$x \mid y = \overline{x\,y}, \qquad x \downarrow y = \overline{x \vee y}, \qquad x \to y = \overline{x} \vee y$

Задача 2. (6 т.) Дадено е множеството от двоични функции

$$A = \{f(\tilde{x}^n), g(\tilde{x}^3) = \tilde{1} \downarrow (x_1 \vee (x_1 \oplus x_2) \vee x_3), h(\tilde{x}^n) = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n\}$$

където $f(\tilde{x}^n), n \geq 2$, е двоична функция, такава че $f(x_1, x_2, 0, \ldots, 0) = x_1 \to x_2$

a) Да се изследва функцията $g(\tilde{x}^3)$ за принадлежност към всяко от множествата T_0, T_1, **S**, **M** и **L**;

b) Да се определи за кои стойности на **n≥2** функцията $h(\tilde{x}^n)$ принадлежи на всяко от множествата T_0, T_1, **S**, **M** и **L** и за кои - не принадлежи;

c) Да се докаже, че множеството **A** е пълно за всяко **n≥2.**

Задача 10 (8 т.)

Да се определи за какви стойности на **n≥2** е шеферова двоичната функция

$f(x_1,\ldots,x_n)=1\oplus x_1x_2\oplus x_2x_3\oplus\ldots\oplus x_ix_{i+1}\oplus\ldots\oplus x_{n-1}x_n$.

Задача 4 (общо 10 т.)

Дадено е множеството от двоични функции A={x⊕y, xy⊕z, x⊕y⊕z⊕1, xy∨yz∨zx}.

а) **(2 т.)** Да се представи в табличен вид всяка от функциите от множеството А:

x	y	z	x⊕y	xy⊕z	x⊕y⊕z⊕1	xy∨yz∨zx

б) **(5 т.)** За всяка от функциите от множеството А да се изследва принадлежността й към всяко от множествата T_0, T_1, S, M и L и да се попълни в съответната клетка от таблицата знак "+", ако функцията принадлежи на съответното множество, и знак "–" в противния случай:

Функция	T_0	T_1	S	M	L
x⊕y					
xy⊕z					
x⊕y⊕z⊕1					
xy∨yz∨zx					

в) **(3 т.)** Ако множеството А е пълно, да се намерят всички базиси:

Задача 1. В следната булева функция броят на променливите е означен с n

$$f(\tilde{x}^n) = \overline{x_1 \oplus x_2} \vee x_3 x_4 \ldots x_n, n \geq 3$$

Коя от следните посочени стойности съответства на дължината на Съвършената Дизюнктивна Нормална Форма на тази функция ?

а) $2^{n-1}+1$; б) $2^{n-1}+2$; в) $2^{n-1}-2$; г) $2^n - n + 1$.

Задача 2. В следната булева функция броят на променливите е означен с n. Да се определи за кои стойности на $n \geq 3$ тази функция е Шеферова.

$$f(\tilde{x}^n) = \overline{x_1 x_2} \oplus \overline{x_2 x_3} \oplus \ldots \oplus \overline{x_{n-1} x_n} \oplus \overline{x_n x_1}$$

Задача 2. Дадено е множеството от булеви функции:

$$\Re = \{ f_1(x,y,z) = \tilde{0}\,;\, f_2(x,y,z) = x \oplus y\,;\, f_3(x,y,z) = (x \to y) \uparrow (y \equiv z)\,;$$
$$f_4(x,y,z) = (x \mid (xy)) \to \bar{z}\,;\; f_5(x,y,z) = (xy \vee \bar{z} \vee (\bar{x}z \equiv 1)) \to 1 \}$$

2.а) {10 т.} Попълнете в таблицата вектор-стълба на всяка от горните функции:

x	y	z	$f_1(x,y,z)$	$f_2(x,y,z)$	$f_3(x,y,z)$	$f_4(x,y,z)$	$f_5(x,y,z)$
0	0	0					
0	0	1					
0	1	0					
0	1	1					
1	0	0					
1	0	1					
1	1	0					
1	1	1					

2.б) {5 т.} Попълнете таблицата за принадлежност към съответното множество, като принадлежността означавайте с 1, а непринадлежността – с 0.

