9 Н Непрекъснатост на функция – глобални свойства

Т1 Ако $f(x)$ е непрекъсната върху $[a,b] \Rightarrow f(x)$ е ограничена върху $[a,b]$.

Доказателство:

Трябва докажем: $\exists M>0 : \forall x\in[a,b] \Rightarrow |f(x)|\le M$.

Допускаме, че $f(x)$ не е ограничена върху $[a,b]$.

$\forall M>0 \quad \exists x_M\in[a,b] \Rightarrow |f(x_M)|>M$

$\hookrightarrow$ Взимаме произволно $\mathbb{N}$ число

$\forall n\in\mathbb{N} \; \exists x_n\in[a,b] : |f(x_n)|\ge n$

Построихме редица x_n от точки от $[a,b]$:

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \quad |f(x_n)|\ge n$

$\hookrightarrow \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена $\Rightarrow$ по Т Болцано – Вайерщрас $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists$ сходяща подредица $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$.

Нека $x_0=\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$. Тогава $x_0\in[a,b]$

$\forall n\in\mathbb{N} : x_n\in[a,b] \Leftrightarrow a\le x_n\le b$

$a\le x_0\le b$

Построихме редица $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ и $x_0=\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$ и $f(x)$ е непрекъсната в x_0.

$\to$ Дефиниция на Хайне $\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k})=f(x_0) \Rightarrow \{f(x_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ е сходяща $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(x_{n_k})$ – ограничена $\Leftrightarrow \exists c>0 : \forall k\in\mathbb{N} : |f(x_{n_k})|\le c$ ↯

По построение $|f(x_{n_k})|\ge n_k \xrightarrow[k\to\infty]{} +\infty$

Т2 Теорема на Вайерщрас.

Ако $f(x)$ е непрекъсната върху $[a,b]$, $\exists\, c$ и $d\in[a,b]$:

$\forall x\in[a,b] \Rightarrow f(c)\le f(x)\le f(d) \to f(d)=\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$; $f(c)=\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

Доказателство:

$f(x)$ – непрекъсната $\xRightarrow{T_1} f(x)$ е ограничена върху $[a,b] \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \sup\limits_{[a,b]} f(x)=M$ и $\inf\limits_{[a,b]} f(x)=m$.

? $\exists d\in[a,b] : f(d)>M$?

Т.к. $M=\sup\limits_{[a,b]} f(x) \Rightarrow$ 1) $\forall x\in[a,b] \to f(x)\le M$

2) $\forall \varepsilon>0 \; \exists x_\varepsilon\in[a,b] : (M-\varepsilon)<f(x_\varepsilon)$

$\forall n\in\mathbb{N}\quad \varepsilon = 1/n > 0 \Rightarrow \exists x_n \in [a,b]: (M - 1/n) < f(x_n) \le M < M + 1/n$

$$\Rightarrow \begin{array}{ccccc} M-1/n & < & f(x_n) & < & M+1/n \\ \Big\downarrow{\scriptstyle n\to\infty} & & \Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle n\to\infty} \\ M & & M & & M \end{array}$$

$\Rightarrow \{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща и $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = M$

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in [a,b] \Rightarrow \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена

$\Rightarrow$ по $\boxed{T}$ Болцано-Вайерщрас $\Rightarrow \exists$ сходяща подредица

$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ и нека $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0 \Rightarrow x_0 \in [a,b]$

$f(x)$ - непрекъсната в $x_0 \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0) \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = M \Rightarrow f(x_0) = M$

$\exists x_0 \in [a,b]: f(x_0) = M$

аналогично за inf.

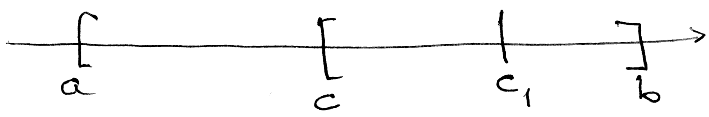
$\boxed{T_3}$ Болцано-Коши

Ако $f(x)$ е непрекъсната върху $[a,b]$ и $f(a)f(b) < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \xi \in [a,b]: f(\xi) = 0.$

Доказателство:

Нека $f(a) < 0 < f(b)$.



Нека $c = \frac{a+b}{2} \Rightarrow$ 1) $f(c) = 0$

2) $f(c) \neq 0$

2.1) $f(c) > 0 \Rightarrow [a_1, b_1] = [a, c]$.

2.2) $f(c) < 0 \Rightarrow [a_1, b_1] = [c, b]$.

$\Rightarrow [a_1, b_1]: |[a_1, b_1]| = \frac{b-a}{2}$

$f(a_1) < 0 < f(b_1)$

$c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} \Rightarrow$ 1) $f(c_1) = 0$

2) $f(c_1) \neq 0$

$\Rightarrow$ 2.1) $f(c_1) > 0 \Rightarrow [a_2, b_2] = [a_1, c_1]$

2.2) $f(c_1) < 0 \Rightarrow [a_2, b_2] = [c_1, b_1]$

$\Rightarrow [a_2, b_2] \subset [a_1, b_1] : |[a_2, b_2]| = \frac{b-a}{2^2}$; $f(a_2) < 0 < f(b_2)$.

(.....)

Може да свърши на крайна стъпка. Ако продължи до безкрайност, построяваме последователност от затворени интервали, като всеки следващ се съдържа в предишния.

$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$

$|[a_n, b_n]| = \frac{b-a}{2^n}$; $f(a_n) < 0 < f(b_n)$.

$\xrightarrow{n \to \infty} 0 \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{\xi\} \subset [a, b]$.

$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = \xi$.

Т.к. $f(x)$ е непрекъсната в $\xi \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(a_n) = f(\xi) = \lim_{n \to \infty} f(b_n \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{ccccc} f(a_n) & < & 0 & < & f(b_n) \\ \downarrow n \to \infty & & \downarrow & & \downarrow n \to \infty \\ f(\xi) & \le & 0 & \le & f(\xi) \end{array}\right\} \Rightarrow f(\xi) = 0.$$

$\boxed{T_4}$ Коши

Нека $f(x)$ е непрекъсната в/у $[a, b]$ и $f(a) \neq f(b)$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \mu \in (f(a), f(b))\ \exists c \in [a, b] : f(c) = \mu$.

Доказателство:

За конкретност $f(a) < f(b)$ и $\mu \in [f(a), f(b)]$

$\Rightarrow$ 1) $\mu \in \{f(a), f(b)\} \rightarrow$ твърдението е вярно;

2) $\mu \in (f(a), f(b))$

Построяваме $F(x) = f(x) - \mu$ – непрекъсната върху $[a, b]$

и

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ F(a) = f(a) - \mu < 0 \\ 2)\ F(b) = f(b) - \mu > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{по } T_3\ \exists c \in [a, b] : F(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) - \mu = 0$$

$\Rightarrow \underline{f(c) = \mu}$