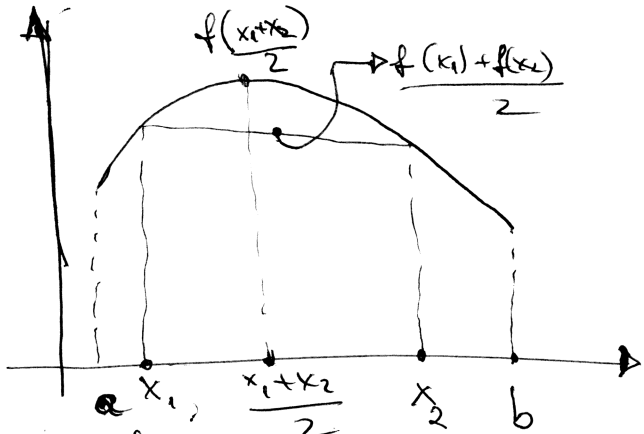
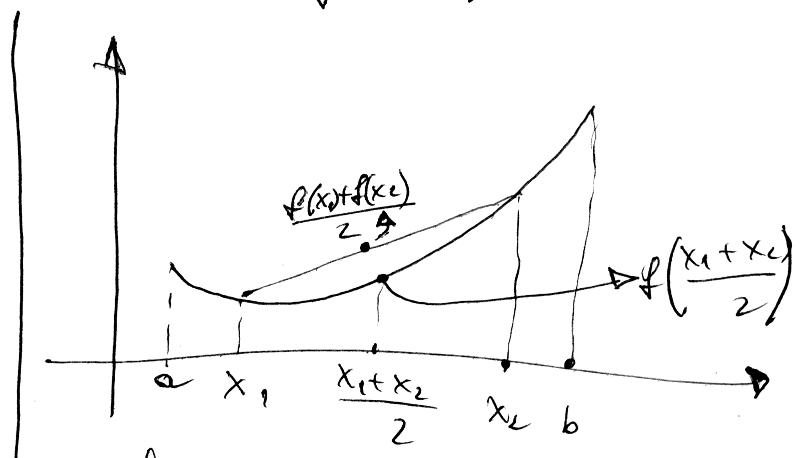
22 Изпъкналост на функция. Инфлексни точки

Д Нека функцията $f(x)$ е дефинирана върху $<a,b>$. Казваме, че функцията е:

1) изпъкнала нагоре (вдлъбната), ако:
$$\forall x_1, x_2 \in <a,b> \Rightarrow \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \leq f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$
2) изпъкнала надолу (изпъкнала), ако:
$$\forall x_1, x_2 \in <a,b> \Rightarrow \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \geq f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$



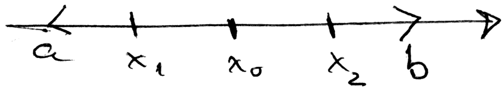
изпъкнала нагоре



изпъкнала надолу

Т Нека $f(x)$ има втора производна върху $<a,b>$. Тогава, ако:
1) $f''(x) \geq 0 \ \forall x \in <a,b> \Rightarrow f(x)$ е изпъкнала надолу върху $<a,b>$.
2) $f''(x) \leq 0 \ \forall x \in <a,b> \Rightarrow f(x)$ е изпъкнала нагоре върху $<a,b>$.

Доказателство:
1) Нека $f''(x) \geq 0$ върху $<a,b>$.



Нека $x_1, x_2 \in <a,b>$, $x_1 < x_2$.

$x_0 = \frac{x_1+x_2}{2}$

$x_2 - x_1 = 2h \Rightarrow x_1 = x_0 - h;\ x_2 = x_0 + h$

Разглеждаме $f(x)$ върху $[x_1, x_0] \Rightarrow$ по т-мата на Тейлор $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists c_1 \in (x_1, x_0): f(x_1) = f(x_0 - h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)(-h)}{1!} + \frac{f''(c_1)(-h)^2}{2!}$

$f(x_1) = f(x_0) - f'(x_0).h + \frac{f''(c_1).h^2}{2!}$ (1).

Разглеждаме $f(x)$ върху $[x_0, x_2] \Rightarrow$ по т-мата на Тейлор $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists c_2 \in (x_0, x_2): f(x_2) = f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0).h + \frac{f''(c_2).h^2}{2}$ (2)

$(1)+(2) \Rightarrow f(x_1)+f(x_2) = 2f(x_0) + \underbrace{\frac{f''(c_1)+f''(c_2)}{2}\cdot h^2}_{>0} \geq 2f(x_0)$

$\Rightarrow f(x_0) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, т.е. $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x)$ е изпъкнала надолу

$\boxed{D}$ Нека $f(x)$ е дефинирана в $U_\delta(x_0)$. Ако $f(x)$ върху интервалите $(x_0-\delta, x_0)$ и $(x_0, x_0+\delta)$ има различни изпъкналости, то x_0 се нарича инфлексна точка.

$\boxed{T}$ Необходимо Условие

Нека $f(x)$ е дефинирана върху $U_\delta(x_0)$ и има f'' в x_0. Ако x_0 е инфлексна, $f''(x_0)=0$.

Доказателство:

Допускане, че $f''(x_0) \neq 0$. За конкретност $f''(x_0)>0$. Т.к. $f''(x)$ е непрекъсната в x_0 и $f''(x_0)>0 \Rightarrow \exists U_\delta(x_0): f''(x)>0$ върху $U_\delta(x_0)$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(x)$ върху $U_\delta(x_0)$ е изпъкнала надолу, т.е. не променя изпъкналостта си. $\lightning \Rightarrow f''(x_0)=0$.

$\boxed{T}$ 1. [redacted] ДУ

Нека $f(x)$ е дефинирана върху $U_\delta(x_0)$ и има $f''(x)$ върху $U_\delta(x_0)$. Ако $f''(x_0)$ върху $(x_0-\delta, x_0)$ и $(x_0, x_0+\delta)$ има различни знаци, то x_0 е инфлексна.

$\boxed{T}$ 2. ДУ

Нека $f(x)$ е дефинирана върху $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ и $\exists f''(x)$ върху $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, $f''(x_0)=0$ и $\exists f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow x_0$ е инфлексна точка.

Доказателство:

За конкретност, нека $f'''(x_0)>0$

$f'''(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f''(x)-f''(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f''(x)}{x-x_0} \Rightarrow$

$\Rightarrow \varepsilon = f'''(x_0) > 0 \Rightarrow \exists \delta_0 : \forall x \in \mathring{U}_{\delta_0}(x_0) \Rightarrow \left|\frac{f''(x)}{x-x_0} - f'''(x_0)\right| < f'''(x_0)$

$\Leftrightarrow f'''(x_0) - f'''(x_0) < \frac{f''(x)}{x-x_0} \Rightarrow \forall x \in \mathring{U}_{\delta_0}(x_0) \Rightarrow \frac{f''(x)}{x-x_0} > 0$

$x \in (x_0-\delta, x_0) \Rightarrow f''(x)<0 \quad (1)$

$x \in (x_0, x_0+\delta) \Rightarrow f''(x)>0 \quad (2)$

$\Rightarrow$ От (1), (2) и 1ДУ

$\Downarrow$

x_0 е инфлексна точка