4) Граници на функции. Основни свойства. Лява и дясна граница

D Нека $x_0 \in \mathbb{R}$:

$U(x_0) = (\underbrace{a, b}_{\in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}})$ - отворен интервал, съдържащ x_0 - околност на x_0.

$\mathring{U}(x_0) = U(x_0) \setminus \{x_0\}$ - пробита околност

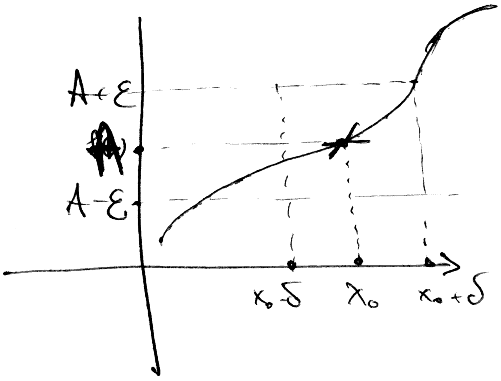
$\mathring{U}_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$

D Нека $f(x)$ е дефинирана поне върху $\mathring{U}(x_0)$. Казваме, че A е граница на $f(x)$ при $x \to x_0$ и записваме $A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, ако за

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in U(x_0), x \neq x_0, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall (A - \varepsilon, A + \varepsilon) \ \exists (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$$



Функциите $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани в $\mathring{U}(x_0)$.

Свойства:

1. Ако $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, то тя е единствена.

Доказателство:

Да допуснем, че $B = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ и $B \neq A$.

$0 < \varepsilon_0 < \frac{B - A}{2} \Rightarrow (A - \varepsilon_0; A + \varepsilon_0) \cap (B - \varepsilon_0, B + \varepsilon_0) = \emptyset$.

$A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \to \varepsilon_0 > 0 \ \exists \delta_1 > 0 : \forall x \neq x_0 \to |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon_0$

$B = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \to \varepsilon_0 > 0 \ \exists \delta_2 > 0 : \forall x \neq x_0 \to |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - B| < \varepsilon_0$

$\delta_0 = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0 \Rightarrow \forall x \neq x_0 : |x - x_0| < \delta_0 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon_0$ и $|f(x) - B| < \varepsilon_0$

$\bar{x} \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \Rightarrow A - \varepsilon_0 < f(\bar{x}) < A + \varepsilon_0 < B - \varepsilon_0 < f(\bar{x}) < B + \varepsilon_0$ ↯

D) Казваме, че $f(x)$ е ограничена върху множеството $X \subset \mathbb{R}$, ако $\exists M>0: \forall x \in X \to |f(x)| \le M$.

② Ако $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, то $\exists (x_0-\delta; x_0+\delta) = \mathring{U}_\delta(x_0)$, така че $f(x)$ е ограничена върху $\mathring{U}_\delta(x_0)$.

Доказателство:

$\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon) : \forall x \in U(x_0),\ |x-x_0|<\delta,\ x \ne x_0 \to |f(x)-A| < \varepsilon$.

Нека $\varepsilon = 1$, $\exists \delta_0 > 0 : \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \to |f(x)-A| < 1 \to \big||f(x)|-|A|\big| \le 1$

$\to |f(x)| \le |A|+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow M \Rightarrow f(x)$ - ограничена

~~D) Нека $f(x)$ е дефинирана поне върху $\mathring{U}(x_0)$ ... Казваме, че $A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, ако $\forall \varepsilon > 0 \; \exists$~~

③ Ако $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ и $A \ne 0 \Rightarrow \exists \mathring{U}_\delta(x_0)$:

1) $f(x) > 0$, ако $A > 0$;
2) $f(x) < 0$, ако $A < 0$.

