2. Реални числа. Принцип на непрекъснатост. Модул.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, n+1, \dots\}$ – естествени числа

$\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, 2 \dots\}$ – цели числа

$\mathbb{Q} = \{p/q : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ – рационални числа

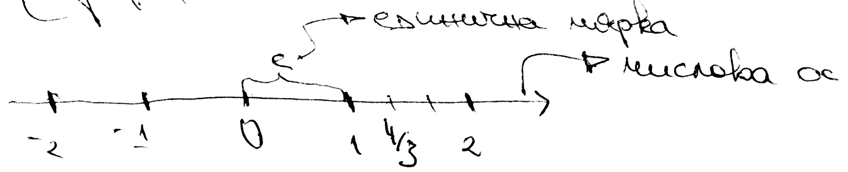
$\mathbb{I}$ – ирационални числа

~~$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$~~ Твърдение: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

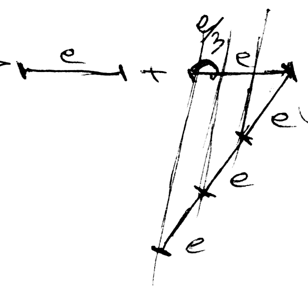
$\rightarrow$ Нека допуснем, че $\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists q, p \in \mathbb{N}, q \neq 0$ – взаимно прости $\Rightarrow p/q = \sqrt{2} \Rightarrow p = q\sqrt{2} \Rightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow p^2$ – четно $\Rightarrow p$ – четно $\Rightarrow$
$\Rightarrow p = 2s \Rightarrow 4s^2 = q^2 \Rightarrow q^2$ – четно $\Rightarrow q$ – четно $\lightning$

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ $\rightarrow$ безкрайни непериодични дроби.
$\mathbb{Q} \rightarrow$ крайни и безкрайни периодични дроби

$\rightarrow$ Изображение:



$\dfrac{4}{3} = 1 + \dfrac{1}{3}$ $\longrightarrow$



$\rightarrow$ Построение чрез Талес

$\boxed{D}$ Нека $a \in \mathbb{R}$. $\Rightarrow$ Модул: $|a| = \begin{cases} a, & \text{ако } a \geq 0 \\ -a, & \text{ако } a < 0. \end{cases}$

$\rightarrow$ Свойства:

1) $|a| \geq 0$
2) $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
3) $|a| \geq a$ и $|a| \geq -a$
4) $|-a| = |a|$
5) $|a.b| = |a| . |b|$
6) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = |a| / |b|$
7) $|a \pm b| \leq |a| + |b|$
8) $\big||a| - |b|\big| \leq |a + b|$

7), 8) + Доказателства

Доказателства:

5.) $|ab| = |a||b|$

1) $ab = 0 \Rightarrow$ поне едно от a и b е 0. За определеност нека $a = 0$.

$\Rightarrow |ab| = |0b| = |0| = 0$
$|a||b| = |0||b| = 0|b| = 0$
$\Rightarrow |ab| = |a||b|$

2) $a, b \neq 0$

1) $a, b > 0 \Rightarrow ab > 0 \Rightarrow |ab| = ab = |a||b|$

2) $a, b < 0 \Rightarrow ab > 0 \Rightarrow |ab| = ab = (-a)(-b) = |a||b|$

3) $a > 0, b < 0 \Rightarrow ab < 0 \Rightarrow |ab| = -(ab) = a(-b) = |a||-b|$

4) $a < 0, b > 0 \Rightarrow ab < 0 \Rightarrow |ab| = -(ab) = (-a).b = |a||b|$

7.) $|a+b| \leq |a| + |b|$

$|a| \geq -a$ и $|a| \geq a$

$|b| \geq -b$ и $|b| \geq b$

$\Downarrow$

$|a| + |b| \geq -(a+b)$ и $|a| + |b| \geq a + b$

$\Downarrow$

$|a| + |b| \geq |a+b|$

8.) $||a| - |b|| \leq |a+b|$

$|a| = |(a+b) - b| \leq |a+b| + |b| \Rightarrow |a| - |b| \leq |a+b|$
$|b| = |(a+b) - a| \leq |a+b| + |a| \Rightarrow -(|a| - |b|) \leq |a+b|$
$\Rightarrow$

