10 # Равномерна непрекъснатост

$\boxed{D}$ Нека $M \subset \mathbb{R}$ и $f(x)$ е непрекъсната върху M, т.е. $\forall x \in M$, $f(x)$ е непрекъсната. $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall x' \in M \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) = \delta(x') > 0:$

$\forall x \in M, |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$

$\boxed{D}$ Нека $f(x)$ е дефинирана върху $M \subset \mathbb{R}$. Казваме, че $f(x)$ е равномерно непрекъсната върху M, ако:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: \forall x, x' \in M: |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$

$\boxed{T}$ Ако $f(x)$ е непрекъсната върху $[a,b] \Rightarrow f(x)$ е равномерно непрекъсната върху $[a,b]$.

Доказателство:

Да допуснем, че $f(x)$ не е равномерно непрекъсната върху $[a,b]$

$\Rightarrow \exists \varepsilon_0 > 0: \forall \delta > 0, \quad \exists x'_\delta, x''_\delta \in [a,b]: |x'_\delta - x''_\delta| < \delta: |f(x'_\delta) - f(x''_\delta)| \geq \varepsilon_0$

$\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \delta_n = 1/n, \; x'_n, x''_n \in [a,b]: |x'_n - x''_n| < \frac{1}{n}; |f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon_0.$

$\Rightarrow$ Построихме $\{x'_n\}_{n=1}^\infty$ и $\{x''_n\}_{n=1}^\infty \in [a,b]: |x'_n - x''_n| < 1/n$ и $|f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon_0$

Т.к. $\{x'_n\}_{n=1}^\infty \in [a,b] \Rightarrow \{x'_n\}_{n=1}^\infty$ е ограничена $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ по $\boxed{T}$ Болцано-Вайерщрас $\Rightarrow \exists$ сходяща подредица $\{x'_{n_k}\}_{k=1}^\infty \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0$

$x_0 \in [a,b]$

$$|x'_{n_k} - x''_{n_k}| < 1/n_k \Leftrightarrow \underbrace{x'_{n_k} - \frac{1}{n_k}}_{\downarrow k\to\infty \; x_0} < \underbrace{x''_{n_k}}_{\downarrow x_0} < \underbrace{x'_{n_k} + \frac{1}{n_k}}_{\downarrow k\to\infty \; x_0}$$

$|f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})| \geq \varepsilon_0$

$$\left.\begin{aligned} &\hookrightarrow f(x'_{n_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x_0) \\ f(x) \text{ е непр.} \rightarrow \; &f(x''_{n_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x_0) \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \varepsilon_0 > 0 \quad \exists k_0: \forall k > k_0 \rightarrow |f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})| < \varepsilon_0 \quad ↯$