23 Асимптоти. Построяване на графика на функция

$\boxed{D}$ Нека $f(x)$ е дефинирана в $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$; или $(x_0-\delta, x_0)$, или $(x_0, x_0+\delta)$. Ако $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\to x_0^+\\ x\to x_0^-}} f(x) = \begin{smallmatrix}\pm\infty\\ \infty\end{smallmatrix}$, то $p: x = x_0$ се нарича вертикална асимптота

$\boxed{D}$ Нека $f(x)$ е дефинирана в или $(a, +\infty)$, или $(-\infty, a)$. Правата $p: y = kx + l$, се нарича асимптота на $f(x)$ при $x \to \pm\infty$, ако $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - (kx+l)) = 0$. При това: 1) $k \neq 0 \Rightarrow$ наклонена асимптота
2) $k = 0 \Rightarrow$ хоризонтална асимптота

$\boxed{T}$ Нека $f(x)$ е дефинирана върху $(a, +\infty)$. Правата $p: y = kx + l$ е асимптота на $f(x)$ при $x \to +\infty \Leftrightarrow$
$\exists \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k$; $\exists \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - kx) = l$

Доказателство:
$\Rightarrow)$ Нека $p: y = kx + l$ е асимптота при $x \to +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - (kx+l)) = 0$.
Нека $\alpha(x) = f(x) - (kx + l) \Rightarrow f(x) = kx + l + \alpha x$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{kx + l + \alpha(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(k + \frac{l}{x} + \frac{\alpha(x)}{x}\right) = k$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty}(kx + l + \alpha(x) - kx) = l$$

$\Leftarrow)$ Нека $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k$ и $\exists \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - kx) = l \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - (kx+l)) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ по дефиниция $p: y = kx + l$ е асимптота на $f(x)$ при $x \to +\infty$