Rightarrow S_\tau - s_\tau \le \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$

$\Leftarrow$ | Нека $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: \forall \tau = \{x_i\}_{i=0}^n, \delta_\tau < \delta \Rightarrow$

$S_\tau - s_\tau < \varepsilon$ ★

$\underline{I} = \sup_\tau s_\tau$

$\overline{I} = \inf_\tau S_\tau$ $\quad$ $\left. \begin{array}{l} s_\tau \le \underline{I} \le \overline{I} \le S_\tau \\ -\underline{I} \le -s_\tau \end{array} \right]+ \Rightarrow 0 \le \overline{I} - \underline{I} \le S_\tau - s_\tau, \forall \tau$

★ $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \tau: S_{\tau_\varepsilon} - s_{\tau_\varepsilon} < \varepsilon$

$0 \le \overline{I} - \underline{I} \le S_{\tau_\varepsilon} - s_{\tau_\varepsilon} < \varepsilon$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0: 0 \le \overline{I} - \underline{I} < \varepsilon \Rightarrow \overline{I} - \underline{I} = 0 \Leftrightarrow \overline{I} = \underline{I} = I$

т.е. $\forall \tau: s_\tau \le I \le S_\tau$

$\forall \tau, \forall \xi = \{\xi_i\}_{i=1}^n$ $\quad s_\tau \le \sigma_\tau(f,\xi) \le S_\tau$ $\Big] \Rightarrow \forall \tau, \forall \xi = \{\xi_i\}_{i=1}^n$ $\left. \begin{array}{l} s_\tau \le I \le S_\tau \\ -S_\tau \le -\sigma(f,\xi) \le -s_\tau \end{array} \right] \oplus$

$\Rightarrow -(S_\tau - s_\tau) \le I - \sigma_\tau(f,\xi) \le S_\tau - s_\tau$

$\Rightarrow |I - \sigma_\tau(f,\xi)| \le S_\tau - s_\tau, \forall \tau, \forall \xi$

(усл.) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: \forall \tau = \{x_i\}_{i=1}^n, \delta_\tau < \delta, \forall \xi = \{\xi_i\}_{i=1}^n$

$\Rightarrow |I - \sigma_\tau(f,\xi)| \le S_\tau - s_\tau < \varepsilon$

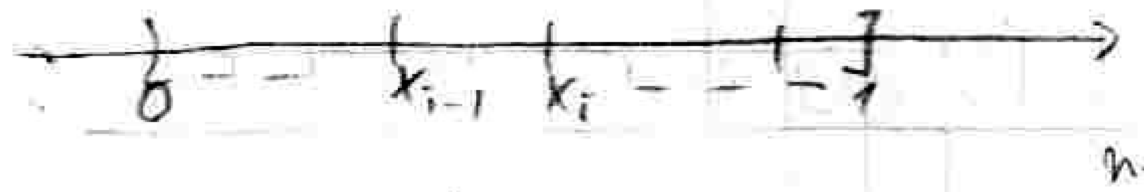
$\Rightarrow f(x)$ е инт. по Риман в/у $[a,b]$

∘ Следствие: $\int_a^b f(x)\,dx = I = \overline{I} = \underline{I} = \sup_\tau s_\tau = \inf_\tau S_\tau$

∘ Функция на Дирихле: $D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0, & x \in \mathbb{I} \cap [0,1] \end{cases}$

Д-во за интегруемост:

$\forall \tau = \{x_i\}_{i=0}^n$ на $[0,1]$



- $s_\tau = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$, $\forall i = 1 \div n$, $m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} D(x) = \cancel{x \in [x_{i-1}, x_i]} \overset{\text{н-п за ирр.}}{=} 0$

$\Rightarrow s_\tau = 0$, $\underline{I} = \sup s_\tau = 0$

- $S_\tau = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$, $\forall i = 1 \div n$, $M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} D(x) = 1$

$\Rightarrow \overline{I} = \inf S_\tau = 1$

$\underline{I} = 0 < 1 = \overline{I}$, $\underline{I} \ne \overline{I} \Rightarrow D(x)$ не е инт. в/у $[0,1]$

Деф | Нека $f(x)$ - деф. и огр. в/у $[a,b]$. Колебание на $f(x)$ в/у $[a,b]$ наричаме числото $\boxed{\omega(f) = M - m}$, където $M = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$, $m = \inf_{x \in [a,b]} f(x)$

Тв | Нека $f(x)$ е огр. в/у $[a,b]$. Тогава $\omega(f) = \sup |f(x') - f(x'')|$, $x', x'' \in [a,b]$

Д-во:

$\omega(f) = \sup |f(x') - f(x'')| \Leftrightarrow$ 1) $\forall x', x'' \in [a,b] \to |f(x') - f(x'')| \le \omega(f)$;

2) $\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{x}', \bar{x}'' \in [a,b] \to |f(\bar{x}') - f(\bar{x}'')| > \omega(f) - \varepsilon$

1) Нека $x_{min} \in [a,b]: f(x_{min}) = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ (*)

Нека $x_{max} \in [a,b]: f(x_{max}) = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ (**)

