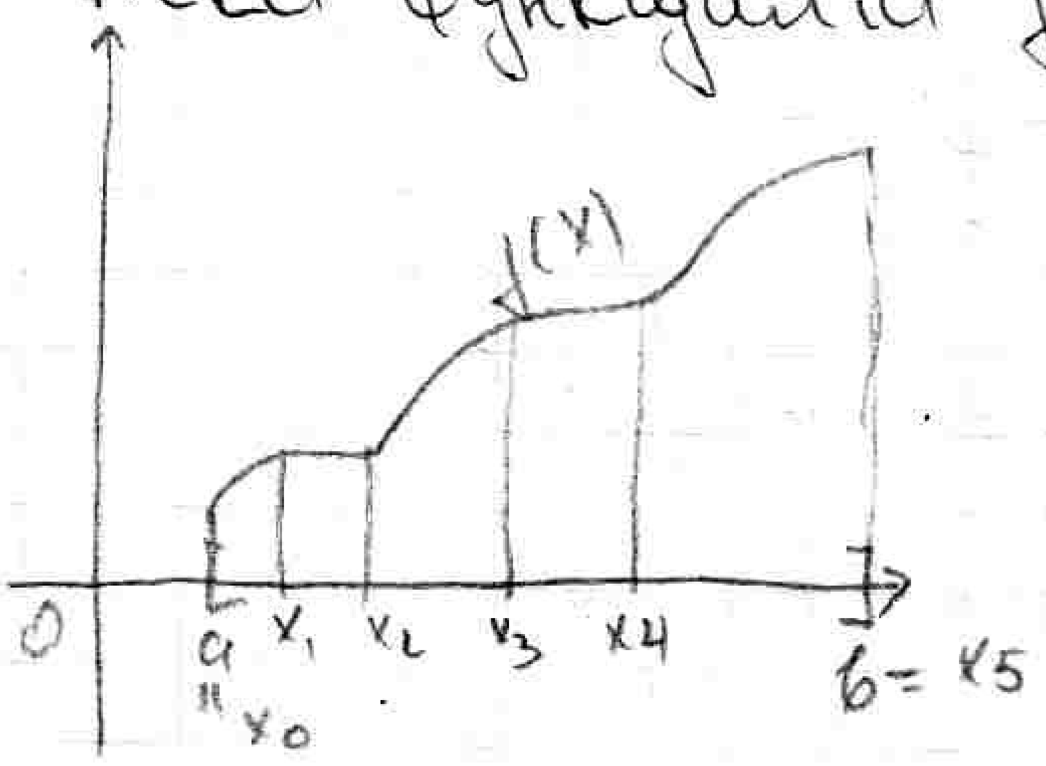
1. Определен интеграл на Риман - определение. Необходимо условие за интегруемост.

Нека функцията $f(x)$ е деф. в/у $[a,b]$



Деф $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{n}$

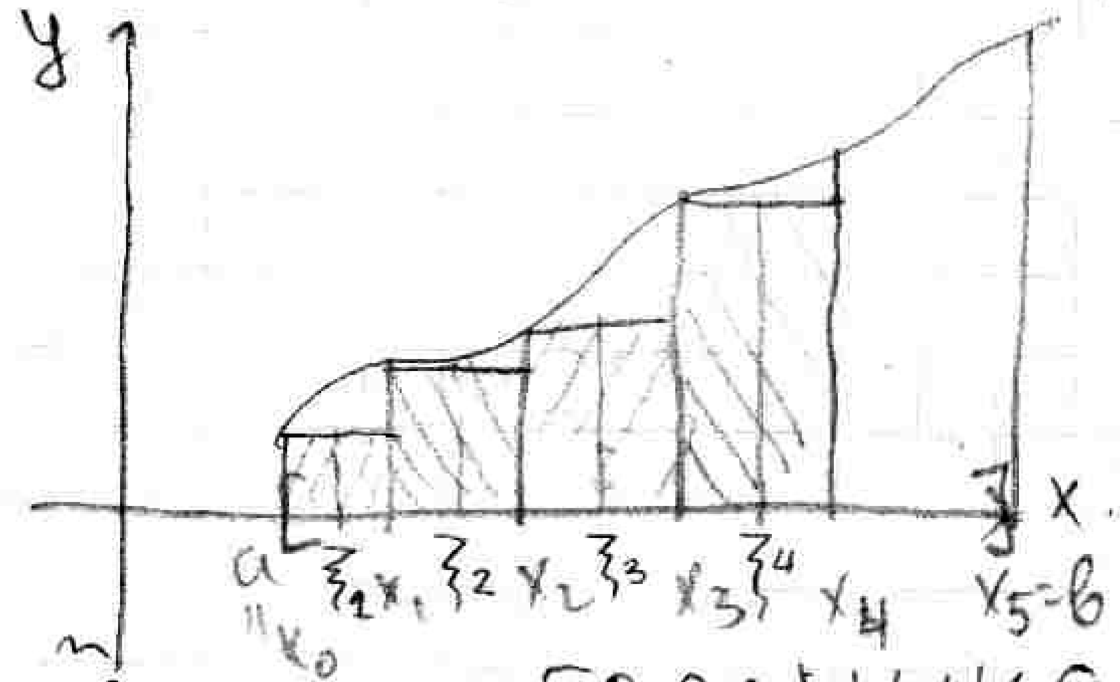
$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$

