8 | Сходящи безкрайни числови редици – определение и свойства. Неперово число

D: Функция $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ се нарича безкрайна числова редица.

$f(n) = a_n : a_1, a_2, a_3, \dots a_n, \dots$

$\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = \lim a_n = l \Leftrightarrow \forall (l-\varepsilon, l+\varepsilon) \quad \exists (\delta, +\infty): \forall n \in (\delta, +\infty) \Rightarrow f(n) \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$.

D: $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, ако $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N = N(\varepsilon) > 0: \forall n > N \to |a_n - a| < \varepsilon$.

1) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \to a_n$ е сходяща (иначе – разходяща).

2) $\Rightarrow a_n$ е ограничено множество.

3) $\Rightarrow$ от даден номер нататък знакът се запазва.

D: Всяка функция $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ще наричаме безкрайна числова редица (БЧР).

D: Границата l на БЧР $a_n = f(n)$ $(n \in \mathbb{N})$.

$l = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists N = N(\varepsilon): \forall n > N \Rightarrow |l - a_n| < \varepsilon$.

Свойства: 1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$ е единствена

от св-ва на lim на функция

2) Ако $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n \Rightarrow \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена, т.е.

$\exists M > 0: \forall n \in \mathbb{N} \; |a_n| \leq M$.

3) Ако $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l \neq 0, a_n \neq 0 \Leftrightarrow \exists N: \forall n > N \to a_n \neq 0$:

3.1) $l > 0 \Rightarrow a_n > 0$;

3.2) $l < 0 \Rightarrow a_n < 0$;

4) Ако $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}: a_n \leq b_n \; (\forall n \in \mathbb{N})$ и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n < \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

5) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n < \lim\limits_{n\to\infty} b_n \Rightarrow \exists N: \forall n > N \to a_n < b_n$

6) Ако $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} (a_n \overset{+}{\underset{\cdot}{\div}} b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \overset{+}{\underset{\cdot}{\div}} \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

$\to \lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$ и $b_n \neq 0$

D| Редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ се нарича монотонно растяща или монотонно намаляваща, ако за $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n \leq a_{n+1}$ или $a_n \geq a_{n+1}$.

T| Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е монотонна $\Rightarrow$

Редицата е сходяща $\Leftrightarrow a_n$ е ограничена. При това:

1) ако е монотонно растяща $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$.

2) ако е монотонно намаляваща $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$.

Доказателство: Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е монотонно растяща.

$\Rightarrow$ Ако $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща $\Rightarrow \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена

$\Leftarrow$) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена $\Rightarrow \exists \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n = \alpha$.

$\Rightarrow$ 1) $a_n \leq \alpha \quad (\forall n \in \mathbb{N})$;

2) $\varepsilon > 0 \;\; \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \;\; \alpha - \varepsilon < a_{n_\varepsilon}$

$\forall n > n_\varepsilon \Rightarrow \alpha - \varepsilon < a_{n_\varepsilon} \leq a_n \leq \alpha < \alpha + \varepsilon$

$\Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$

$a_n = (1 + 1/n)^n, \; n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ 1) $2 < a_n < 3$

2) a_n е СМР $\Rightarrow a_n < a_{n+1} \;\; (\forall n \in \mathbb{N}) \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = e$ - неперово число

$e \in \mathbb{I}$; $e = 2{,}718281828459\ldots$

$\log_e x = \ln x$ - натурален логаритъм

Доказателство:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$a_n = (1 + 1/n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n^k} =$$

$$= 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \ldots + \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} + \ldots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{1}{n^k} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-n+1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}(1 - 1/n)(1 - 2/n) + \ldots + \frac{1}{k!}(1 - 1/n)\cdots\left(1 - \frac{(k-1)}{n}\right) + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{(n-1)}{n}\right)$$

$$a_{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right) + \dots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) + \dots +$$
$$+ \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\dots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$$

$$k! = 1.2\dots k > 1.2\dots 2 = 2^{k-1}$$

$$1-\frac{k}{n} < 1-\frac{k}{n+1} \Rightarrow a_n < a_{n+1} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

$$0 < 1-\frac{k}{n} < 1 \quad (k = 1, \dots, n-1)$$

$$a_n < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!} < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}} \quad (*)$$

$\Rightarrow a_n > 2$

$$(*) = \frac{1+(1-(1/2)^n)}{1-1/2} = 1+2\underbrace{\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}_{<1} < 3$$

→ Специфични свойства на безкрайни числови редици

$\boxed{D}$ Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ (1) е безкрайна числова редица.

$n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots, k \in \mathbb{N}, n_k \in \mathbb{N}$

⇒ Редица $a_{n_1}, a_{n_2}, \dots a_{n_k} \dots$ се нарича подредица на (1).

$\boxed{T}$ Ако $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща, то всяка нейна подредица също е сходяща и има същата граница.

$\lim_{n\to\infty} a_n = l$; $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ – сходяща ⇒ $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ – сходяща и $\lim_{n\to\infty} a_{n_k} = l$.