Доказателство:

1) Нека $A>0$. Т.к. $A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta=\delta(\varepsilon)>0 : \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x)-A| < \varepsilon$

$\varepsilon = \frac{A}{2} > 0$ $\exists \delta > 0 : \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x)-A| < A/2 \Leftrightarrow A - \frac{A}{2} < f(x) < A + \frac{A}{2}$

$\Rightarrow 0 < A/2 < f(x) \Rightarrow f(x) > 0$ за $\forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$

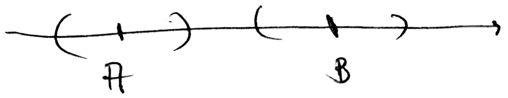
2) $A<0 \Rightarrow \varepsilon = \frac{|A|}{2} \to |f(x)-A| < \frac{|A|}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A - \frac{|A|}{2} < f(x) < A + \frac{|A|}{2} = A - \frac{A}{2} = \frac{A}{2} < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) < 0$

④ Ако $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) < \lim\limits_{x\to x_0} g(x) \Rightarrow \exists\, \mathring{U}_\delta(x_0): \forall x\in \mathring{U}_\delta(x_0) \to f(x) < g(x)$

Доказателство: Нека $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) < \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$. Ако $A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и $B = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, то $A<B$.



$\exists\, \varepsilon_0 > 0.\ (A-\varepsilon_0; A+\varepsilon_0) \cap (B-\varepsilon_0; B+\varepsilon_0) = \varnothing$. Т.к. $A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, за $\varepsilon_0>0$ $\exists\, \delta_1>0: \forall x\in \mathring{U}_{\delta_1}(x_0) \to |f(x)-A| < \varepsilon_0$.

Т.к. $B = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, то за $\varepsilon_0>0$ $\exists\, \delta_2>0: \forall x\in \mathring{U}_{\delta_2}(x_0) \to |g(x)-B| < \varepsilon_0$

$\delta_0 = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$

$$\forall x\in \mathring{U}_{\delta_0}(x_0) \Rightarrow \begin{cases} |f(x)-A| < \varepsilon_0 \\ |g(x)-B| < \varepsilon_0 \end{cases} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} f(x)\in(A-\varepsilon_0; A+\varepsilon_0) \\ g(x)\in(B-\varepsilon_0, B+\varepsilon_0) \end{cases}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A-\varepsilon_0 < f(x) < A+\varepsilon_0 < B-\varepsilon_0 < g(x) < B+\varepsilon_0 \Rightarrow f(x) < g(x) \text{ за } \forall x\in \mathring{U}_{\delta_0}(x_0).$$

⑤ Ако $f(x)\le g(x)$, $x\in \mathring{U}(x_0) \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

Доказателство: Допускаме, че $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$; от Св. 4 $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, \mathring{U}_\delta(x_0): \forall x\in \mathring{U}_\delta(x_0): f(x) > g(x)$ ↯

⑥ Ако $f(x)\le h(x)\le g(x)$, $\forall x\in \mathring{U}(x_0)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$, то $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A$.

Доказателство: Т.к. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$, то

$\forall \varepsilon>0$ $\exists\, \delta_1=\delta_1(\varepsilon)>0: \forall x\in \mathring{U}_{\delta_1}(x_0) \to |f(x)-A| < \varepsilon$

$\exists\, \delta_2=\delta_2(\varepsilon)>0: \forall x\in \mathring{U}_{\delta_2}(x_0) \to |g(x)-A| < \varepsilon$

$\delta_0 = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall x\in \mathring{U}_{\delta_0}(x_0) \Rightarrow |f(x)-A| < \varepsilon$ и $|g(x)-A| < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow A-\varepsilon < f(x) \le h(x) \le g(x) < \varepsilon + A \Rightarrow A-\varepsilon < h(x) < A+\varepsilon$ за $\forall x\in \mathring{U}_{\delta_0}(x_0)$

$\Rightarrow |h(x)-A| < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A$

$\boxed{D}$ Нека $M \subset \mathbb{R}$ и $x_0 \in \mathbb{R}$. Казваме, че x_0 е точка на сгъстяване за множеството M, ако $\forall \delta > 0\ \exists x_\delta \in M \cap \mathring{U}_\delta(x_0)$.

