17 | Теорема на Лагранж. Основна теорема на интегралното смятане. Теорема на Коши

Т Лагранж (теорема за крайните нараствания)

$\Rightarrow \Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = f'(c).\Delta x \rightarrow c \in (x, x+\Delta x)$

Нека $f(x)$ е дефинирана върху $[a,b]$ и е такава, че:

1) $f(x)$ е непрекъсната върху $[a,b]$;
2) $\exists f'(x) \rightarrow \forall x \in (a,b)$;

$\Rightarrow \exists c \in (a,b): f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \Leftrightarrow f(b)-f(a) = f'(c).(b-a)$.

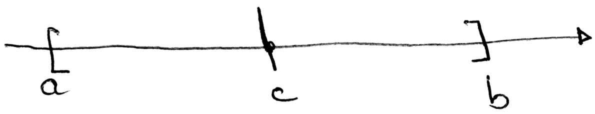
Доказателство:

Построяваме $F(x) = f(x) + \lambda x \rightarrow x \in (a,b)$ така, че $F(a) = F(b)$.

$f(a) + \lambda a = f(b) + \lambda b \Rightarrow \lambda = -\dfrac{(f(b)-f(a))}{b-a}$

1) F е непрекъсната върху $[a,b]$;
2) $\exists F'(x) = f'(x) + \lambda$;
3) $F(a) = F(b) \underset{\text{т-ма на Рол}}{\Rightarrow} \exists c \in (a,b): F'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) + \lambda = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(c) = -\lambda = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$



$0 < \theta = \dfrac{c-a}{b-a} < 1 \Rightarrow a + \theta(b-a) = 0 \Rightarrow$ Друг запис:

$\exists \theta \in (0,1): f(b) - f(a) = f(a + \theta(b-a)).(b-a)$

$\Rightarrow \exists 0 < \theta < 1: f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta \Delta x)\Delta x$.

Т Основна теорема на интегралното смятане

Нека $f(x)$ е непрекъсната върху $\langle a,b \rangle$. Функцията $f(x) \equiv const \Leftrightarrow$

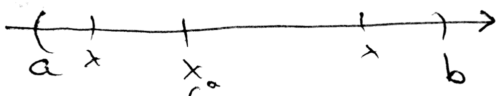
$\Leftrightarrow f'(x) = 0$ върху $\langle a,b \rangle$.

Доказателство:

$\Rightarrow$) Вече е доказано.

$f(x) = const \Rightarrow f'(x) = 0$ върху $\mathbb{R}$.

$\Leftarrow$) Нека $\exists f'(x)$ върху $\langle a,b\rangle$ и $f'(x)\equiv 0$ върху $\langle a,b\rangle$.



$\longrightarrow$ фиксираме $x_0 \in \langle a,b\rangle$.

$\forall x \in \langle a,b\rangle, x \neq x_0$ (за определеност $x > x_0$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 1) $f(x)$ - непрекъсната върху $[x_0, x]$.

2) $\exists f'(x)$ върху (x_0, x) $\Rightarrow$ по т-мата на Лагранж $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists c \in (x_0, x): f(x) - f(x_0) = f'(c).(x - x_0) = 0 \Rightarrow f(x) = f(x_0)$

т.е.: $\forall x \in \langle a,b\rangle : f(x) = f(x_0) \Rightarrow f(x) \equiv f(x_0) = c \Rightarrow f(x) = const$ в/у $\langle a,b\rangle$.

$\boxed{\text{II}}$ Коши

Нека $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани върху $[a,b]$ и такива, че:

1) $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати върху $[a,b]$;

2) $\exists f'(x)$ и $g'(x)$ върху (a,b);

3) $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b)$;

$$\Rightarrow \exists c \in (a,b): \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Доказателство:

Построяваме $F(x) = f(x) + \lambda g(x)$, като λ се определя от условието

$$F(a) = F(b) \Leftrightarrow f(a) + \lambda g(a) = f(b) + \lambda g(b) \Rightarrow \lambda = -\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

$F(x)$: 1) непрекъсната върху $[a,b]$;

2) $\exists F'(x) = f'(x) + \lambda g'(x) \quad \forall x \in (a,b)$;

3) $F(a) = F(b)$

$\Rightarrow$ т-ма на Рол $\Rightarrow \exists c \in (a,b): F'(c) = 0 \Rightarrow F'(c) = f'(c) + \lambda g'(c) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{f'(c)}{g'(c)} = -\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$