Доказателство:

$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N = N(\varepsilon) : \forall n > N \rightarrow |l - a_n| < \varepsilon$.

$\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ – подредица ⇒ $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ – неограничена.

$\Rightarrow \exists k_0 : n_{k_0} > N \rightarrow \forall k > k_0 ;\ n_k > N \Rightarrow |l - a_{n_k}| < \varepsilon \Rightarrow$

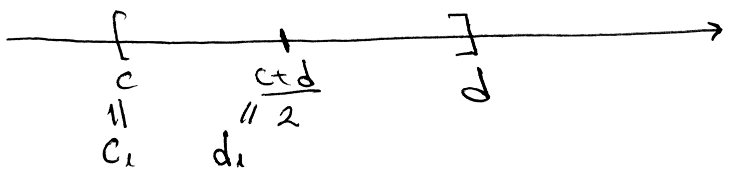
$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{n_k} = l$ и $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ – сходяща

$\boxed{T}$ (Болцано-Вайерщрас).

От всяка ограничена редица $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ можем да изберем сходяща редица $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$

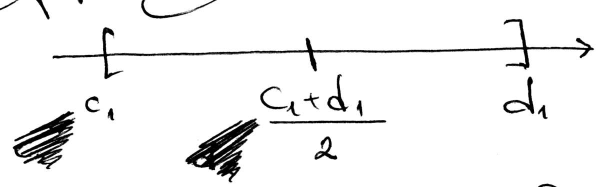
Доказателство:

Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена и $[c,d]\supset\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$



$[c_1,d_1]$ - съдържа безброй много членове на $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

$a_{n_1}\in[c_1,d_1]$



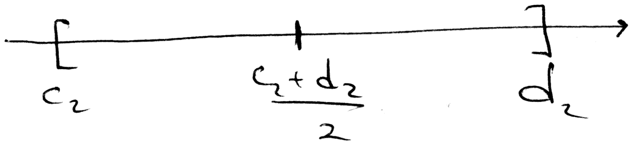
$\Rightarrow$ в поне едната половина лежат безброй много елементи $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

$\Rightarrow$ нека тя е $[c_2,d_2]$.

$a_{n_2}\in[c_2,d_2] : n_2>n_1$

$|[c_1,d_1]| = d_1-c_1 = \frac{d-c}{2}$

$|[c_2,d_2]| = d_2-c_2 = \frac{d_1-c_1}{2} = \frac{d-c}{2^2}$



$\Rightarrow$ в едната половина лежат безброй елементи $\longrightarrow [c_3,d_3]$

Избираме $a_{n_3}\in[c_3,d_3] : n_3>n_2>n_1$

процедурата продължава до безкрайност

$\Rightarrow$ Получаваме:

$[c_1,d_1]\supset[c_2,d_2]\supset[c_3,d_3]\supset\ldots\supset[c_k,d_k]\supset\ldots$

$|[c_k,d_k]| = \frac{d-c}{2^k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \Rightarrow \bigcap_{k=1}^{\infty}[c_k,d_k] = \{\alpha\}$ $\longrightarrow$ точка

МР редица $\Rightarrow$ $\lim_{k\to\infty} c_k = \sup_{k\in\mathbb{N}} c_k = \alpha$

МН редица $\Rightarrow$ $\lim_{k\to\infty} d_k = \inf_{k\in\mathbb{N}} d_k = \alpha$

$\alpha = \sup_{k\in\mathbb{N}} c_k = \inf_{k\in\mathbb{N}} d_k$ и сме избрали

$a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}, \ldots \mid a_{n_k}\in[c_k,d_k]$

$n_1<n_2<n_3<\ldots<n_k<\ldots$

$$\forall k \quad \underset{\substack{\downarrow k\to\infty \\ \alpha}}{c_k} \le a_{n_k} \le \underset{\substack{\downarrow k\to\infty \\ \alpha}}{d_k} \Rightarrow$$ по теоремата за двамата полицаи $\Rightarrow$

$\Rightarrow a_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \alpha \Rightarrow a_{n_k}$ - сходяща редица

$\rightarrow$ Свойства: Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$: $a_n \le h_n \le b_n, \forall n \in \mathbb{N}$

$\boxed{T}$ За двамата полицаи.

Ако $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \alpha \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} h_n = \alpha$.

$\boxed{D}$ Казваме, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е фундаментална, ако:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon): \forall n > N, \forall m > N \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow n < m;\ m - n = p;\ m = n + p$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon: \forall n > N_\varepsilon \ \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$

$\boxed{Тв.1}$ Ако безкрайната числова редица $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е фундаментална, то тя е ограничена.

