# 33 Интеграл с променлива горна граница. Формула на Нютон-Лайбниц

**D** Нека $f(x)$ е интегруема върху $[a,b]$ и $x\in[a,b]$.

$F(x)=\int_a^x f(t)dt$ - интеграл с променлива горна граница.

Ако $f(x)$ е непрекъсната върху $[a,b]$, то $F(x)$ е примитивна на $f$.

**T₁** Ако $f(x)$ е интегруема върху $[a,b]$, $\Rightarrow F(x)=\int_a^x f(t)dt$ е непрекъсната върху $[a,b]$.

*Доказателство:*

Нека $x\in[a,b]$ и $\Delta x$ - нарастване на аргумента, така че $x+\Delta x\in[a,b]$.

$$\Delta F=F(x+\Delta x)-F(x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

$$|\Delta F|=\left|\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt\right|\le\left|\int_x^{x+\Delta x}|f(t)|dt\right|\le\left|\int_x^{x+\Delta x}M\,dt\right|\le M\left|\int_x^{x+\Delta x}1\,dt\right|=M|\Delta x|$$

$f(t)$ е интегруема върху $[a,b]\Rightarrow$
$\Rightarrow f$ е ограничена върху $[a,b]\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists M>0:\forall t\in[a,b]\rightarrow|f(t)|\le M$

$0\le|\Delta F|\le M|\Delta x|$, $\Delta x\to 0$: $0\to 0$, $M|\Delta x|\to 0$

$\Rightarrow \exists\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta F=0\Rightarrow\lim\limits_{\Delta x\to 0}F(x+\Delta x)=F(x)\Rightarrow$

$\Rightarrow F$ е непрекъсната върху $[a,b]$.

**T** Нека $f(x)$ е интегруема върху $[a,b]$ и непрекъсната в $x_0\in[a,b]$.
$\Rightarrow F(x)=\int_a^x f(t)dt)$ е диференцируема в $x_0$ и $F'(x_0)=f(x_0)$

*Доказателство:*

$$\frac{\Delta F}{\Delta x}-f(x_0)=\frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x}-f(x_0)=\frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}f(t)dt-f(x_0)=$$

$$=\frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}f(t)dt-\frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}f(x_0)dt=\frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}(f(t)-f(x_0))dt$$

$$\left|\frac{\Delta F}{\Delta x} - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}(f(t)-f(x_0))dt\right| \leq \left|\frac{1}{\Delta x}\right|\left|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}(f(t)-f(x_0))dt\right| <$$

$$< \frac{1}{|\Delta x|}\left|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}\varepsilon\, dt\right| = \frac{1}{|\Delta x|}\cdot|\Delta x|\cdot\varepsilon = \varepsilon.$$

$f(t)$ е непрекъсната в $x_0 \Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists \delta=\delta(\varepsilon)>0 : \forall t \in U_\delta(x_0)\cap[a,b] \Rightarrow$
$\Rightarrow |f(t)-f(x_0)| < \varepsilon$

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists \delta=\delta(\varepsilon)>0 : \forall t \in U_\delta(x_0)\cap[a,b] \Rightarrow \left|\frac{\Delta F}{\Delta x} - f(x_0)\right| < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to x_0}\frac{\Delta F}{\Delta x} = f(x_0) = F'(x_0)$

Следствие: Ако $f(x)$ е непрекъсната върху $[a,b] \Rightarrow$
$\Rightarrow F(x) = \int_a^x f(t)dt$ е примитивна на $f(x)$.

$\boxed{\text{Т}}$ на Нютон-Лайбниц

Ако $f(x)$ е непрекъсната върху $[a,b]$ и $\Phi(x)$ е примитивна на $f(x)$ върху $[a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx = \Phi(b)-\Phi(a) = \Phi(x)\Big|_a^b$

Доказателство:

$F(x) = \int_a^x f(t)dt$ е примитивна на $f(x)$ върху $[a,b] \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists c = const : \Phi(x) = F(x)+c \quad \forall x \in [a,b]$

$\Phi(a) = F(a)+c = \int_a^a f(t)dt + c = c$

$\Rightarrow \Phi(x) = F(x) + \Phi(a)$

$\Phi(b) = F(b) + \Phi(a) \Rightarrow F(b) = \Phi(b) - \Phi(a)$

$F(b) = \int_a^b f(t)dt$ //