$\Rightarrow ||a| - |b|| \leq |a+b|$

$\Rightarrow$ Базови свойства на $\mathbb{R}$ и аксиома за непрекъснатост

$\boxed{\text{I} \oplus}$ 1) $a + b = b + a$

2) $(a+b) + c = a + (b+c)$

3) $\exists!\, 0 \in \mathbb{R}: \forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow a + 0 = a$

4) $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists\ -a \in \mathbb{R} \Rightarrow a + (-a) = 0$

$\boxed{D}$ $-a$ се нарича противоположно на a.

$\boxed{D}$ $\forall a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a - b = a + (-b)$

II $(\cdot)$

1) $ab = ba$

2) $(ab)\cdot c = a(bc)$

3) $\exists!\, 1 \in \mathbb{R} : a.1 = a$

4) $\forall a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ $\exists\, 1/a \in \mathbb{R} : a.\dfrac{1}{a} = 1$

D $1/a$ се нарича реципрочно на a.

D $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{b}.a.$

III $(a+b).c = a.c + b.c$

IV $(<)$

1) $\forall a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a<b$, $a=b$ или $a>b$

$a<b \Leftrightarrow b>a$

2) $a<b$ и $b<c \Rightarrow a<c$

3) $a<b$ и $c \in \mathbb{R} \Rightarrow a+c < b+c$

4) $a<b$ и $c>0 \Rightarrow ac < bc$

5) $a<b$ и $c<0 \Rightarrow ac > bc$

V Свойства на плътност на $\mathbb{R}$:

За $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a<b \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : a<c<b$

$\longrightarrow$ Свойства $I \div V$ важат и за $\mathbb{Q}$, но VI – не.

VI Принцип за непрекъснатост

Нека X и Y са подмножества на $\mathbb{R}$: $\forall x \in X$ и $\forall y \in Y \Rightarrow x \leq y$.

Тогава $\exists z \in \mathbb{R} : x \leq z \leq y$.

Пример: $\sqrt{2} = 1,4142135623731\ldots$

$$\left.\begin{array}{l} X = \{1;\ 1,4;\ 1,41;\ 1,414;\ \ldots\} \\ Y = \{2;\ 1,5;\ 1,42;\ 1,415;\ \ldots\} \end{array}\right\} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \Rightarrow \forall x \in X, \forall y \in Y \Rightarrow x \leq y$$

$\exists ?\, z \in \mathbb{Q} : x \leq z \leq y \longrightarrow$ НЕ $\longrightarrow z = \sqrt{2}$

→ Точна горна и точна долна граница.

D Нека $X \subset \mathbb{R}$. Множеството X се нарича ограничено отгоре, ако:
$\exists a \in \mathbb{R} : \forall x \in X \Rightarrow x \leq a$.

a се нарича горна граница на X.

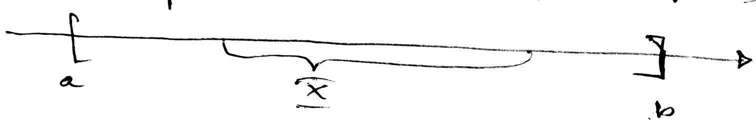
D Нека $X \subset \mathbb{R}$. Множеството X се нарича ограничено отдолу, ако:
$\exists b \in \mathbb{R} : \forall x \in X \Rightarrow x \geq b$.

b се нарича долна граница на X.

D Множеството $X \subset \mathbb{R}$ се нарича ограничено, ако е ограничено и отгоре, и отдолу.

$\exists a, b \in \mathbb{R} : \forall x \in X \Rightarrow b \leq x \leq a$.

