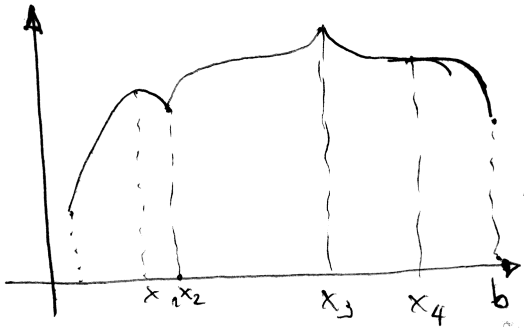
21 | Локален екстремум на функции – необходими и достатъчни условия

D Нека $f(x)$ е дефинирана върху $X\subset\mathbb{R}$ и $x_0\in X$. Казваме, че:

1) x_0 е точка на локален максимум на $f(x)$, ако
$\exists U_\delta(x_0)\subset X : \forall x\in \mathring{U}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x)\le f(x_0)$.

2) x_0 е точка на локален минимум на $f(x)$, ако
$\exists U_\delta(x_0)\subset X : \forall x\in \mathring{U}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x)\ge f(x_0)$.

1.1) строг локален максимум $\rightarrow f(x)<f(x_0)$.
2.1) строг локален минимум $\rightarrow f(x)>f(x_0)$.



! $x_0=a$ – не е екстремум $\rightarrow$ няма околност

x_1, x_2 – локален максимум
x_4, x_3 – локален минимум $\rightarrow$ няма f'

T Нека $f(x)$ е дефинирана върху $X\subset\mathbb{R}$ и $x_0\in X$ е точка на локален екстремум $\Rightarrow$ ако $\exists f'(x_0)$, то $f'(x_0)=0$.

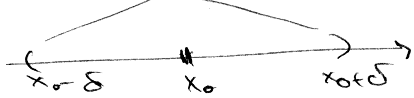
Доказателство:
За определеност – x_0 – точка на локален максимум $\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists (x_0-\delta, x_0+\delta)\subset X : \forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta) \Rightarrow f(x)\le f(x_0)$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\;\frac{\ominus}{\oplus} = \lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\;\frac{\ominus}{\ominus} \Rightarrow f'(x_0)=0.$$

D Точките, в които производните са равни на 0, се наричат критични[redacted].

T Първо достатъчно условие (ДУ)
Нека $f(x)$ е непрекъсната върху $U_\delta(x_0)$ и диференцируема в $\mathring{U}_\delta(x_0)$.
Тогава, ако:

1) $\forall x\in(x_0-\delta,x_0)$ $f'(x)\ge 0$
и $\forall x\in(x_0,x_0+\delta)$ $f'(x)\le 0$
$\Rightarrow x_0$ е точка на (строг) локален максимум



2) $\forall x\in(x_0-\delta,x_0)$ $f'(x)\le 0$
и $\forall x\in(x_0,x_0+\delta)$ $f'(x)\ge 0$
$\Rightarrow x_0$ е точка на (строг) локален минимум

Доказателство:

1) $\forall x \in (x_0-\delta, x_0)$ и разглеждаме $f(x)$ върху $[x, x_0]$

$\Rightarrow$ ① $f(x)$ е непрекъсната върху $[x, x_0]$

② $\exists f'$ поне върху (x, x_0)

$\Rightarrow$ по т-мата на Лагранж $\Rightarrow \exists c \in (x, x_0): f(x_0) - f(x) = f'(c)(x_0 - x) \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x_0) \geq f(x)$ (1)

Нека $x \in (x_0, x_0+\delta)$ и разглеждаме f върху $[x_0, x] \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ① $f(x)$ е непрекъсната върху $[x_0, x]$

② $\exists f'$ поне върху (x_0, x)

$\Rightarrow$ по т-мата на Лагранж $\Rightarrow \exists c \in (x_0, x): f(x) - f(x_0) = f'(c) \cdot (x - x_0) \leq 0$

$\Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$ (2)

От (1) и (2) $\Rightarrow \forall x \in (x_0-\delta, x_0) \cup (x_0, x_0+\delta) \rightarrow f(x) \leq f(x_0) \Rightarrow$

$\Rightarrow x_0$ е точка на локален максимум.

$\boxed{T}$ Второ ДУ

Нека $f(x)$ е дефинирана в $U(x_0)$ и $\exists f''(x_0)$. Ако $f'(x_0)=0$ и $f''(x_0) \neq 0$, то x_0 е точка на строг локален екстремум. При това, ако:

1) $f''(x_0) > 0 \rightarrow x_0$ е локален минимум

2) $f''(x_0) < 0 \rightarrow x_0$ е локален максимум

Доказателство:

1) Нека $f''(x_0) > 0$. Т.к. $f''(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{x - x_0}$

$\Rightarrow \varepsilon = \dfrac{f''(x_0)}{2} > 0 \rightarrow \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in \mathring{U}_{\delta_\varepsilon}(x_0) \Rightarrow \left| \dfrac{f'(x)}{x - x_0} - f''(x_0) \right| < \dfrac{f''(x_0)}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 < \dfrac{f''(x_0)}{2} = f''(x_0) - \dfrac{f''(x_0)}{2} < \dfrac{f'(x)}{x - x_0} \cancel{< f''(x_0) + \dfrac{f''(x_0)}{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall x \in \mathring{U}_{\delta_\varepsilon}(x_0) \rightarrow \dfrac{f'(x)}{x - x_0} > 0$

① Нека $x \in (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow x - x_0 < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$ (1)

② Нека $x \in (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow x - x_0 > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$ (2)

$\Rightarrow$ От (1) и (2) и I-во ДУ $\Rightarrow x_0$ е точка на строг локален минимум