24 Неопределен интеграл – дефиниция, свойства. Таблица на основните неопределени интеграли

D Нека $f(x)$ е дефинирана върху $\langle a,b\rangle$. Казваме, че $F(x)$ е примитивна функция на $f(x)$ върху $\langle a,b\rangle$, ако $F'(x)=f(x)$ за $\forall x\in\langle a,b\rangle$

T Ако $F(x)$ и $G(x)$ са примитивни функции, то $\exists c=const$: $G(x)=F(x)+c$, $\forall x\in\langle a,b\rangle$

* Теоремата следва директно от ОТИС:

Д-во: $F(x)$ и $G(x)$ са примитивни на $f(x) \Rightarrow F'(x)=G'(x)=f(x)$ в $\langle a,b\rangle$.

$\Rightarrow$ ОТИС $\Rightarrow \exists c=const: G(x)=F(x)+c$

D Ако $F(x)$ е примитивна функция на $f(x)$ в $\langle a,b\rangle$, то множеството $\{F(x)+c : c=const\}$ се нарича неопределен интеграл на $f(x)$ в $\langle a,b\rangle$ и се означава $\int f(x)dx=\{F(x)+c : c=const\}$

→ Свойства:

1) $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$

1') $d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx$

1'') $\int df(x)=\int f'(x)dx=f(x)+c$

} диференциране и интегриране са взаимно-обратни действия

2) $\int (f(x)+g(x))dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$

3) $\int \lambda f(x)dx=\lambda\int f(x)dx,\ \lambda\in\mathbb{R}$

Доказателство:

2) Нека $F'(x)=f(x)$ и $G'(x)=g(x)$

$(F+G)(x)=F(x)+G(x)$ е примитивна на $f(x)+g(x)$.

$\int (f(x)+g(x))dx=F(x)+G(x)+c=F(x)+c_1+G(x)+c_2=\int f(x)dx+\int g(x)dx$

→ Таблица на основните неопределени интеграли.

1) $\int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c;\ \alpha=-1$

2) $\int \frac{1}{x}dx=\ln|x|+c$

3) $\int a^{x}dx=\frac{a^{x}}{\ln a}+c$

4) $\int e^{x}dx=e^{x}+c$

5) $\int \sin x\,dx=-\cos x+c$

6) $\int \cos x\,dx=\sin x+c$

7) $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx=\operatorname{tg}x+c$

8) $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx=\operatorname{cotg}x+c$

9) $\int \frac{1}{1+x^2}dx=\begin{cases}\operatorname{arctg}x+c\\ -\operatorname{arccotg}x+c\end{cases}$

10) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\begin{cases}\arcsin x+c\\ -\arccos x+c\end{cases}$

11) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx=\ln|x+\sqrt{x^2-1}|+c$

12) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=\ln(x+\sqrt{x^2+1})+c$ върху $(-\infty,+\infty)$

11) $\rightarrow$ Dokazamenemtoo:

$\ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C$

1) $x \in (-\infty, -1)$

$x + \sqrt{x^2-1} < x + |x| = x - x = 0$

$\ln|x + \sqrt{x^2-1}| = \ln(-(x+\sqrt{x^2-1})) \rightarrow (\ln|x + \sqrt{x^2-1}|)' = \frac{+1}{+(x+\sqrt{x^2-1})}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}} \cdot 2x\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$