20) Критерий за монотонност на функция

$\boxed{T}$ Нека $f(x)$ е диференцируема върху $\langle a, b\rangle$. Тогава:

1) $f(x)$ е монотонно растяща върху $\langle a,b\rangle \Leftrightarrow \forall x\in\langle a,b\rangle \rightarrow f'(x)\geq 0$;

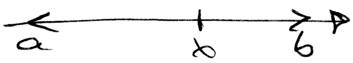
2) $f(x)$ е монотонно намаляваща върху $\langle a,b\rangle \Leftrightarrow \forall x\in\langle a,b\rangle \rightarrow f'(x)\leq 0$;

3) Ако $f'(x)>0$ върху $\langle a,b\rangle \Rightarrow f(x)$ е строго монотонно растяща;

4) Ако $f'(x)<0$ върху $\langle a,b\rangle \Rightarrow f(x)$ е строго монотонно намаляваща.

Доказателство:

1. $\Rightarrow$) Нека $f(x)$ е монотонно растяща върху $\langle a,b\rangle$



$x\in\langle a,b\rangle \xrightarrow{?} f'(x)\geq 0$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

1) $\Delta x>0 \Rightarrow x+\Delta x>x \Rightarrow f(x+\Delta x)\geq f(x) \Rightarrow f(x+\Delta x)-f(x)\geq 0 \Rightarrow \frac{\Delta f}{\Delta x}\geq 0$

2) $\Delta x<0 \Rightarrow x+\Delta x<x \Rightarrow f(x+\Delta x)\leq f(x) \Rightarrow f(x+\Delta x)-f(x)\leq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \Delta x: \frac{\Delta f}{\Delta x}\geq 0 \Rightarrow f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}\geq 0 \Rightarrow f'(x)\geq 0.$

$\Leftarrow$) Нека $f'(x)\geq 0 \ \forall x\in\langle a,b\rangle$

$\forall x_1<x_2 \xrightarrow{?} f(x_1)\leq f(x_2)$

Разглеждаме $f(x)$ върху $[x_1,x_2]$

$$\left.\begin{array}{l}1)\ f(x) \text{ е непрекъсната върху } [x_1,x_2]\\ 2)\ \exists f'(x) \text{ върху } (x_1,x_2)\end{array}\right\}\text{ по т. Лагранж } \Rightarrow$$

$\Rightarrow \exists c\in(x_1,x_2): f(x_2)-f(x_1)=\underbrace{f'(c)}_{+}.\underbrace{(x_2-x_1)}_{+}\geq 0 \Rightarrow f(x_2)\geq f(x_1) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x)$ е монотонно растяща.

! За 3-тото твърдение - същите разсъждения, но със строго $>$!