32 Свойства на определения интеграл

① $\int_a^b dx = (b-a)$

Доказателство: $\int_a^b 1.dx = \sup_{\tau} s_\tau = \inf_{\tau} S_\tau$

$$s_\tau = \sum_{i=1}^{n} 1.\Delta x_i = b-a$$

$\boxed{D}$ 1) $\int_a^a f(x)dx = 0$; 2) $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$ при $a<b$.

② Ако $f(x)$ и $g(x)$ са интегруеми върху $[a,b]$:

1) $(f+g)(x)$ е интегруеми върху $[a,b]$

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

2) $(\lambda f)(x)$ е интегруема върху $[a,b]$

$$\int_a^b (\lambda f)(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$$

Доказателство:

1) Нека $f(x)$ и $g(x)$ са интегруеми върху $[a,b]$

$\Rightarrow \exists I_1, I_2 : \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 :$

$\forall \tau = \{x_i\}_{i=0}^{n}, \delta_\tau < \delta$

$\forall \xi = \{\xi_i\}_{i=1}^{n}, \xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \ i = \overline{1,n}$

$\Rightarrow |I_1 - \sigma_\tau(f,\xi)| < \varepsilon/2$; $|I_2 - \sigma_\tau(g,\xi)| < \varepsilon/2$

$$\sigma_\tau(f+g,\xi) = \sum_{i=1}^{n}(f+g)(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}(f(\xi_i)+g(\xi_i))\Delta x_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i = \sigma_\tau(f,\xi) + \sigma_\tau(g,\xi)$$

$$|I_1 + I_2 - \sigma_\tau(f+g,\xi)| = |I_1 + I_2 - \sigma_\tau(f,\xi) - \sigma_\tau(g,\xi)| \leq$$

$$\leq |I_1 - \sigma_\tau(f,\xi)| + |I_2 - \sigma_\tau(g,\xi)| < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ 1) $(f+g)(x)$ е интегруема върху $[a,b]$;

2) $\int_a^b (f+g)(x)dx = I_1 + I_2 = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

2) $\sigma_\tau(\lambda f,\xi) = \lambda\sigma_\tau(f,\xi)$

③ Ако $f(x)$ е неотрицателна и интегруема върху $[a,b]$, $\Rightarrow$
$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Доказателство:

$\int_a^b f(x)dx = \sup_{\tau} s_\tau$

$s_\tau = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \longrightarrow m_i = \inf_{[x_{i-1},x_i]} f(x) \geq 0$

$\Rightarrow s_\tau \geq 0 \Rightarrow \sup_{\tau} s_\tau \geq 0$

Следствие: $f(x) \geq g(x)$ - интегруеми върху $[a,b]$. $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

Доказателство:

$(f-g)(x) \geq 0$ върху $[a,b]$

$\Rightarrow \int_a^b (f-g)(x)dx \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

④ Ако $f(x)$ е интегруема върху $[a,b]$,
$\Rightarrow$ 1) $|f(x)|$ е интегруема върху $[a,b]$;
2) $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

Доказателство:

1) $f(x)$ е интегруема $\Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists \delta=\delta(\varepsilon)>0: \forall \tau=\{x_i\}_{i=0}^{n}: \delta_\tau<\delta \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{\tau(f)} - s_{\tau(f)} < \varepsilon$

$\parallel$

$\sum_{i=1}^{n} \omega_i(f)\Delta x_i < \varepsilon$

$\omega_i(f) = \sup_{[x_{i-1},x_i]} |f(x') - f(x'')|$; $\omega_i(|f|) = \sup_{[x_{i-1},x_i]} \big||f(x')| - |f(x'')|\big| \leq \sup_{[x_{i-1},x_i]} |f(x') - f(x'')|$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \omega_i(|f|)\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} \omega_i(f)\Delta x_i < \varepsilon$

$\Rightarrow |f|$ е интегруема върху $[a,b]$

2) $\left.\begin{array}{l} f(x) \leq |f(x)| \\ -f(x) \leq |f(x)| \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx \\ -\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx \end{array}\right] \Rightarrow \left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

Допълнение: $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \left|\int_a^b |f(x)|dx\right|$

$a>b$

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \left|-\int_b^a f(x)dx\right| = \left|\int_b^a f(x)dx\right| \leq \int_b^a |f(x)|dx = \left|-\int_b^a |f(x)|dx\right| = \left|\int_a^b |f(x)|dx\right|$$

5.) $f(x)$ е интегруема върху $[a,b] \Rightarrow f(x)$ е интегруема върху всеки подинтервал $[c,d] \subset [a,b]$.