$\Rightarrow \begin{cases} f(x_{min}) \leq f(x') \leq f(x_{max}) & \forall x' \in [a,b] \\ -f(x_{min}) \geq -f(x'') \geq -f(x_{max}) & \forall x'' \in [a,b] \end{cases} \Big| +$

$\Rightarrow |f(x') - f(x'')| \leq f(x_{max}) - f(x_{min}) = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x) - \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x) = \omega(f)$

2) $\overset{*}{\Rightarrow} \forall \frac{\varepsilon}{2} > 0, \exists \bar{x}' \in [a,b]: f(x_{min}) \leq f(\bar{x}') < f(x_{min}) + \frac{\varepsilon}{2}$ (1)

$\overset{**}{\Rightarrow} \forall \frac{\varepsilon}{2} > 0, \exists \bar{x}'' \in [a,b]: f(x_{max}) \geq f(\bar{x}'') > f(x_{max}) - \frac{\varepsilon}{2}$ (2)

$\overset{1-2}{\Rightarrow} f(\bar{x}') - f(\bar{x}'') < f(x_{min}) - f(x_{max}) + \varepsilon$ (3)

$\overset{2-1}{\Rightarrow} f(\bar{x}'') - f(\bar{x}') > f(x_{max}) - f(x_{min}) - \varepsilon$ (4)

$\overset{3\&4}{\Rightarrow} |f(\bar{x}') - f(\bar{x}'')| > f(x_{max}) - f(x_{min}) - \varepsilon = \omega(f) - \varepsilon$

<u>Т - критерий за интегруемост:</u>

Нека $f(x)$ - огр. в/у $[a,b]$

ф-ця $f(x)$ - инт. в/у $[a,b] \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0:$

$\forall \tau = \{x_i\}_{i=0}^{n}, \delta\tau = \delta \Rightarrow \boxed{\sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon}$

3. Класове интегруеми функции

Т | Нека $f(x)$ - <u>непр</u> в/у $[a,b]$. Тогава $f(x)$ - инт. в/у $[a,b]$

<u>Д-во:</u>

Т.к. $f(x)$ е непр. в/у $[a,b] \Rightarrow$ равном. непр в/у $[a,b] \Rightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2(b-a)} > 0$, т.к. $f(x)$ - равном.н. в/у $[a,b]$, то $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0, \forall x', x''$

$\in [a,b], |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$

$\forall \tau = \{x_i\}_{i=1}^{n}: \delta\tau \leq \delta$

$S\tau - s\tau = \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i(f) \Delta x_i \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \Delta x_i = \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta x_i = \frac{\varepsilon}{2\cancel{(b-a)}} \cancel{(b-a)} < \varepsilon$

$\omega_i(f) = \sup\limits_{x', x'' \in [x_{i-1}, x_i]} |f(x') - f(x'')| \leq \sup\limits_{x', x'' \in [x_{i-1}, x_i]} \varepsilon' = \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$

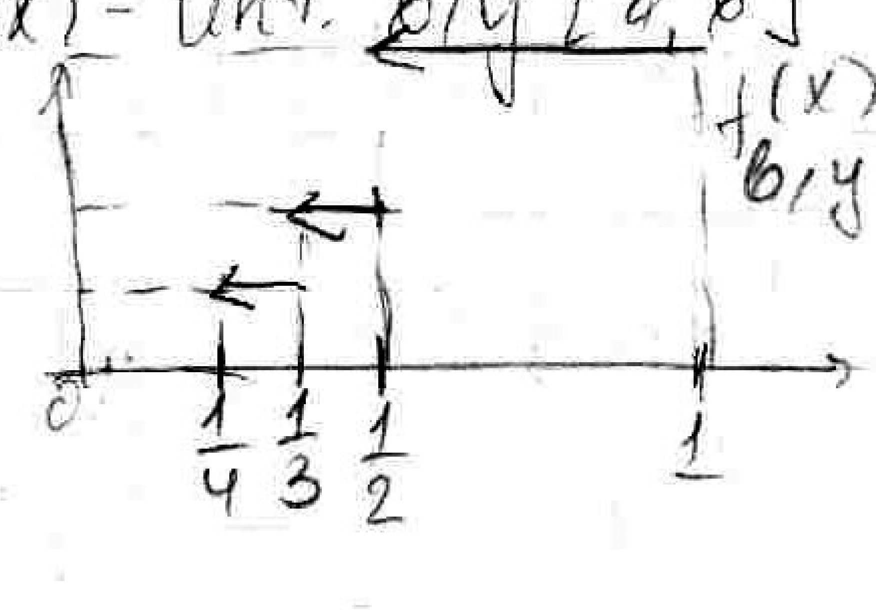
$|x' - x''| \leq |[x_{i-1}, x_i]| \leq \delta\tau \leq \delta$

$S\tau - s\tau < \varepsilon \Rightarrow$ (кр. за инт.) $f(x)$ е инт. в/у $[a,b]$

Т | Нека $f(x)$ - <u>монотонна</u> в/у $[a,b] \Rightarrow f(x)$ - инт. <u>в/у $[a,b]$</u>

• Постр. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}], n \in \mathbb{N} \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

$D(f) = [0,1]$



? • $\int\limits_0^1 f(x) =$