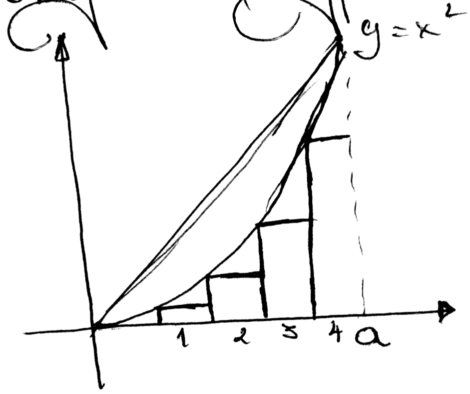
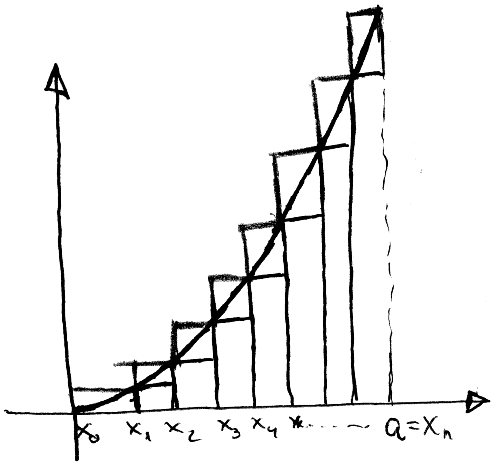
29 | Определен интеграл

Лице на фигура





S на фигурата $\quad \to x_i = \frac{a \cdot i}{n}$

$$x_1^2\frac{a}{n} + x_2^2\frac{a}{n} + \dots + x_{n-1}^2\frac{a}{n} = \frac{a^3}{n}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right) =$$

$$= \frac{a^3}{n^3}\left(1^2 + \dots + (n-1)^2\right) = \frac{a^3(n-1)(2n-1)}{n^2 \cdot 6} = \frac{a^3}{6}\Big(1 - \underbrace{\tfrac{1}{n}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0}\Big)\Big(2 - \underbrace{\tfrac{1}{n}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0}\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{a^3}{3}$$

$\boxed{D}$ Нека $f(x)$ е дефинирана върху крайния $[a,b]$

$\tau = \{x_i\}_{i=0}^{n} : x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$

↳ разбиване на интервала

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = |[x_{i-1}, x_i]|$ – дължината на интервал

$\delta_\tau = \max\limits_{i=\overline{1,n}}(\Delta x_i)$ – големина на разбиването

~~D Казваме, че функцията f(x) е интегруема по Риман~~

$\forall i = \overline{1,n} \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i], \ \xi = \{\xi_i\}_{i=1}^{n}$

$\Rightarrow \sigma_\tau(f, \xi) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$ – сума на Риман.

$\boxed{D}$ Казваме, че функцията $f(x)$ е интегруема по Риман върху интервала $[a,b]$, ако $\exists I : \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 :$

$\forall \tau = \{x_i\}_{i=0}^{n} : \delta_\tau < \delta, \ \forall \xi = \{\xi_i\}_{i=1}^{n} : \xi_i \in [x_{i-1}, x] \quad i = \overline{1,n} \Rightarrow |I - \sigma_\tau(f,\xi)| < \varepsilon$

*Сумата на Риман дава предложение на лицето на фигурата под графиката на функцията.

I Необходимо условие за интегруемост

Ако функцията $f(x)$ е интегруема върху $[a,b]$, тогава е ограничена върху този интервал.

! Обратното не е вярно !

$\hookrightarrow$ Функция на Дирихле $D(x) = \begin{cases} 1, & x\in \mathbb{Q}\cap[0,1] \\ 0, & x\in \mathbb{I}\cap[0,1] \end{cases}$ – ограничена, но не интегруема по Риман.

Доказателство:

$f(x)$ е интегруема $\Rightarrow \exists I\in\mathbb{R}: \forall \varepsilon>0 \ \exists \delta=\delta(\varepsilon)>0:$

$\forall \tau=\{x_i\}_{i=0}^{n}, \delta_\tau<\delta, \ \forall \xi=\{\xi_i\}_{i=1}^{n}, \xi_i\in[x_{i-1},x_i], \ i=\overline{1,n} \Rightarrow |I-\sigma_\tau(f,\xi)|<\varepsilon.$

$\varepsilon=1 \Rightarrow \exists\delta>0: \underbrace{\forall\tau=\{x_i\}_{i=1}^{n} \ \delta_\tau<\delta}_{\text{фиксираме } \tau} \ \forall\xi=\{\xi_i\}_{i=1}^{n}, \xi_i\in[x_{i-1},x_i], \ i=\overline{1,n}$

$\Rightarrow |I-\sigma_\tau(f,\xi)|<1 \Leftrightarrow I-1<\sigma_\tau(f,\xi)<I+1$

$I-1<\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i).\Delta x_i<I+1$

Допускаме, че $f(x)$ не е ограничена върху $[a,b] \Rightarrow f(x)$ е неограничена върху един от интервалите $[x_{i-1},x_i]$. За определеност считаме, че $f(x)$ е неограничена върху $[x_0,x_1]$

$\xi_1\in[x_0,x_1]$ – ще го вземем произволно.

$\xi_i^0\in[x_{i-1},x_i], \ i=\overline{2,n}$ – фиксираме

$\xi=\{\xi_1,\xi_2^0,\dots,\xi_n^0\} \to \xi_1$ се променя, а другите – не.

$$I-1<f(\xi_1)\Delta x_1+\underbrace{\sum_{i=2}^{n} f(\xi_i^0)\Delta x_i}_{\text{фиксирано число } A}<I+1$$

$\Rightarrow I-1-A<f(\xi_1)\Delta x_1<I+1-A \quad |:\Delta x_1>0$

$$\frac{I-1-A}{\Delta x_1}<f(\xi_1)<\frac{I+1-A}{\Delta x_1} \quad \forall\xi_1\in[x_0,x_1] \ \lightning$$

$\Rightarrow$ Допускането е невалидно $\Rightarrow f(x)$ е ограничена върху $[a,b]$