37 Несобствени интеграли върху безкраен интервал и от неограничена функция – определение, свойства

$\boxed{D}$ Нека функцията $f(x)$ е дефинирана върху $[a,+\infty)$ и $f(x)$ е интегруема върху $\forall [a,\xi] \subset [a,+\infty)$, $\forall \xi \geq a$. Ако $\exists \lim\limits_{\xi \to +\infty} \int_a^{\xi} f(x)dx$, то казваме, че $f(x)$ е интегруема в несобствен смисъл върху $[a,+\infty)$ и стойността на границата се нарича несобствен интеграл от $f(x)$ върху $[a,+\infty)$. $\lim\limits_{\xi \to +\infty} \int_a^{\xi} f(x)dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx$.

! Ако $f(x)$ е дефинирана върху $[a,+\infty)$, винаги можем да запишем

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ → сходящ, ако $\exists \lim\limits_{\xi \to +\infty} \int_a^{\xi} f(x)dx$
→ иначе разходящ

Аналогично при интервал $(-\infty; b]$

→ $f(x)$ – интегруема върху $\forall [\eta, b]$

→ $\exists \lim\limits_{\eta \to -\infty} \int_{\eta}^{b} f(x)dx = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx$

При $(-\infty,+\infty)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx, \quad c \in \mathbb{R}$$

$\boxed{D}$ Нека $f(x)$ е дефинирана върху $[a,b)$ и интегруема върху $\forall [a,\xi] \subset [a,b]$; $\xi \in [a,b)$ и неограничена върху $[\xi, b)$.

Ако $\exists \lim\limits_{\xi \to b} \int_a^{\xi} f(x)dx$, то казваме, че $f(x)$ е интегруема в несобствен смисъл върху $[a,b)$

$\lim\limits_{\xi \to b} \int_a^{\xi} f(x)dx = \int_a^{b} f(x)dx$ – несобствен интеграл $f(x)$ върху $[a,b)$.

Аналогично при интервал $(a,b]$:

$f(x)$ е интегруема $\forall [\eta, b]$ и неограничена върху $(a, \eta]$

$$\int_a^{b} f(x)dx = \lim_{\eta \to a^+} \int_{\eta}^{b} f(x)dx.$$

Свойства:

1) Ако $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ са сходящи $\Rightarrow$

$\Rightarrow \int_a^{+\infty} (f(x)+g(x))dx$ и $\int_a^{+\infty} \lambda f(x)dx,\ \lambda \in \mathbb{R}$ са сходящи и

$$\int_a^{+\infty} (f(x)+g(x))dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx + \int_a^{+\infty} g(x)dx$$

$$\int_a^{+\infty} \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

Доказателство:

$$\lim_{\xi\to+\infty} \int_a^{\xi} (f(x)+g(x))dx = \lim_{\xi\to+\infty} \left(\int_a^{\xi} f(x)dx + \int_a^{\xi} g(x)dx \right) = \lim_{\xi\to+\infty} \int_a^{\xi} f(x)dx + \lim_{\xi\to+\infty} \int_a^{\xi} g(x)dx =$$

$$= \int_a^{+\infty} f(x)dx + \int_a^{+\infty} g(x)dx$$

2) Нека $f(x)$ е непрекъсната върху $[a,+\infty)$ и $F(x)$ е примитивна на $f(x)$ върху $[a,+\infty)$. Несобственият интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ е сходящ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists \lim_{x\to+\infty} F(x) = F(+\infty)$ и $\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a) = F(x)\Big|_a^{+\infty}$

Доказателство:

$$\lim_{\xi\to+\infty} \int_a^{\xi} f(x)dx = \lim_{\xi\to+\infty} F(x)\Big|_a^{\xi} = \lim_{\xi\to+\infty} (F(\xi) - F(a)) = \lim_{\xi\to+\infty} F(\xi) - F(a) = F(+\infty) - F(a) = F(x)\Big|_a^{+\infty} =$$

$$= \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

3) Нека $f(x)$ и $g(x)$ имат непрекъснати производни $f'(x)$ и $g'(x)$ върху $[a,+\infty)$. Ако $\exists \lim_{x\to+\infty} f(x)g(x)$ и $\int_a^{+\infty} g(x)df(x)$ е сходящ $\Rightarrow$ сходящ е

$$\int_a^{+\infty} f(x)dg(x) = f(x)g(x)\Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} g(x)df(x)$$

Доказателство:

$$\lim_{\xi\to+\infty} \int_a^{\xi} f(x)dg(x) = \lim_{\xi\to+\infty} \left(f(\xi)g(\xi) - f(a)g(a) - \int_a^{\xi} g(x)df(x) \right) =$$

$$= \lim_{\xi\to+\infty} f(\xi)g(\xi) - f(a)g(a) - \lim_{\xi\to+\infty} \int_a^{\xi} g(x)df(x) =$$

$$= f(+\infty)g(+\infty) - f(a)g(a) - \int_a^{+\infty} g(x)df(x) = f(x)g(x)\Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} g(x)df(x)$$

$\boxed{T}$ 4) Нека $f(x)$ е непрекъсната върху интервала $[a, +\infty)$ и $\varphi: [\alpha, \beta) \to [a, +\infty)$

1) $\varphi(\alpha) = a$, $\lim\limits_{t \to \beta} \varphi(t) = +\infty$

2) $\exists \varphi'(t)$ – непрекъсната

Тогава, ако $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ е сходящ $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_\alpha^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

! Може получения интеграл да е собствен !

Доказателство:

$$\lim_{\xi \to \beta^-} \int_\alpha^{\xi} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \lim_{\xi \to \beta^-} \int_\alpha^{\xi} f(\varphi(t))d\varphi(t) \overset{x=\varphi(t)}{=} \lim_{\xi \to \beta^-} \int_a^{\varphi(\xi) \to +\infty} f(x)dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

$\boxed{T}$ 5) Нека $f(x) \le g(x)$ върху $[a, +\infty)$ и са сходящи

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$. $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx \le \int_a^{+\infty} g(x)dx$.

$$\forall \xi \in [a, +\infty) \Rightarrow \int_a^{\xi} f(x)dx \le \int_a^{\xi} g(x)dx \Rightarrow \lim_{\xi \to +\infty} \int_a^{\xi} f(x)dx \le \lim_{\xi \to +\infty} \int_a^{\xi} g(x)dx \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx \le \int_a^{+\infty} g(x)dx$$