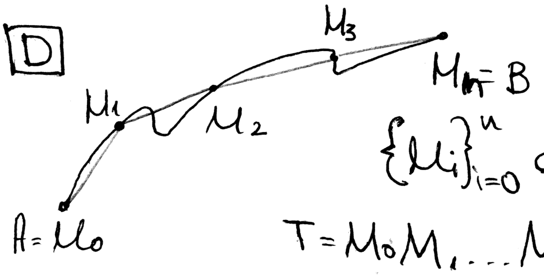
Дължина на крива линия. Лице на ротационна повърхнина

D γ - крива линия в $\mathbb{R}^3$

$$\gamma: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \quad t \in [a,b] \subset \mathbb{R}^3$$ $\Leftrightarrow$ съвкупността от всички точки $x(t), y(t), z(t)$ - непрекъснати.

D



$\{M_i\}_{i=0}^{n} \subset \gamma$

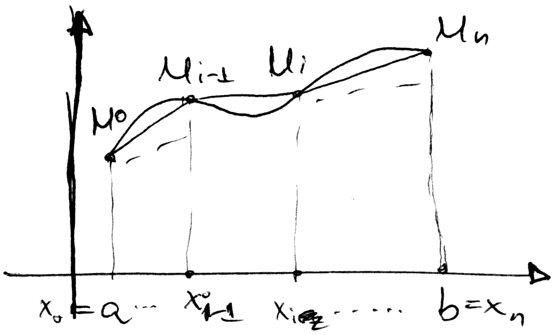
$T = M_0 M_1 \dots M_n$ - начупена линия, вписана в γ.

D Дължина на начупената линия $M_0 M_1 \dots M_n$ се нарича числото $|M_0 M_1 \dots M_n| = \sum_{i=1}^{n} |M_{i-1} M_i|$

D $\Delta_T = \max_{i=1}^{n} |M_{i-1} M_i|$ - големина на вписаната начупена линия.

D Дължина на кривата линия γ се нарича такова число $d(\gamma)$: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall T, \Delta_T < \delta \Rightarrow \left| d(\ell) - \sum_{i=1}^{n} |M_{i-1} M_i| \right| < \varepsilon$.

T Нека $f(x)$ има непрекъсната производна $f'(x)$ върху $[a,b]$. Тогава $\exists d(\Gamma_f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$



Доказателство:

$M_i = (x_i, f(x_i)) \quad i = \overline{1,n}$

$\tau_T = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ - разбиване на $[a,b]$.

$|M_{i-1} M_i| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$

$\Rightarrow$ по т-мата на Лагранж $\Rightarrow \exists \xi_i \in (x_{i-1}, x_i) : f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$.

$\Rightarrow |M_{i-1} M_i| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f'(\xi_i)]^2 (x_i - x_{i-1})^2} = |x_i - x_{i-1}| \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} = \Delta x_i \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}$

$\delta_{\tau_T} = \max_{i=1}^{n} \Delta x_i$

$|T| = |M_0 M_1 \dots M_n| = \sum_{i=1}^{n} |M_{i-1} M_i| = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'(\xi_i)^2}\, \Delta x_i = \sigma_{\tau_T}\left(\sqrt{1 + f'(\xi)^2}, \xi\right)$, $\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^{n}$

$F(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$ - непрекъсната $\Rightarrow$ интегруема $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists I = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 :$

$\forall \tau : \delta_\tau < \delta, \forall \xi = \{\xi_i\}_{i=1}^{n}, \xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \ i = \overline{1,n} \Rightarrow |I - \sigma_{\tau_T}(F, \xi)| < \varepsilon$

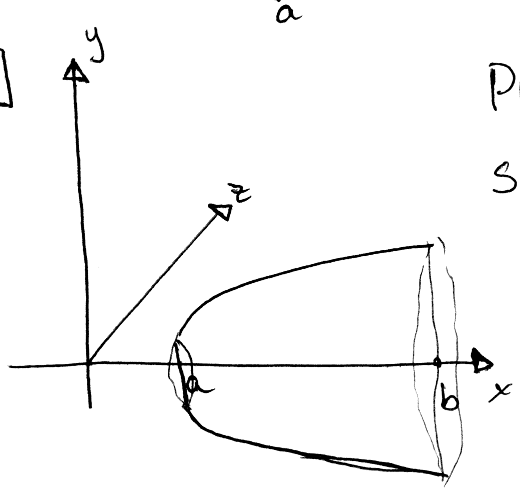
$T = M_0 \ldots M_n,\ \Delta_T < \delta$

$\Rightarrow \delta_{\tau_T} \le \Delta_T < \delta \Rightarrow |I - \sigma_{\tau_T}(F, \xi)| < \varepsilon$

$$\left| I - \sum_{i=1}^{n} |M_{i-1} M_i| \right| < \varepsilon \Rightarrow$$

$\Rightarrow d(\Gamma_f) = I = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$

$\boxed{D}$



$P(f)$ - ротационна повърхнина

$S(P(f)) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$