се нарича <u>разбиване на инт. $[a,b]$</u>

~~$\{[x_{i-1}, x_i]\}_{i=1}^{n} : [x_{i-1}, x_i] \cap [x_{i-1}, x_i] = \{\emptyset$, състои се от 1 т.~~

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $(\forall\ i = 1 \div n)$, ~~$\forall\ i = 1 \div n : \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$~~

~~$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i : \sigma_\tau(f,\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ сума на Риман~~



$f(x)$ - отг. на разбиването τ и набора от точки ξ, $f(x) \geq 0$, в/у $[a,b]$

$D = \{(x,y) : a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$ $\sigma_\tau(f,\xi) \approx S(D)$

Деф $d_\tau = \max\limits_{i=1}^{n} \Delta x_i$ - <u>големина на разбиването τ</u>

(*равна на най-големия инт. от разбиването)

Деф Дадено е разбиване τ, $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ $a = x_0 < \dots < x_n = b$. Тогава

$\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^{n}$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $\forall i \in \{1 \dots n\}$

се <u>нарича набор от точки</u>, отговарящ на разб. τ.

Деф $f(x)$ - дефинирана и огр. в/у $[a,b]$, $f(x) \geq 0$ в/у $[a,b]$!

$\tau = \{x_i\}_{i=0}^{n}$, $\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^{n} : \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$

$$\boxed{\sigma_\tau(f,\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i}$$

се нарича <u>сума на Риман</u> за разбиване τ на ф-я f и стойности ξ

* сума на Риман - апроксимация за лицето на фиг. под графиката на f

Деф Казваме, че ф-та $f(x)$ е интегруема в смисъла на Риман в/у $[a,b]$, ако $\exists I \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \tau = \{x_i\}_{i=1}^{n}, d_\tau < \delta$

$\forall \xi = \{\xi_i\}_{i=1}^{n}$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $(i = 1 \div n) \Rightarrow$

$$|I - \sigma_\tau(f,\xi)| < \varepsilon$$

I - интеграл на Риман на $f(x)$ в/у инт. $[a,b]$

b - горна гр. на интегриране, a - долна гр.

$\boxed{I = \int_a^b f(x)dx}$ – определен интеграл на Риман от $f(x)$ в/у $[a,b]$
↳ подинтегрална ф-я

$\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$ $\quad D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0, & x \in \mathbb{J} \cap [0,1] \end{cases}$ не е инт. [I-безкр. мн. за ...]

$\boxed{\text{Т-НУ}}$ Ако $f(x)$ – интегруема в см. на Риман в/у $[a,b]$ ⇒ $f(x)$ е огр. в/у $[a,b]$ $\not\Leftarrow$ дирихле

Д-во:

- Да докажем противното – че $f(x)$ не е огр. в/у $[a,b]$
- Т.к. $f(x)$ е инт. в/у $[a,b]$ ⇒ $\exists I \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta_\varepsilon > 0:$ $\forall \tau = \{x_i\}_{i=0}^n, \delta_\tau < \delta, \forall \xi = \{\xi_i\}^n, \xi_i \in [x_{i-1}, x_i], (i = \overline{1,n}) \Rightarrow$

$$|I - \sigma_\tau(f,\xi)| < \varepsilon \Leftrightarrow I - \varepsilon < \sigma_\tau(f,\xi) < I + \varepsilon$$

- фиксираме $\varepsilon > 0$, фикс. разб. τ, $\delta_\tau < \delta$

- т.к. по допускане $f(x)$ не е огр. в/у $[a,b]$ ⇒ $f(x)$ е неограничена поне в/у 1 инт. $[x_{i-1}, x_i]$

ще смятаме, че не е ограничена в/у инт. $[x_0, x_1]$

$\forall \xi = \{\xi_1, \xi_2^0, \dots, \xi_n^0\}$

$$I - \varepsilon < \sigma_\tau(f, \xi') < I + \varepsilon$$

$$I - \varepsilon < f(\xi_1)\Delta x_1 + \overbrace{\sum_{i=2}^n f(\xi_i^0)\Delta x_i}^{A} < I + \varepsilon$$

$$I - A - \varepsilon < f(\xi_1)\Delta x_1 < I - A + \varepsilon, \quad \forall \xi_1 \in [x_0, x_1] : \Delta x_1 > 0$$

$$\frac{I - A - \varepsilon}{\Delta x_1} < f(\xi_1) < \frac{I - A + \varepsilon}{\Delta x_1}, \quad \forall \xi_1 \in [x_0, x_1] \Rightarrow$$

$f(x_1)$ е огр. в/у инт. $[x_0, x_1]$ ↯ ⇒ безкр. бр. соб. с огр. сума

$f(x)$ е огр. в/у $[a,b]$

2. Суми на Дарбу. Критерий за интегруемост на функция.

