7. Функция и аргумент клонящи към безкрайност. Неопределености

D 1) Околност на $+\infty$ наричаме $\forall$ интервал от вида $(a,+\infty)$, $a\in\mathbb{R}$.
2) Околност на $-\infty$ наричаме $\forall$ интервал от вида $(-\infty,a)$, $a\in\mathbb{R}$.
3) Околност на ∞ наричаме $\forall$ множество от вида $(-\infty,-a)\cup(a,+\infty)$, $a>0$.

D Нека $X\subset\mathbb{R}$.
1) Казваме, че $+\infty$ е точка на сгъстяване на X, ако за $\forall$ околност на $+\infty$ $\exists x\in X: x\in(a,+\infty)$.
2) Казваме, че $-\infty$ е точка на сгъстяване на X, ако за $\forall$ околност на $-\infty$ $\exists x\in X: x\in(-\infty,a)$.

$\rightarrow$ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, ако $\forall A>0$ $\exists\delta=\delta(A)>0: \forall x\in \mathring{U}_\delta(x_0)$ $|f(x)|>A$.

T Нека $f(x)$ е дефинирана в околност на $x_0\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$.
$\Rightarrow$ 1) Ако $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=0$.
2) Ако $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=\infty$.

Доказателство: Нека $x_0\in\mathbb{R}$.
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$. $A>0$ $\rightarrow$ дефинираме $\varepsilon=\frac{1}{A}>0$ $\exists\delta=\delta(\varepsilon)=\delta(A)>0$:
$\forall x\neq x_0$ и $|x-x_0|<\delta \rightarrow |f(x)|<\varepsilon \Leftrightarrow |f(x)|<1/A \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \frac{1}{|f(x)|}>A \Rightarrow \frac{1}{f(x)}\in(-\infty,-A)\cup(A,+\infty) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=\infty$

Тв Нека $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани $\mathring{U}(x_0)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$,
$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-g(x))=+\infty$

Определености:
1) $A+(\pm\infty)=\pm\infty$
2) $A.(\pm\infty)=\begin{cases}\pm\infty & A>0\\ \mp\infty & A<0\end{cases}$
3) $(\pm\infty).(\pm\infty)=+\infty$
4) $(+\infty).(-\infty)=-\infty$
5) $\frac{\infty}{0}=\infty$
6) $\frac{a}{0}=\infty$, $a\neq0$
7) $\frac{a}{\infty}=0$, $a\neq\infty$

Неопределености:
1) $\pm\infty.0$
2) $\frac{\infty}{\infty}$
3) $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Доказательство:

1) $0 < x < \frac{\pi}{2}$

$$\sin x < x < tg(x) \mid : \sin x \longrightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \underline{\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1}$$

2) $-\frac{\pi}{2} < x < 0 \mid \cdot (-1)$

$$0 < -x < \frac{\pi}{2} \longrightarrow \cos(-x) < \frac{\sin(-x)}{-x} < 1 \Rightarrow \underline{\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1}$$

$$\begin{array}{ccc} \cos x < & \frac{\sin x}{x} & < 1 \\ \Big\downarrow {\scriptstyle x\to 0} & & \Big\downarrow {\scriptstyle x\to 0} \\ 1 & & 1 \end{array}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$