38) Несобствен интеграл от неотрицателна функция. Абсолютно и условно сходящи се несобствени интеграли

T Нека $f(x)\geq 0$ е неотрицателна функция върху $[a,+\infty)$. Несобственият $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ е сходящ $\Leftrightarrow$ $F(\xi)=\int_a^{\xi} f(x)\,dx$ е ограничена върху $[a,+\infty)$.

Доказателство:

Ако $\xi_1<\xi_2 \Rightarrow F(\xi_2)-F(\xi_1)=\int_a^{\xi_2} f(x)\,dx-\int_a^{\xi_1} f(x)\,dx=$

$$=\int_a^{\xi_1} f(x)\,dx+\int_{\xi_1}^{\xi_2} f(x)\,dx-\int_a^{\xi_1} f(x)\,dx=\int_{\xi_1}^{\xi_2} f(x)\,dx\geq 0 \Rightarrow F(\xi_2)\geq F(\xi_1) \Rightarrow$$

$\Rightarrow F$ е монотонно растяща.

$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ е сходящ $\Leftrightarrow \exists \lim\limits_{\xi\to+\infty}\int_a^{\xi} f(x)\,dx=\lim\limits_{\xi\to+\infty} F(\xi) \Leftrightarrow F(\xi)$ е ограничена върху $[a,+\infty)$.

T Признак за сравнение

Нека $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани върху $[a,+\infty)$ и такива, че $0\leq f(x)\leq g(x)$, $\forall x\in[a,+\infty)$.

Тогава: 1) ако $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ е сходящ, то $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ също е сходящ.

2) ако $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ е разходящ, то $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ също е разходящ.

Доказателство:

Т.к. $0\leq f(x)\leq g(x)$ $\forall x\in[a,+\infty) \Rightarrow 0\leq\int_a^{\xi} f(x)\,dx\leq\int_a^{\xi} g(x)\,dx \Rightarrow$

$\Rightarrow 0\leq\int_a^{\xi} f(x)\,dx\leq\int_a^{\xi} g(x)\,dx\leq M \Rightarrow \int_a^{\xi} f(x)\,dx$ е ограничен върху $[a,+\infty)$

$\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ е сходящ.

D Казваме, че несобствения интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ е:

1) абсолютно сходящ, ако $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ е сходящ;

2) условно сходящ, ако $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ е сходящ, но не е абсолютно сходящ.

[Т] Ако несобственият интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ е абсолютно сходящ $\Rightarrow$
$\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ е сходящ.

Доказателство:

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ − абсолютно сходящ $\Rightarrow \int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ − сходящ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists \delta=\delta(\varepsilon)>0: \forall \xi', \xi'' \in [a,+\infty): |\xi''-\xi'|<\delta \Rightarrow \int_{\xi'}^{\xi''} |f(x)|dx < \varepsilon \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left| \int_{\xi'}^{\xi''} f(x)dx \right| < \left| \int_{\xi'}^{\xi''} |f(x)|dx \right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{\xi \to +\infty} \int_a^{\xi} f(x)dx \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ е сходящ}$$

$\forall \xi \geq a$
$$\left| \int_a^{\xi} f(x)dx \right| \leq \int_a^{\xi} |f(x)|dx \xrightarrow[\xi \to +\infty]{} \left| \int_a^{+\infty} f(x)dx \right| \leq \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

[Т] Нека $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ са абсолютно сходящи.

$\Rightarrow$ 1) $\int_a^{+\infty} (f(x)+g(x))dx$ е абсолютно сходящ.

2) $\int_a^{+\infty} \lambda f(x)dx,\ \lambda \in \mathbb{R}$ е абсолютно сходящ.

Доказателство:

$|f(x)+g(x)| \leq |f(x)|+|g(x)| \Rightarrow \int_a^{\xi} |f(x)+g(x)| \leq \int_a^{\xi} |f(x)|dx + \int_a^{\xi} |g(x)|dx$

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ са абсолютно сходящи $\Rightarrow$

$\Rightarrow \int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ и $\int_a^{+\infty} |g(x)|dx$ са сходящи $\Rightarrow \int_a^{+\infty} (|f(x)|+|g(x)|)dx$ е сходящ $\Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x)|+|g(x)|$ е ограничена $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_a^{\xi} |f(x)+g(x)|dx \leq \int_a^{\xi} (|f(x)|+|g(x)|)dx \leq M \Rightarrow$$

$\Rightarrow \int_a^{+\infty} |f(x)+g(x)|dx$ е сходящ $\Rightarrow \int_a^{+\infty} |f(x)+g(x)|dx$ е абсолютно сходящ.