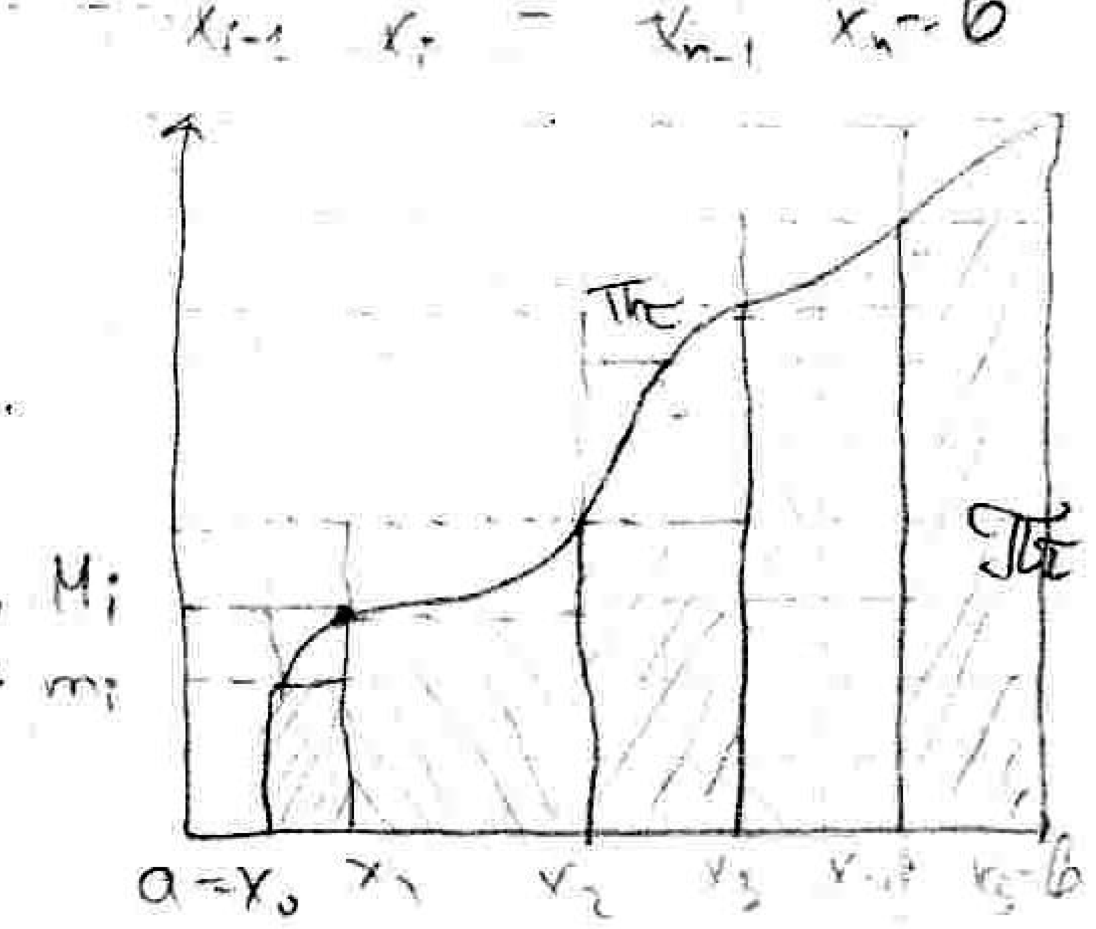
- Нека $f(x)$ е ограничена в/у $[a,b]$

$\forall \tau = \{x_i\}_{i=1}^n$

⇒ $f(x)$ е огр. в/у $\forall [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1 \div n)$

⇒ $\forall i = 1 \div n$ $\exists \sup\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) = M_i$

$\exists \inf\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) = m_i$



$S_\tau = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$ – голяма
$s_\tau = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$ – малка
} сума на Дарбу

$\Pi_\tau \subset D \subset \Pi_\tau$
$S_\tau = S(\Pi_\tau)$
$s_\tau = S(\Pi_\tau)$
$D = \{(x,y) : a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)\}$