Доказателство:

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ - фундаментална $\Rightarrow \varepsilon = 1 \ \exists N_1: \forall n > N_1 \ \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow |a_{n+p} - a_n| < 1$

$\big||a_{n+p}| - |a_n|\big| \le |a_{n+p} - a_n| < 1 \Rightarrow \cancel{|a_n| - 1} < |a_{n+p}| < 1 + |a_n|, \forall p \in \mathbb{N}$

$M = \max\{|a_1|, \dots, |a_{n_0}|, 1 + |a_{n_0}|\}$

$n_0 > N \Rightarrow \forall n > n_0 \quad |a_{n+p}| \le 1 + |a_{n_0}|$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \le M \Rightarrow \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ - ограничена

$\boxed{T}$ Критерий на Коши

Безкрайната числова редица $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща $\Leftrightarrow$ е фундаментална.

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon: \forall n > N_\varepsilon \ \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$

Доказателство:

$\Rightarrow)$ Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща $\Rightarrow \exists a \in \mathbb{R}: \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon: \forall n > N_\varepsilon \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon/2 \\ \qquad \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow |a_{n+p} - a| < \varepsilon/2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow |a_{n+p} - a_n| = |a_{n+p} - a + a - a_n| \le |a_{n+p} - a| + |a - a_n| < 2 \cdot \varepsilon/2 = \varepsilon$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon: \forall n > N_\varepsilon$ и $\forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е фундаментална.

$\Leftarrow$) Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е фундаментална $\overset{Тв.1}{\Rightarrow}$ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена $\Rightarrow$ по Болцано-Вайерщрас $\Rightarrow$ $\exists$ сходяща подредица $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ и нека $a_0 = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}$.

$\forall \varepsilon > 0$ т.к. $a_0 = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n_k}$, то $\varepsilon/2 > 0$ $\exists k_\varepsilon : \forall k > k_\varepsilon \Rightarrow |a_0 - a_{n_k}| < \varepsilon/2$.

т.к. a_n - фундаментална, то $\varepsilon/2 > 0 : \exists n_\varepsilon : \begin{matrix}\forall n > n_\varepsilon \\ \forall m > n_\varepsilon\end{matrix} \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon/2$

Нека $N_\varepsilon = \max\{n_\varepsilon, n_{k_\varepsilon}\}$.

Тогава $\forall n > N_\varepsilon$ избираме $k_0 : n_{k_0} > N_\varepsilon$ $(k_0 > k_\varepsilon)$

$\Downarrow$

$|a_0 - a_n| = |a_0 - a_{n_{k_0}} + a_{n_{k_0}} - a_n| \leq |a_0 - a_{n_{k_0}}| + |a_{n_{k_0}} - a_n| < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a_0$

Дефиниция на Хайне за граница на функция:

Нека $f(x)$ е дефинирана в $\mathring{U}(x_0)$.

$A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, ако $\forall x_1, x_2 \dots \to x_0$, $x_n \in \mathring{U}(x_0)$, $x \neq x_0$
$\Rightarrow f(x_1), f(x_2) \dots \to A$.

Т) Дефинициите на Коши и Хайне са еквивалентни.

Доказателство:

1. Коши $\Rightarrow$ Хайне

Нека $A \overset{(K)}{=} \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ $\forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \Rightarrow |A - f(x)| < \varepsilon$

Нека $\forall x_1, x_2 \dots x_n \dots \to x_0$, $x_n \in \mathring{U}(x_0)$, $x_n \neq x_0$

$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta = \delta(\varepsilon) : \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

$\delta > 0$

$\left.\begin{matrix}\exists N_\varepsilon : \forall n > N_\varepsilon : |x_n - x_0| < \delta, x_n \neq x_0 \\ \Updownarrow \\ x_n \in \mathring{U}_\delta(x_0)\end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow |A - f(x_n)| < \varepsilon \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ (по Хайне)

2) Хайне $\Rightarrow$ Коши

Нека $A \overset{(x)}{=} \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \Rightarrow \forall x_1 \dots x_n \dots \to x_0,\ x_n \in \mathring{U}(x_0) \Rightarrow f(x_1), \dots f(x_n) \dots \to A$

Трябва да докажем, че: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) : \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \to |f(x) - A| < \varepsilon$

Допускаме, че $A \overset{(K)}{\neq} \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \Rightarrow \exists \varepsilon_0 > 0\ \forall \delta > 0 : \exists x_\delta \in \mathring{U}_\delta(x_0) \to |f(x_\delta) - A| \geq \varepsilon_0$

$\delta = \frac{1}{n}$ $\Updownarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in \mathring{U}_{1/n}(x_0) : |f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$

Построихме $x_1, x_2 \dots x_n \dots$ $|x_n - x_0| < 1/n$

$x_n \in \mathring{U}(x_0)$; $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$; $\to x_n \to x_0$

$f(x_1) \dots f(x_n) \dots \to A$ $\lightning$

$\Rightarrow$ Коши = Хайне

$\boxed{T}$ Нека $f(x)$ е дефинирана върху $\mathring{U}(x_0)$. lim съществува.

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x'$ и $x'' \in \mathring{U}_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$