	T_0	T_1	S	M	L
$f_1(x,y,z)$					
$f_2(x,y,z)$					
$f_3(x,y,z)$					
$f_4(x,y,z)$					
$f_5(x,y,z)$					

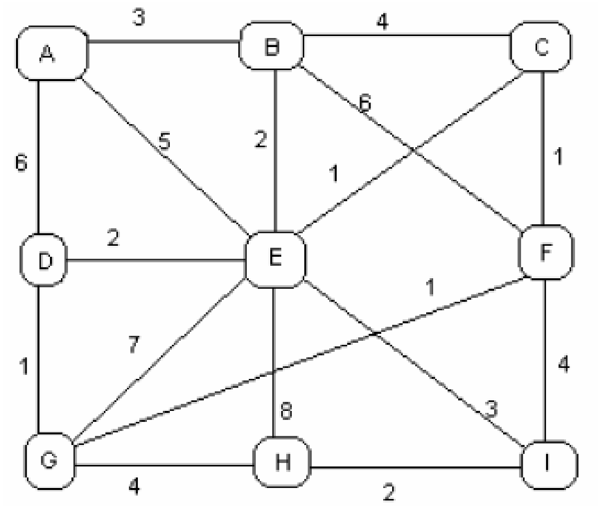
2.в) {2 т.} Напишете функцията на покритие за горната таблица.

2.г) {3 т.} Определете всички бази, ако множеството от функции $\Re$ е пълно.

Задача 2. {4т}   Функцията $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ е симетрична, ако $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n})$ за всяка пермутация $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ на числата от 1 до **n** .

Да се провери пълно ли е множеството $\{f(\widetilde{x}^n), \widetilde{0}, \overline{x}\}$, ако $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ е симетрична функция, съществено зависеща от $n \geq 3$ променливи и ако $f(1110\ldots0) = f(000\ldots0)$.

Задача 5. {6 т} Даден е графа:



Намерете покриващо дърво с корен а чрез обхождане:

- в ширина
- в дълбочина.

Намерете минимално покриващо дърво с корен а чрез алгоритъма:

- на Прим
- на Крускал

Покажете реда на влизане в минималното покриващо дърво на върховете и ребрата съответно.

Задача 8 (6 т.) Намерете броя на двоичните функции на **n** променливи, чиито СвДНФ не съдържат пълна конюнкция, в която броят на променливите с отрицание е равен на броя на променливите без отрицание.

Задача 6. { 5т.} Да се провери базис ли е множеството от двоични функции

$$\{x \oplus y \oplus z \oplus 1,\ xy \vee yz \vee zx\}$$

Задача 7. { 3т.} Посочете за кои стойности на $n \geq 2$ е шеферова двоичната функция

$$f(x_1, \ldots, x_n) = 1 \oplus x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus \ldots \oplus x_{n-1}x_n \oplus x_nx_1$$

а) за четно n   б) за нечетно n   в) за всяко n   г) за никое n

Задача 5 { 5т. }

Да се провери пълно ли е множеството А:

а) $A = ((L \cap M) \setminus T_1) \cup (S \cap T_1)$

б) $A = (M \setminus S) \cup (L \cap S)$

Задача 6 { 2т. }

Да се посочи броят на двоичните функции $f(x_1, x_2, x_3,\dots, x_n)$, такива че $f(x_1, x_2, x_3,\dots, x_n) = f(x_2, x_1, x_3,\dots, x_n)$.