$\boxed{D}$ Точка от множеството, която не е точка на сгъстяване, се нарича изолирана.

$\boxed{D}$ Нека $f(x)$ е дефинирана върху множеството $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$ и $x_0 \in \mathbb{R}$ е точка на сгъстяване на M. Казваме, че A е граница на $f(x)$ при $x \to x_0$ чрез стойности от M, записваме $A = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in M}} f(x)$, ако за $\forall \varepsilon > 0$

$\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \cap M \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$.

$\boxed{D}$ 1) Нека $M = (a, x_0)$ и $f(x)$ е дефинирана върху M.

$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in M}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$ – лява граница.

2) Нека $M = (x_0, b)$ и $f(x)$ е дефинирана върху M.

$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in M}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$ – дясна граница

$\boxed{T}$ Нека $f(x)$ е дефинирана поне върху $\mathring{U}(x_0)$. Границата на $f(x)$ при $x \to x_0$ съществува $\Leftrightarrow \exists f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$ и $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$. При това $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$.

Доказателство:

$\Rightarrow$) Нека $A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) : \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0), |f(x) - A| < \varepsilon$

1) $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \to |f(x) - A| < \varepsilon \Rightarrow \exists f(x_0 - 0) = A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

2) $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \to |f(x) - A| < \varepsilon \Rightarrow \exists f(x_0 + 0) = A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

$\Leftarrow$) Нека $A = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$.

Т.к. $A = f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta_1, x_0) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$ (1)

Т.к. $A = f(x_0 + 0) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0 : \forall x \in (x_0, \delta_2 + x_0) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$ (2)

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \to |f(x) - A| < \varepsilon \\ \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \to |f(x) - A| < \varepsilon \end{array}\right] \Rightarrow \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \to |f(x) - A| < \varepsilon \Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

$\boxed{D}$ Нека $f(x)$ е дефинирана върху $<a,b>$, където $a,b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Казваме, че функцията $f(x)$ е:

1) монотонно растяща (МР) върху $<a,b>$, ако:
$\forall x_1,x_2 \in <a,b> : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$;

2) монотонно намаляваща (МН) върху $<a,b>$, ако:
$\forall x_1,x_2 \in <a,b> : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$;

3) строго монотонно растяща (СМР) върху $<a,b>$, ако:
$\forall x_1,x_2 \in <a,b> : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$;

4) строго монотонно намаляваща (СМН) върху $<a,b>$, ако:
$\forall x_1,x_2 \in <a,b> : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

$\boxed{T}$ Ако функция $f(x)$ е монотонна върху (a,b), $a,b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, тогава за $\forall x_0 \in (a,b)$ $\exists f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$ и:

1) ако $f(x)$ е МР, то $f(x_0-0) \le f(x_0) \le f(x_0+0)$;

2) ако $f(x)$ е МН, то $f(x_0-0) \ge f(x_0) \ge f(x_0+0)$.

Доказателство:

Нека $f(x)$ е МР върху (a,b) и $x_0 \in (a,b)$. Разглеждаме $f(x)$ върху (a,x_0).

Т.к. $f(x)$ е МР върху (a,x_0), то $\forall x \in (a,x_0) \Rightarrow f(x) \le f(x_0)$, т.е. множеството $\{f(x) : x \in (a,x_0)\}$ е ограничено отгоре $\Rightarrow \exists \sup\limits_{x\in(a,x_0)} f(x) = M \le f(x_0)$.

$\Rightarrow$ 1) $\forall x \in (a,x_0) \Rightarrow f(x) \le M$.

2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_\varepsilon \in (a,x_0) : M - \varepsilon < f(x_\varepsilon)$

$\longrightarrow \delta(\varepsilon) = x_0 - x_\varepsilon > 0$.

$\Rightarrow \forall x \in (x_0 - \delta(\varepsilon), x_0) = (x_\varepsilon, x_0) \Rightarrow M - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \le f(x) \le M < M + \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x) - M| < \varepsilon \Rightarrow \exists f(x_0-0) = \lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = M$