Доказателство:

$f(x)$ е интегруема върху $[a,b]$

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0 \; \exists \delta=\delta(\varepsilon)>0 : \forall \tau=\{x_i\}_{i=0}^{n} : \delta_\tau<\delta \Rightarrow S_\tau - s_\tau < \varepsilon$

$\forall \tau' = \{x_i'\}_{i=0}^{m}$ на $[c,d]$, $\delta_{\tau'}<\delta$

построяване разбиване τ на $[a,b] : \tau' \subset \tau \rightarrow \tau|_{[c,d]} = \tau'$

$\delta_\tau = \delta_{\tau'} < \delta$

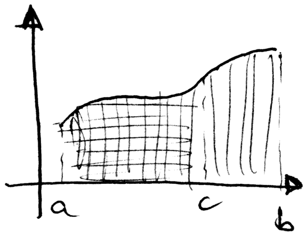
$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \omega_i(f)\Delta x_i < \varepsilon$

$\geq \sum_{i=1}^{m} \omega_i(f)\Delta x_i = S_{\tau'} - s_{\tau'} < \varepsilon$

$\Rightarrow f(x)$ е интегруема върху $[c,d]$.

6.) Ако $f(x)$ е интегруема върху $[a,b]$ и $c \in [a,b]$,

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$



Доказателство:

Нека $a<c<b$.

$f(x)$ е интегруема върху $[a,b] \Rightarrow$ интегруема е и върху $[a,c]$ и $[c,b]$.

$$I = \int_a^b f(x)dx \, ; \, I_1 = \int_a^c f(x)dx \, ; \, I_2 = \int_c^b f(x)dx.$$

$\Rightarrow$ Трябва да докажем $I = I_1 + I_2$.

$\forall \varepsilon>0 \; \exists \delta=\delta(\varepsilon)>0$:

1) $\forall \tau = \{x_i\}_{i=0}^{n} ; \delta_\tau < \delta, \forall \xi = \{\xi_i\}_{i=0}^{n} : \xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \; i=\overline{1,n}$

↳ на $[a,b]$

$\Rightarrow |I - \sigma_\tau(f,\xi)| < \varepsilon/3$

2) $\forall \tau' = \{x_i'\}_{i=0}^{m} : \delta_{\tau'} < \delta ; \forall \xi' = \{\xi_i'\}_{i=1}^{m} ; \xi_i' \in [x_{i-1}', x_i'] \quad i = \overline{1,m}$

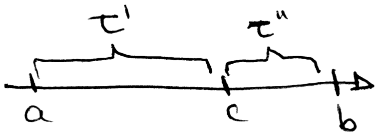
$\to$ на $[a,c]$

$\Rightarrow |I_1 - \sigma_{\tau'}^{[a,c]}(f,\xi')| < \varepsilon/3$

3) $\forall \tau'' = \{x_i''\}_{i=0}^{s} : \delta_{\tau''} < \delta ; \forall \xi'' = \{\xi_i''\}_{i=1}^{s} : \xi_i'' \in [x_{i-1}'', x_i''] \quad i = \overline{1,s}$

$\to$ на $[c,b]$

$\Rightarrow |I_2 - \sigma_{\tau''}^{[c,b]}(f,\xi'')| < \varepsilon/3$



$\tau = \tau' \cup \tau''$

$\left.\begin{matrix} \delta_{\tau'} < \delta \\ \delta_{\tau''} < \delta \end{matrix}\right\} \delta_\tau < \delta$

$\tau' = \{x_i'\}_{i=0}^{m}, \xi' = \{\xi_i'\}_{i=1}^{m} : \xi_i' \in [x_{i-1}', x_i'] \quad i = \overline{1,m}$

$\tau'' = \{x_i''\}_{i=0}^{s}, \xi'' = \{\xi_i''\}_{i=1}^{s} : \xi_i'' \in [x_{i-1}'', x_i''] \quad i = \overline{1,s}$

$\Rightarrow \sigma_\tau(f,\xi) = \sigma_{\tau'}^{[a,c]}(f,\xi') + \sigma_{\tau''}^{[c,b]}(f,\xi'')$

$|I - (I_1 + I_2)| = |I - \sigma_\tau(f,\xi) + \sigma_\tau(f,\xi) - (I_1 + I_2)| \le |I - \sigma_\tau(f,\xi)| + |\sigma_\tau(f,\xi) - (I_1 + I_2)| \le$

$\le |I - \sigma_\tau(f,\xi)| + |\sigma_{\tau'}^{[a,c]}(f,\xi') - I_1| + |\sigma_{\tau''}^{[c,b]}(f,\xi'') - I_2| < \varepsilon$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow |I - (I_1 + I_2)| < \varepsilon \Rightarrow I - (I_1 + I_2) = 0 \Leftrightarrow I = I_1 + I_2$

4) Ако $f(x)$ е непрекъсната върху $[a,b] \Rightarrow \exists c \in (a,b)$:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a) \to f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$ – средна стойност на $f(x)$ върху $[a,b]$

Доказателство:

$f(x)$ е непрекъсната върху крайния затворен интервал $[a,b] \Rightarrow$

$\Rightarrow$ по т-мата на Вайерщрас $\exists x_0, x_1 \in [a,b] : \forall x \in [a,b] \to f(x_0) \le f(x) \le f(x_1)$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x_0)dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b f(x_1)dx$$

$$\Rightarrow f(x_0)(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le f(x_1)(b-a) \quad |:(b-a)$$

$$\Rightarrow f(x_0) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le f(x_1) \Rightarrow \exists c \in [a,b) : f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

$\uparrow$

по т-ма за междинните стойности