16. Теорема на Ферма. Теорема на Рол

Т. Ферма:

Нека $f(x)$ е дефинирана в $U(x_0)$ и нека в точката x_0 достига своята най-голяма/малка стойност. Тогава, ако съществува производна, то $f'(x_0)=0$.

Доказателство:

Нека $\exists f'(x_0)$ и $x_0 \Rightarrow f(x)$ достига най-голяма стойност.

$\forall x \in U(x_0) \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x_0) = f'(x_0-0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \begin{matrix} \ominus \\ \ominus \end{matrix} \geq 0 \Rightarrow f'(x_0) \geq 0 \\ f'(x_0) = f'(x_0+0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \begin{matrix} \ominus \\ \oplus \end{matrix} \leq 0 \Rightarrow f'(x_0) \leq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(x_0)=0.$$

Т. Рол:

Нека $f(x)$ е дефинирана върху $[a,b]$ и такава, че:

1) $f(x)$ е непрекъсната върху $[a,b]$;
2) $\exists f'(x)$ $\forall x \in (a,b)$;
3) $f(a)=f(b)$;

$\Rightarrow \exists c \in (a,b): f'(c)=0$.

Доказателство.

$f(x)$ - непрекъсната върху $[a,b] \Rightarrow$ Т. Вайерщрас $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists x_0, x_1 \in [a,b]: \forall x \in [a,b]$ $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$

сл. 1) $\{x_0, x_1\} = \{a,b\}$

За конкретност $x_0=a$, $x_1=b$

$\forall x \in [a,b] \Rightarrow f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$

$$\underbrace{f(a) = f(b)}$$

$\Rightarrow \forall x \in [a,b] \Rightarrow f(x)=f(a) \Rightarrow f(x)=const \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x)=0$ $\forall x \in [a,b]$

сл. 2) $\{x_0, x_1\} \setminus \{a,b\} \neq \emptyset$

За конкретност $x_0 \in (a,b) \Rightarrow$ по Т. Ферма $\Rightarrow f'(x_0)=0$