6. Непрекъснатост на функции – дефиниция, свойства

D Нека $f(x)$ е дефинирана върху $U(x_0)$. Казваме, че $f(x)$ е непрекъсната в x_0, ако $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, т.е.:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$

D Нека $X \subset \mathbb{R}$ и $f(x)$ е дефинирана върху X и $x_0 \in X$.

1) Ако x_0 е изолирана точка, то $f(x)$ е непрекъсната в x_0 по дефиниция.

2) Ако x_0 е точка на сгъстяване, то казваме, че $f(x)$ е непрекъсната в x_0 по множеството X, ако $\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f(x) = f(x_0)$.

D₁ Ако $X = (c, x_0]$ и $f(x)$ е дефинирана върху X, то: ако $\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in(c,x_0]}} f(x) = \lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0)$, казваме, че $f(x)$ е непрекъсната отляво.

D₂ Ако $X = [x_0, b)$ и $f(x)$ е дефинирана върху X, то: ако $\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in[x_0,b)}} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)$, то казваме, че $f(x)$ е непрекъсната отдясно.

T Нека $f(x)$ е дефинирана в $U(x_0)$. $f(x)$ е непрекъсната в $x_0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f(x)$ е непрекъсната в x_0 отляво и отдясно.

Доказателство:

$\Rightarrow$ Ако $f(x)$ е непрекъсната в $x_0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow$
$\Rightarrow \lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow f(x)$ е непрекъсната в x_0 отляво и отдясно.

$\Leftarrow$ Нека $f(x)$ е непрекъсната отляво и отдясно в $x_0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0)$ и $\lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow \exists \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x)$ е непрекъсната в x_0.

D 1) Ако $f(x)$ не е дефинирана в x_0, казваме, че е прекъсната в x_0.
2) Ако $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ или $\nexists \lim_{x\to x_0} f(x)$, казваме, че е прекъсната в x_0.
x_0 – точка на прекъсване.

Т Нека $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани върху $U(x_0)$ и непрекъснати в x_0.

Тогава: 1) $\exists U_\delta(x_0): f(x)$ е ограничена върху $U_\delta(x_0)$

2) Ако $f(x_0) \neq 0 \Rightarrow \exists U_\delta(x_0): f(x)$ запазва постоянен знак.

1) ако $f(x_0) > 0 \rightarrow \exists U_\delta(x_0): \forall x \in U_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) > 0$;

2) ако $f(x_0) < 0 \rightarrow \exists U_\delta(x_0): \forall x \in U_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) < 0$;

3) $\left(f \begin{smallmatrix} + \\ - \\ \cdot \\ \boxed{:} \end{smallmatrix} g\right)(x)$ са непрекъснати в x_0.

$\hookrightarrow g(x) \neq 0$.

Т Нека сложната функция $(F \circ f)(x)$ е зададена по условието:

$$U(x_0) \xrightarrow{f} U(y_0) \xrightarrow{F} \mathbb{R}, \quad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{(F \circ f)(x)}$$

Ако $f(x)$ е непрекъсната в x_0 и $y_0 = f(x_0)$, и $F(y_0)$ е непрекъсната в $y_0 \Rightarrow (F \circ f)(x)$ е непрекъсната в x_0.

D Нека $f(x)$ е дефинирана върху $X \subset \mathbb{R}$. Ако $f(x)$ е непрекъсната във $\forall x \in X$, то казваме, че $f(x)$ е непрекъсната върху X.

Елементарни функции:

1) $f(x) = c$;
2) $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N} \cup \mathbb{Q}$;
3) $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{I}$;
4) тригонометрични;
5) обратни тригонометрични;
6) $f(x) = a^x$ $- a > 0, a \neq 1$;
7) $f(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$

---

1) $f(x) = c$ е непрекъсната върху $\mathbb{R}$

$x_0 \in \mathbb{R}$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: x \in \dot{U}_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = |c - c| = 0 < \varepsilon$

2) $f(x) = x$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \varepsilon > 0: |x - x_0| < \delta = \varepsilon \rightarrow |f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \varepsilon$

3) $f(x) = ax^n$, $n \in \mathbb{N}$ – непрекъсната от аритметични действия

4) $f(x) = a/x^n$

5) $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$ – непрекъснат

6) $R_n(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_n(x)}$ } непрекъснат при $Q_n(x) \neq 0$)

7) $f(x) = \sin x$

$|\sin x| \leq |x|$

$\Downarrow$

$\sin x \leq |AB| < x$

$|\sin x - \sin x_0| = \left|2 \sin\frac{x - x_0}{2} \cos\frac{x - x_0}{2}\right| = 2\left|\sin\frac{x - x_0}{2}\right|\left|\cos\frac{x - x_0}{2}\right| \leq 2\left|\sin\frac{x - x_0}{2}\right| \leq 2\left|\frac{x - x_0}{2}\right| = |x - x_0|$

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \varepsilon$ $\forall x \in |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\sin x - \sin x_0| < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = \sin x$ е непрекъсната в $x_0 \Rightarrow f(x) = \sin x$ е непрекъсната върху $\mathbb{R}$