19) Формула на Тейлор

T) Нека $f(x)$ е такава, че $\exists f^{(n+1)}(x)$ върху $U(x_0)$. Тогава $\forall x \in U(x_0)$ $\exists \xi$, лежаща между x и x_0:

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + \frac{f'(x_0).(x-x_0)}{1!} + \frac{f''(x_0).(x-x_0)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!}}_{P(x)\text{ - полином на Тейлор}} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}}_{r_n(x)}$$

$r_n(x)$ остатъчен член във формата на Лагранж

$\Rightarrow f(x) = P(x) + r_n(x) \Rightarrow f(x) \approx P(x)$

Л1) Нека $f(x)$ е дефинирана в $U(x_0)$ и $\exists f^{(n)}(x_0) \Rightarrow \exists$ полином от степен не по-висока от n, такъв, че $P_n(x_0) = f(x_0)$, $P_n'(x_0) = f'(x_0)$ ... $\dots P^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$. При това този полином има следния вид:

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)(x-x_0)}{1!} + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!}$$

Доказателство

$P_n(x_0) = f(x_0)$ - очевидно

$$P_n'(x_0) = f'(x_0) + \frac{f''(x_0)(x-x_0)}{1!} + \frac{f'''(x_0).2.(x-x_0)}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} = f'(x_0)$$

... по индукция.

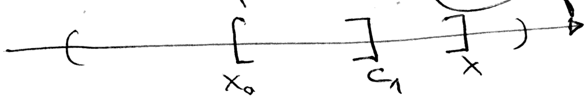
Л2) Нека $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ са дефинирани върху $U(x_0)$, имат производни до $(n+1)$-ви ред върху $U(x_0)$ и са такива, че:

1) $\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = \dots = \varphi^{(n+1)}(x_0) = 0$
   $\psi(x_0) = \psi'(x_0) = \dots = \psi^{(n+1)}(x_0) = 0$

2) $\psi(x) \neq 0$ и $\psi^{(k)}(x) \neq 0$, $k \in [1, n+1]$ върху $\mathring{U}(x_0)$

$\Rightarrow \forall x \in \mathring{U}(x_0) \rightarrow \exists \xi$ от интервала с граници x и x_0: $\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \dfrac{\varphi^{(n+1)}(\xi)}{\psi^{(n+1)}(\xi)}$.

Доказателство:



$\forall x \in \mathring{U}(x_0)$: $x > x_0$ - за определеност.

① Разглеждаме функциите φ и ψ върху $[x_0, x]$.

1) φ и ψ - непрекъснати върху $[x_0, x]$;
2) $\exists \varphi'$ и ψ' върху $[x_0, x]$;
3) $\psi' \neq 0$ върху (x_0, x).

$\Rightarrow$ по т-мата на Коши $\Rightarrow \exists c_1 \in (x_0, x): \dfrac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\psi(x) - \psi(x_0)} = \dfrac{\varphi'(c_1)}{\psi'(c_1)} \Rightarrow$

(2.) Разглеждаме φ' и ψ' върху $[x_0, c_1]$

1) φ' и ψ' са непрекъснати върху $[x_0, c_1]$;

2) $\exists\, \varphi''$ и ψ'' върху (x_0, c_1);

3) $\psi'' \neq 0$ върху (x_0, c_1).

$\Rightarrow$ по т-мата на Коши $\Rightarrow \exists c_2 \in (x_0, c_1): \dfrac{\varphi'(c_1) - \varphi'(x_0)}{\psi'(c_1) - \psi'(x_0)} = \dfrac{\varphi''(c_2)}{\psi''(c_2)} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{\varphi'(c_1)}{\psi'(c_1)} = \dfrac{\varphi''(c_2)}{\psi''(c_2)} \Rightarrow \dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \dfrac{\varphi''(c_2)}{\psi''(c_2)}$

. . . .

(n+1.) $\exists\, \xi \in (x_0, c_n): \dfrac{\varphi^{(n)}(c_n)}{\psi^{(n)}(c_n)} = \dfrac{\varphi^{(n+1)}(\xi)}{\psi^{(n+1)}(\xi)} \Rightarrow$ (n+1)-во равенство, т.е.

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi'(c_1)}{\psi'(c_1)} = \frac{\varphi''(c_2)}{\psi''(c_2)} = \ldots = \frac{\varphi^{(n+1)}(\xi)}{\psi^{(n+1)}(\xi)} \Rightarrow \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi^{(n+1)}(\xi)}{\psi^{(n+1)}(\xi)}$$

$\boxed{T} \Rightarrow$ Доказателство.

Т.к. $\exists f^{(n+1)}(x)$ върху $U(x_0)$, може да построим $P_n \Rightarrow P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k}{k!}$

$r_n(x) = f(x) - P_n(x)$.

Прилагаме Λ_2 за функциите $r_n(x)$ и $(x-x_0)^{n+1}$

$\Rightarrow \forall x \in U(x_0)\ \exists\, \xi \in (x_0, x) \Rightarrow \dfrac{r_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \dfrac{r_n^{(n+1)}(\xi)}{\left((x-x_0)^{n+1}\right)^{(n+1)}} = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$

$r_n^{(n+1)}(x) = \left[f(x) - P_n(x)\right]^{(n+1)} = f^{(n+1)}(x) - P_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$

$\Rightarrow r_n(x) = f(x) - P_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$

$f(x) = P_n(x) + \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$

Ако $x_0 = 0 \Rightarrow$ формулата на Тейлор се нарича формула на Маклорен $\Rightarrow f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(0)x^k}{k!} + r_n(x)$