31 | Класове интегруеми функции

$\boxed{T_1}$ Ако $f(x)$ е непрекъсната върху крайния затворен интервал $[a,b] \Rightarrow f(x)$ е интегруема върху $[a,b]$

Доказателство:

$f(x)$ е непрекъсната върху $[a,b] \Rightarrow f(x)$ е равномерно непрекъсната върху $[a,b] \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x', x'' \in [a,b] : |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \to \varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)} \to \exists \delta = \delta(\varepsilon') = \delta(\varepsilon) > 0 :$

$\forall x', x'' \in [a,b] : |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon'$.

$$S_\tau - s_\tau = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(f) \Delta x_i \to \omega_i(f) = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} |f(x') - f(x'')|$$

$\forall \tau = \{x_i\}_{i=0}^{n} : \delta_\tau < \delta$

$\forall x', x'' \in [x_{i-1}, x_i] \Rightarrow |x' - x''| \le \Delta x_i \le \delta_\tau < \delta$

$\Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon' \Rightarrow \omega_i(f) = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} |f(x') - f(x'')| \le \varepsilon' \Rightarrow$

$$\Rightarrow S_\tau - s_\tau = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(f) \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} \varepsilon' \Delta x_i = \varepsilon' \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \varepsilon' . (b-a) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

$\Rightarrow f(x)$ е интегруема върху $[a,b]$.

$\boxed{T_2}$ Ако $f(x)$ е монотонна върху $[a,b] \Rightarrow f(x)$ е интегруема върху $[a,b]$.

Доказателство:

Нека за определеност $f(x)$ е монотонно растяща върху $[a,b]$.

$$\forall \tau = \{x_i\}_{i=0}^{n} \to S_\tau - s_\tau = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \Delta x_i$$

$$\Rightarrow S_\tau - s_\tau = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) \delta_\tau = \delta_\tau \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) =$$

$$= \delta_\tau (f(b) - f(a)).$$

$\forall \varepsilon > 0$. Трябва да покажем, че $\exists \delta = \delta(\varepsilon) : \forall \tau = \{x_i\}_{i=0}^{n} : \delta_\tau < \delta \Rightarrow S_\tau - s_\tau < \varepsilon$.

$\Rightarrow$ Нека $\delta = \dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$. Тогава:

$$S_\tau - s_\tau \le \delta_\tau (f(b) - f(a)) < \frac{\varepsilon}{(f(b) - f(a))} . (f(b) - f(a)) = \varepsilon$$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon)$:

$\forall \tau = \{x_i\}_{i=0}^{n}, \ \delta_\tau < \delta \Rightarrow S_\tau - s_\tau < \varepsilon$

$\Rightarrow f(x)$ е интегруема върху $[a,b]$.

$\boxed{T3}$ Ако функцията $f(x)$ е ограничена и има краен брой точки на прекъсване върху $[a,b] \Rightarrow f(x)$ е интегруема върху $[a,b]$.