а) 3.2^{n-2} б) $2^{2^{n-1}+2}$ в) $2^{3.2^{n-2}}$ г) $2^{2^{n-2}}$

2) **{3 т.}** Функцията $f(x_1, x_2,\dots, x_n)$ е симетрична, ако $f(x_1, x_2,\dots, x_n) = f(x_{i_1}, x_{i_2},\dots, x_{i_n})$ за всяка пермутация $(i_1, i_2,\dots, i_n)$ на числата от 1 до n. Да се провери пълно ли е множеството $\{f(\tilde{x}^n), g(x,y,z) = x.\overline{y} \vee x.\overline{z} \vee \overline{y}.\overline{z}\}$, ако $f(x_1, x_2,\dots, x_n)$ е симетрична функция, съществено зависеща от $n=2k$ $(k\geq 1)$ променливи.

3) **{2 т.}** Да се намери мощността на единичното множество на функцията $f(\tilde{x}^n) \oplus g(\tilde{x}^n)$, ако са известни дължините l_1 и l_2 на съвършените дизюнктивни нормални форми съответно на функциите $f(\tilde{x}^n) \to g(\tilde{x}^n)$ и $g(\tilde{x}^n) \to f(\tilde{x}^n)$.

5) **{2 т.}** Каква е дължината на съвършената дизюнктивна нормална форма на следната функция: $f(\tilde{x}^n) = (x_1 \vee x_2)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2) \to x_3 \dots x_n, n \geq 3$

a) $2^{n-1} - 2$
b) $2^{n-1} + 2$
c) $2^{n-1} + 1$
d) $2^n - n + 1$

31) **{2 т.}** Да се определи за кои стойности на n• 2 е Шеферова функцията

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 x_2 \dots x_n \oplus (x_1 \to x_2)(x_2 \to x_3) \dots (x_{n-1} \to x_n)(x_n \to x_1)$$

32) **{2 т.}** Да се определи дължината на СвДНФ на функцията

$$f(\tilde{x}^n) = (x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n) \to ((\dots(x_1 \sim x_2) \sim x_3) \sim \dots) \sim x_n)$$

33) **{3 т.}** Проверете пълно ли е в $\boldsymbol{F_2}$ множеството от зададените по-долу булеви функции и ако е пълно, отделете в него всички бази:

$$\{0, x \oplus y, (x \to y) \downarrow (y \to z), (x \mid (xy)) \to \overline{z}\}$$

1) **{2 т.}** Какъв е броят на булевите функции на n променливи, принадлежащи на всяко от множествата:

A. $(T_0 \setminus T_1) \cap L$

a) $n.2^n$ b) 2^{n-1} c) $2^{2^{n-1}}$ d) 3.2^{n+1}

B. $M \cap L \setminus (T_0 \cap T_1)$

a) 0 b) n c) 2 d) $2^n - 2$

2) **{5 т.}** Дадено е следното множество от булеви функции:

$\{ f_1(\tilde{x}^3) = (x_1x_2 + x_1\overline{x}_3 + x_2\overline{x}_3) \to 0\ ;\ f_2(\tilde{x}^3) = x_1 \downarrow ((x_1 \to \overline{x}_2) \vee \overline{x}_3)\ ;$

$f_3(\tilde{x}^3) = x_1x_2 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3\ ;\ f_4(\tilde{x}^3) = (x_1 \vee x_2)x_2 + \overline{x_3(x_3+1)}\ ;\ f_5(\tilde{x}^3) = \overline{(x_1 \vee x_2)} \wedge \overline{x}_3 \}$

A. Попълнете в таблицата вектор-стълба на всяка от горните функции:

x_1	x_2	x_3	$f_1(\tilde{x}^3)$	$f_2(\tilde{x}^3)$	$f_3(\tilde{x}^3)$	$f_4(\tilde{x}^3)$	$f_5(\tilde{x}^3)$

B. Попълнете таблицата, като с 1 означите принадлежност към съответното множество, а с 0 – непринадлежност:

	T_0	T_1	S	M	L
$f_1(\tilde{x}^3)$					
$f_2(\tilde{x}^3)$					
$f_3(\tilde{x}^3)$					
$f_4(\tilde{x}^3)$					
$f_5(\tilde{x}^3)$					

C. Напишете функцията на покритие за горната таблица.

D. Определете всички бази, ако множеството от функции е пълно.