34 Интегриране по части и смяна на променливата в определен интеграл

Т Нека $f(x)$ и $g(x)$ имат непрекъснати производни върху $[a,b]$.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dg(x) = f(x).g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)df(x).$$

Доказателство:

$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$ върху $[a,b]$.

$$\Rightarrow \int_a^b (f(x)g(x))'dx = \int_a^b (f'(x)g(x)dx + f(x)g'(x))dx =$$

$$= \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx = \int_a^b g(x)df(x) + \int_a^b f(x)dg(x)$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dg(x) = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)df(x).$$

Т Нека $f(x)$ е непрекъсната в $[A,B]$ и $\varphi(t)$ е такава, че:

1) $\varphi : [\alpha,\beta] \to [A,B]$

2) $\varphi(\alpha) = A; \varphi(\beta) = B$

3) $\exists \varphi'(t) \to$ непрекъсната върху $[\alpha,\beta] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_A^B f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)).\varphi'(t)dt$$

Доказателство:

$F(x)$ е примитивна на $f(x)$ върху $[A,B] \Rightarrow$

$\Rightarrow F(\varphi(t))$ е примитивна на $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, т.к. $F'(\varphi(t)) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$.

$$\Rightarrow \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t))\Big|_\alpha^\beta = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(B) - F(A) = \int_A^B f(x)dx$$