Тв $X \subset \mathbb{R}$ е ограничено $\Leftrightarrow \exists M > 0 : \forall x \in X \Rightarrow |x| \leq M$,



$M = \max\{a, b\} \Rightarrow X \subset [-M; M] \Leftrightarrow \forall x \in X \Rightarrow x \leq |M|$.

D Нека $x_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Отвореният интервал $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ се нарича ε-околност на x_0.

Тв $x \in (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon) \Leftrightarrow |x - x_0| < \varepsilon$.

D Дължина на $\langle a, b\rangle$ наричаме числото $b - a = |\langle a, b\rangle|$.

D Нека $X \subset \mathbb{R}$, ограничено отгоре, и $x_0 \in X$. Казваме, че x_0 е най-голям елемент на X, ако е горна граница на X.

Тв Ако X има най-голям елемент, то този елемент е единствен.

Доказателство:

Нека x_0 и y_0 са най-големи елементи на X. $\Rightarrow \forall x \in X \Rightarrow x \leq x_0$ и $x \leq y_0$.
В частност, т.к. $x_0 \in X$, $x_0 \leq y_0$ и т.к. $y_0 \in X \Rightarrow y_0 \leq x_0 \Rightarrow x_0 = y_0$.

! Не всяко множество, ограничено отгоре, има най-голям елемент.

D Нека $X \subset \mathbb{R}$ е ограничено отгоре и $ГГ(X) = \{y \in \mathbb{R} : y$ е горна граница на $X\}$, $ГГ(X) \neq \emptyset$. Най-малкият елемент на $ГГ(X)$ се нарича точна горна граница на X.

$ТГГ(X) = \sup X$.

D Нека $X \subset \mathbb{R}$ е ограничено отдолу и $ДГ = \{y \in \mathbb{R} : y$ е долна граница на $X\}$, $ДГ \neq \emptyset$. Най-големият елемент на $ДГ(X)$ се нарича точна долна граница на X.

$ТДГ(X) = \inf X$.

Тв Ако $\alpha = \sup X \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 1) \forall x \in X \Rightarrow x \leq \alpha \\ 2) \forall \alpha' < \alpha \Rightarrow \exists x_\alpha \in X \Rightarrow x_\alpha > \alpha' \end{array}\right\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ 1) $\forall x \in X \Rightarrow x \leq \alpha$

2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_\varepsilon \in X : x_\varepsilon > \alpha - \varepsilon$

Тв Ако $\beta = \inf X \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 1) \forall x \in X \Rightarrow x \geq \beta \\ 2) \forall \beta' > \beta \Rightarrow \exists x_\beta \in X \Rightarrow x_\beta < \beta' \end{array}\right\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ 1) $\forall x \in X \Rightarrow x \leq \beta$

2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_\varepsilon \in X : x_\varepsilon < \beta + \varepsilon$

Т Ако множеството $X \subset \mathbb{R}$ е ограничено отгоре $\Rightarrow \exists \sup X$.

Доказателство:

$ГГ(X \neq \emptyset) \Rightarrow \forall x \in X, \forall y \in ГГ(X) \Rightarrow x \leq y \Rightarrow$ съгласно принципа за непрекъснатост $\exists z \in \mathbb{R} : \forall x \in X, \forall y \in ГГ(X) \Rightarrow x \leq z \leq y \Rightarrow$

$\Rightarrow$ 1) z е горна граница за X

2) $z = \sup X$

Допълнение: Принцип за непрекъснатост $\Leftrightarrow \exists \sup X$ за $\forall X$, ограничено отгоре.

Принцип на Архимед:

За $\forall x \in \mathbb{R},\ x > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}: n > x$.

Следствие: $0 < a < b \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}: na > b$

Доказателство:

Допускаме противното $\Rightarrow \exists x_0 \in \mathbb{R};\ x_0 > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \leq x_0$.

