27 | Интегриране на ирационални функции

$\boxed{D}$ Полином от n-та степен на m променливи се нарича функцията от вида: $P_n(x_1 \dots x_m) = \sum\limits_{\alpha_1+\dots+\alpha_m \le n} a_{\alpha_1 \dots \alpha_m} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_m^{\alpha_m}$

↳ поне веднъж $\alpha_1+\dots+\alpha_m = n$

$$I = \int P\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_1/q_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_n/q_n}\right)dx$$

$P(x_1, \dots x_{n+1})$ – полином на $n+1$ променливи

$ad - bc \neq 0$

$p_i, q_i \in \mathbb{Z}, \ q_i \neq 0$

$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k, \ k = \text{НОК}(q_1 \dots q_n)$

$\Rightarrow x = \frac{b - t^k d}{ct^k - a} = \varphi$

$\Rightarrow dx = d\varphi(t) = \underbrace{\varphi'(t)}_{\text{рационална функция на } t} dt$

$$I = \int \underbrace{R\left(\varphi(t), t^{\frac{p_1 k}{q_1}}, \dots, t^{\frac{p_n k}{q_n}}\right)\varphi'(t)}_{\text{рационална функция на } t} dt$$

$$I = \int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$$

$R(x,y)$ – рационална функция

$a \neq 0, \ b^2 - 4ac \neq 0$

1) $a > 0$

$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm t \pm \sqrt{a}\,x \ |^2$

$\underbrace{\cancel{ax^2} + bx + c = t^2 \pm 2\sqrt{a}\,tx + \cancel{ax^2}}_{x = \varphi(t)}$

$I = \int R(\varphi(t), \pm t \pm \sqrt{a}\,\varphi(t))\varphi'(t)dt$ → рационална функция

2) $c > 0$

$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm tx \pm \sqrt{c} \; |^2$

$ax^2 + bx + \cancel{c} = t^2x^2 \pm 2\sqrt{c}\,tx + \cancel{c} \; | : x$

$ax + b = t^2x + 2t\sqrt{c} \rightarrow x = \varphi(t)$

$\rightarrow I = \int R(\varphi(t), t\varphi(t) + \sqrt{c})\,\varphi'(t)\,dt \rightarrow$ рационална функция

3) ax^2+bx+c има 2 реални корена — x_1 и x_2

$\sqrt{ax^2+bx+c} = (x - x_{1,2})t \; |^2$

$ax^2+bx+c = (x-x_1)^2 t^2$

$a\cancel{(x-x_1)}(x-x_2) = (x-x_1)^{\cancel{2}} t^2$

$\hookrightarrow x = \varphi(t)$

$\Rightarrow I = \int R(\varphi(t), (\varphi(t) - x_{1,2})t)\,\varphi'(t)\,dt \rightarrow$ рационална функция

$I = \int x^m (ax^n + b)^p dx$, където $m, n, p \in \mathbb{Q}$, $a, b \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$

$\downarrow$

диференциален интеграл

1) $p \in \mathbb{Z} \rightarrow x = t^k \rightarrow k =$ НОК (знаменателя на m и n)

2) $p \notin \mathbb{Z}$; $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z} \rightarrow ax^n + b = t^k \rightarrow k =$ знаменателя на p

3) $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z} \rightarrow I = \int x^{m+pn}(a + bx^{-n})^p dx$

$\hookrightarrow a + bx^{-n} = t^k \rightarrow k =$ знаменателя на p.

! Неразрешими с елементарни функции:

синус интегралeн $\rightarrow si(x) = \int \frac{\sin x}{x} dx$

- косинус интегралeн $\rightarrow ci(x) = \int \frac{\cos x}{x} dx$

Интеграли на Френе: $\int \sin x^2 dx$; $\int \cos x^2 dx$

$\int e^{-x^2} dx$

$\int \frac{1}{\ln(x)} dx$ — логаритъм интегралeн

$\int \frac{e^x}{x} dx$ — интегрална експонента