11. Производна и диференцируемост на функция, диференциал, лява и дясна производна. Геометричен и физичен смисъл

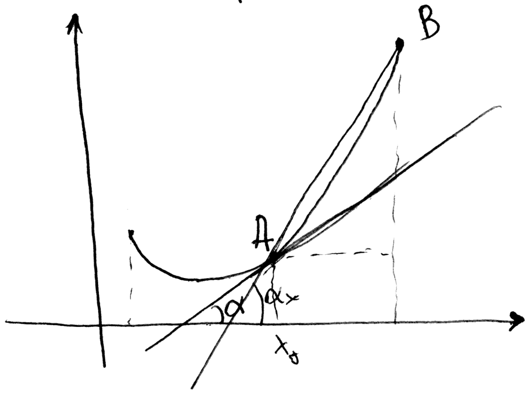
→ Физичен смисъл

$S = S(t)$ — път; t → време

$t_0 \quad t$

$$V_p = \frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0} \longrightarrow V(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0}$$

→ Геометричен смисъл



$$tg\,\alpha_x = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$x \to x_0 \Rightarrow \alpha_x \to \alpha \Rightarrow tg\,\alpha_x \to tg\,\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = tg\,\alpha$$

$\boxed{D}$ Нека $f(x)$ е дефинирана в $U(x_0)$

$\Delta x = x - x_0$ – нарастване на аргумента.

$\Delta f = f(x) - f(x_0)$ – нарастване на $f(x)$ на $f(x)$ около x_0.

$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ – диференчно частно на $f(x)$ около x_0.

Ако $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, то казваме, че $f(x)$ има производна в x_0 и стойността на тази граница се означава $f'(x_0)$.

$f'(x_0)$ – производна на f в x_0.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$\boxed{D}$ Нека $f(x)$ е дефинирана в $U(x_0)$. Ако $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \pm\infty / \infty$, то казваме, че $f(x)$ има безкрайна производна в x_0. ⇒ допирателната е перпендикулярна на Ox.

$\boxed{D}$ Нека $f(x)$ е дефинирана в $U(x_0)$.

$\lim_{x \to x_0^+} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ – дясна производна – $f'(x_0 + 0)$

$\lim_{x \to x_0^-} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ – лява производна – $f'(x_0 - 0)$

$\boxed{T}$ $f(x)$ е дефинирана в $U(x_0)$.

$\exists f'(x_0) \Leftrightarrow \exists f'(x_0-0), f'(x_0+0)$ и $f'(x_0-0) = f'(x_0+0)$.

При това $f'(x_0) = f'(x_0-0) = f'(x_0+0)$.

$\boxed{D}$ $f(x)$ е дефинирана в $U(x_0)$. Казваме, че $f(x)$ е [redacted] диференцируема в (x_0), ако $\exists A \in \mathbb{R} : \Delta f = f(x) - f(x_0) = A(x-x_0) + \mathcal{E}(x-x_0).(x-x_0)$, където $\mathcal{E}(x-x_0)$ е функция, такава, че $\lim\limits_{x \to x_0} \mathcal{E}(x-x_0) = 0$.

$\Delta x = x - x_0 \to \Delta f = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + \mathcal{E}(\Delta x)\Delta x$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \mathcal{E}(\Delta x) = 0$,

$f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + A\Delta x + \mathcal{E}(\Delta x).\Delta x$

$\Rightarrow$ при достатъчно малко Δx

$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + A\Delta x$

$f(x) \approx f(x_0) + A\Delta x$.

$\boxed{T}$ $f(x)$ - дефинирана в $U(x_0)$.

$f(x)$ е диференцируема в $x_0 \Leftrightarrow \exists f'(x_0)$

При това числото A в дефиницията за диференцируемост е $f'(x_0)$.

Доказателство:

$\Rightarrow)$ $f(x)$ - диференцируема в x_0.

$\exists A \in \mathbb{R} : \Delta f = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + \mathcal{E}(\Delta x)\Delta x$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \mathcal{E}(\Delta x) = 0$.

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{A\Delta x + \mathcal{E}(\Delta x).\Delta x}{\Delta x} = A + \mathcal{E}(\Delta x).\Delta x.$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (A + \mathcal{E}(\Delta x)) = \lim_{\Delta x \to 0} A + \lim_{\Delta x \to 0} \mathcal{E}(\Delta x) = A + 0 = A. \Rightarrow \exists f'(x_0) = A.$$

$\Leftarrow)$ $\exists f'(x_0) \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$

$$\mathcal{E}(\Delta x) = \begin{cases} \dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0) & \Delta x \neq 0 \\ 0 & \Delta x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \mathcal{E}(\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0) \right) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0$$

$\Rightarrow f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = \underbrace{f'(x_0)}_{A}.\Delta x + \mathcal{E}(\Delta x).\Delta x \quad (\Delta x \neq 0) \Rightarrow$

$\hookrightarrow f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0).(x-x_0)}_{\text{допирателна към графиката на } f(x) \text{ в точката } (x_0, f(x_0))} + \mathcal{E}(x-x_0).(x-x_0)$

допирателна към графиката на $f(x)$ в точката $(x_0, f(x_0))$.

$\Rightarrow \Delta f = A\Delta x + \mathcal{E}(\Delta x).\Delta x$

$\hookrightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} \mathcal{E}(\Delta x) = 0 \to$ по дефиниция $f(x)$ е диференцируема в x_0.