$\Rightarrow \mathbb{N}$ е ограничено отгоре $\Rightarrow \exists \sup \mathbb{N} = \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow$ 1) $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \leq \alpha$

2) $\varepsilon = 1 \Rightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N}: \alpha - 1 < n_1 \leq \alpha$

$\Rightarrow \alpha < n_1 + 1$ ↯

$\Rightarrow \mathbb{N}$ не е ограничено

Принцип на вложените затворени интервали

$\boxed{D}$ Система от интервали: $[a_n, b_n],\ n \in \mathbb{N}$, се нарича система от вложени интервали, ако за $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$

$\boxed{T}$ Ако $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ е система от вложени интервали, тогава:

1) $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset$

2) $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = [\xi, \eta]$, където $\xi = \sup\{a_n,\ n \in \mathbb{N}\} = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$ и

$\eta = \inf\{b_n,\ n \in \mathbb{N}\} = \inf_{\mathbb{N}} b_n$

Доказателство:

Нека $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ и $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$; $B = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$

$\forall a_n \in A, \forall b_m \in B \Rightarrow a_n \leq b_m$

1) $n \leq m \Rightarrow a_n \leq a_m \leq b_m \Rightarrow a_n \leq b_m$

2) $n > m \Rightarrow a_n \leq b_n \leq b_m \Rightarrow a_n \leq b_m$

$\Rightarrow$ съгласно принципа за непрекъснатост $\exists \xi \in \mathbb{R}$:

$\forall a_n, b_m \Rightarrow a_n \leq \xi \leq b_m \Rightarrow \forall n\ a_n \leq \xi \leq b_n \Rightarrow \xi \in [a_n, b_n]\ \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset$

$\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]=[\xi,\eta] \Rightarrow \xi=\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n;\ \eta=\inf_{n\in\mathbb{N}} b_n$ $\boxed{?}$

Нека $x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n] \Rightarrow \forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow x\in[a_n,b_n] \Rightarrow \forall n\ a_n\le x\le b_n \Rightarrow$

$\Rightarrow x$ е горна граница за A и долна граница за B. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x\ge\xi \\ x\le\eta \end{matrix}\right\} \Rightarrow x\in[\xi,\eta] \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]\subset[\xi,\eta]$ (1)

Нека $x\in[\xi,\eta] \Rightarrow \xi\le x\le\eta \Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}\ a_n\le\xi\le x\le\eta\le b_n \Rightarrow$

$\Rightarrow x\in[a_n,b_n]$ за $\forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n] \Rightarrow [\xi,\eta]\subset\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$

$\Rightarrow$ От (1) и (2) $\Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]=[\xi,\eta]$.

$\boxed{D}$ Нека $\{[a_n,b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ е система от вложени [redacted] затворени интервали. Казваме, че дължините $|[a_n,b_n]|$ клонят към 0, ако $\forall\varepsilon>0\ \exists N=N_\varepsilon: \forall n>N \Rightarrow |[a_n,b_n]|<\varepsilon$.

$\boxed{Тв}$ Ако системата от вложени затворени интервали $\{[a_n,b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ има дължини, клонящи към 0, тогава $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]=\{\xi\}$.

Доказателство:

Съгласно предното твърдение $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]=[\xi,\eta]$, $\xi=\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$; $\eta=\inf_{n\in\mathbb{N}} b_n$

$\Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}: [\xi,\eta]\subset[a_n,b_n]$.

$\left.\forall\varepsilon>0\ \exists N=N_\varepsilon: \forall n>N \Rightarrow |[a_n,b_n]|<\varepsilon\right\} \Rightarrow \forall n>N: |[\xi,\eta]|\le|[a_n,b_n]|<\varepsilon$

$\Rightarrow 0\le\eta-\xi\le b_n-a_n<\varepsilon \Rightarrow \forall\varepsilon>0: 0\le\eta-\xi<\varepsilon$

Допускаме, че $\eta-\xi\ne0 \Rightarrow \varepsilon=\frac{\eta-\xi}{2}>\eta-\xi$ ↯ $\Rightarrow \eta=\xi \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]=\{\xi\}$