26 Интегриране на рационални функции

$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ – полиноми

рационална функция

① Ако $n \geq m$, функцията се нарича неправилна.

② Ако $n < m$, функцията се нарича правилна.

Ако $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ е неправилна, то $R(x)$ може да се представи като

$$P_{n-m}(x) + \frac{P_s(x)}{Q_m(x)}, s < m.$$

$$\int R(x)dx = \int\left(P_{n-m}(x) + \frac{P_s(x)}{Q_m(x)}\right)dx = \int P_{n-m}(x)dx + \int\frac{P_s(x)}{Q_m(x)}dx$$

$$\int P_n(x)dx = \int(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n)dx = \frac{a_0x^{n+1}}{n+1} + \frac{a_1x^n}{n} + \ldots + \frac{a_{n-1}x^2}{2} + a_nx + c$$

$\boxed{T}$ Нека $P_n(x)$ е полином от n-та степен $\Rightarrow$

$\Rightarrow P_n(x) = a_0(x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}\ldots(x-x_k)^{\alpha_k}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}\ldots(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s}$, където

$\alpha_1 + \ldots + \alpha_k + 2(\beta_1 + \ldots + \beta_s) = n$ и $p_j^2 - 4q_j < 0 \rightarrow j \in [1, s]$

$\boxed{T}$ Нека $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ е правилна рационална функция и

$P_n(x) = \alpha_0(x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}\ldots(x-x_k)^{\alpha_k}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}\ldots(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s}$, Тогава

$$R(x) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\alpha_i}\frac{A_i^{(j)}}{(x-x_i)^j} + \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{\beta_i}\frac{M_i^{(j)}x + N_i^{(j)}}{(x^2+p_ix+q_i)^j}$$

*Считаме, че коефициентът пред x^m е 1, ако Q_m е от вида като $P_n(x)$.

$$\frac{x+1}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Mx+N}{x^2+x+1}$$

$$\int R(x)dx = \sum\int\frac{A}{(x-a)^n}dx + \sum\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}dx$$

→ не може да се разложи

$\boxed{D}$ $\frac{A}{(x-a)^n}, \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}$ се наричат елементарни.

! Елементарните дроби не могат да се разложат.

$$I_n=\int\frac{A}{(x-a)^n}dx \longrightarrow A,\ a\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}$$

1) $n=1$

$$I_1=\int\frac{A}{x-a}dx=A\int\frac{1}{x-a}dx=A\ln|x-a|+c$$

2) $n>1$

$$I_n=\int\frac{A}{(x-a)^n}dx=A\int(x-a)^{-n}dx=\frac{A(x-a)^{1-n}}{1-n}+c$$

$$J_n=\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx,\ p^2-4q<0;\ (M,N)\neq(0,0),\ p,q\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}$$

$\boxed{b=N-\frac{pM}{2}}$ $\boxed{a^2=\frac{4q-p^2}{4}>0}$

1) $n=1$ $\boxed{x=t-p/2}$ смяна на Хорнер

$$J_1=\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx \stackrel{\downarrow}{=} \int\frac{Mt+N-\frac{pM}{2}}{t^2-pt+\frac{p^2}{4}+pt-\frac{p^2}{2}+q}d\left(t-\frac{p}{2}\right)=\int\frac{Mt+N-\frac{pM}{2}}{t^2+\frac{4q-p^2}{4}}dt \stackrel{\downarrow}{=}$$

$$=\int\frac{Mt+b}{t^2+a^2}dt=M\int\frac{t}{t^2+a^2}dt+b\int\frac{1}{t^2+a^2}dt=$$

$$=\frac{M}{2}\int\frac{1}{t^2+a^2}d(t^2+a^2)+\frac{b}{a}\int\frac{1}{1+\left(\frac{t}{a}\right)^2}d\left(\frac{t}{a}\right)=$$

$$=\frac{M}{2}\ln(t^2+a^2)+\frac{b}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{a}\right)+c \stackrel{\uparrow}{=} \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{b}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+p}{2a}\right)+c$$

$\boxed{t=x+\frac{p}{2}}$

$\boxed{b=N-\frac{pM}{2}}$ $\boxed{a^2=\frac{4q-p^2}{4}>0}$

2) $n>1$ $\boxed{x=t-\frac{p}{2}}$

$$J_n=\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx \stackrel{\downarrow}{=} \int\frac{M(t-p/2)+N}{\left((t-\frac{p}{2})^2+p(t-\frac{p}{2})+q\right)^n}d\left(t-\frac{p}{2}\right)=\int\frac{Mt+N-\frac{pM}{2}}{\left(t^2+\frac{4q-p^2}{4}\right)^n}dt \stackrel{\downarrow}{=}$$

$$=\frac{M}{2}\int\frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^n}+b\underbrace{\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^n}}_{K_n}=\frac{M(t^2+a^2)^{1-n}}{2(1-n)}+bK_n$$

$$K_n=\int\frac{1}{(t^2+a^2)^n}dt=\frac{1}{a^2}\int\frac{(t^2+a^2)-t^2}{(t^2+a^2)^n}dt=\frac{1}{a^2}\int\frac{1}{(t^2+a^2)^{n-1}}dt-\frac{1}{a^2}\int\frac{t^2}{(t^2+a^2)^n}dt=$$

$$=\frac{K_{n-1}}{a^2}-\frac{1}{a^2}\int t\,d\left(\int\frac{t}{(t^2+a^2)^n}dt\right)=\frac{K_{n-1}}{a^2}-\frac{1}{a^2}\int t\,d\left(\frac{-1}{2(n-1)}\cdot\frac{1}{(t^2+a^2)^{n-1}}\right)=$$

$$=\frac{K_{n-1}}{a^2}+\frac{1}{a^2\cdot 2(n-1)}\int t\,d\frac{1}{(t^2+a^2)^{n-1}}=\frac{K_{n-1}}{a^2}+\frac{1}{2(n-1)a^2}\left(\frac{t}{(t^2+a^2)^{n-1}}-\underbrace{\int\frac{1}{(t^2+a^2)^{n-1}}dt}_{K_{n-1}}\right)=$$

$$=\frac{K_{n-1}}{a^2}+\frac{1}{2(n-1)a^2}\left(\frac{t}{(t^2+a^2)^{n-1}}\right)-\frac{K_{n-1}}{2(n-1)a^2}=$$

$$=\frac{(2(n-1)-1)K_{n-1}}{2(n-1)a^2}+\frac{t}{2(n-1)a^2(t^2+a^2)^{n-1}}=\frac{2n-3}{2(n-1)a^2}K_{n-1}+\frac{t}{2(n-1)a^2(t^2+a^2)^{n-1}}=K_n$$

$$K_1=\int\frac{1}{t^2+a^2}dt=\frac{\operatorname{arctg} t/a}{a}+c$$

$$J_n=\frac{-M}{2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}}+bK_n$$

замествame $t=x+\frac{p}{2}$