# 18 | Разкриване на неопределености - правило на Лопитал

## Т. Лопитал (важи за различни неопределености)

Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани върху $(a,b)$ и такива, че:

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$;

2) $\exists\, f'(x)$ и $g'(x)$ върху $(a,b)$;

3) $\exists \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = k$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = k \Leftrightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказателство:


Дефинираме: $F(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(a,b) \\ 0, & x=a\end{cases}$; $G(x)=\begin{cases} g(x), & x\in(a,b) \\ 0, & x=a\end{cases}$

$\Rightarrow$ $F(x)$ и $G(x)$ са непрекъснати в $a$;

Т.к. $\lim\limits_{x\to a} F(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 = F(a) \Rightarrow F(x)$ е непрекъсната в $a$.

Аналогично за $G$.

Фиксираме $x\in(a,b)$ и разглеждаме $F$ и $G$ върху $[a,x]$.

$\Rightarrow$ 1) $F$ и $G$ са непрекъснати върху $[a,x]$;

2) $\exists\, F'$ и $G'$ върху $(a,x)$, при това $F'=f'$ и $G'=g'$;

3) $G'\neq 0$ върху $(a,x) \Rightarrow$ по т-мата на Коши $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists c\in(a,x):\ \frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)} = \frac{F'(c)}{G'(c)} \Rightarrow \frac{f(x)-0}{g(x)-0} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

$$\Rightarrow \forall x\in(a,b) \Rightarrow \exists \underbrace{c}_{\text{зависещо от } x}\in(a,x):\ \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)} = k.$$