

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРИЯ НА ГРАФИТЕ

работна версия

Минко Марков

18 януари 2016 г.

Съдържание

1	История на теорията на графите	2
2	Обикновени графи	5
2.1	Определение на понятието. Съседство и инцидентност. Степени на върхове. Изтриване на върхове и ребра.	5
2.2	Подграфи. Индуцирани подграфи.	13
2.3	Пътища и цикли.	15
2.4	Свързаност и разстояние в граф. Ексцентрицитет на връх, диаметър и радиус на граф. Срязващи върхове и срязващи ребра. Срезове в графи.	19
2.5	Регулярни графи. Пълни и празни графи. Клики и антиклики. Допълнение на граф.	27
2.6	Върхово покриване и доминиращо множество.	29
2.7	Двуделни графи.	33
2.8	Оцветяване на графи.	38
2.8.1	Оцветяване на върхове	38
2.8.2	Оцветяване на ребра	47
2.9	Изоморфизъм на графи.	49
2.10	Планарност на графи.	50
2.10.1	Лица на планарните вписвания.	53
2.10.2	Характеристика на Euler. Следствия от нея.	57
2.11	Хамилтонови пътища и цикли.	74
2.12	Ойлерови пътища и цикли.	74
2.13	Съчетания в графи.	74
2.14	Дървета.	74
2.15	Интервални графи и k-дървета.	74
2.16	k-свързаност в графи.	74
2.17	Вписване на графи в повърхности от по-висок род.	74
3	Други видове графи	75
3.1	Графи с примки.	75
3.2	Ориентирани графи.	75
3.3	Мултиграфи.	75
3.4	Тегловни графи	75
3.5	Потоци в графи	75
	Библиография	76

Списък на фигурите

1	Карта на Königsberg.	2
2	Кварталите и мостовете на Königsberg.	3
3	Графът, описващ задачата за мостовете на Königsberg.	4
1	Графът G_1 , който ползваме многократно за пример.	6
2	Друга рисунка на G_1	7
3	Графът на хората от Задача 1: само върховете.	9
4	Задача 1: 0 и 8 са семейна двойка.	10
5	Задача 1: 1 и 7 също са семейна двойка.	11
6	Задача 1: целият граф.	11
7	$G_1 - w$	12
8	$G_1 - e_8$	12
9	H' е подграф на G_1	13
10	H'' не е подграф на G_1	14
11	Индукциран подграф.	14
12	Път, който не е прост.	16
13	Прост път.	16
14	Цикъл, който не е прост.	18
15	Прост цикъл.	18
16	Свързани компоненти.	20
17	Разстояние между върхове в граф и в подграф.	22
18	Граф с диаметър 5 и радиус 3.	23
19	Графи-цикли и ексцентрицитетите на върховете им.	24
20	Срязващ връх и срязващо ребро.	24
21	Срез с тегло 5.	26
22	Граф-допълнение.	28
23	Срязващ връх и срязващо ребро.	30
24	Илюстрация на теоремата на Desargues.	32
25	Двуделен граф.	33
26	$K_{4,2}$	33
27	Структура от греди.	34
28	Деформации на структура от греди.	35
29	Недеформируеми структури.	35
30	Структури, за които не е очевидно дали са деформируеми.	36
31	Хоризонтални и вертикали на структура.	36
32	Двуделни графи, съответстващи на структури от греди.	37
33	Административна карта на Обединеното Кралство.	38
34	Граф, съответен на карта.	40
35	Графът на Petersen има хроматично число 3.	43

36	Илюстрация на доказателството на Лема 15.	44
37	Илюстрация на алчен алгоритъм за оцветяване.	46
38	Графът на Petersen има хроматичен индекс 4.	49
39	Граф с хроматичен индекс 3.	49
40	Изоморфни графи.	49
41	Петте платонови тела.	59
42	Алгоритъм, строящ триангулации.	62
43	5-регулярен планарен граф с 12 върха.	64

Списък на допълненията

1	Друго възможно дефиниране на “степен на връх”	8
2	Задачата със здрависванията	9
3	Приложение на срязващи върхове и ребра	25
4	За практическата важност на понятията	29
5	За графа на Petersen	31
6	Недеформируеми структури и двуделни графи	34
7	История на задачата за оцветяването.	38
8	За практическата важност на оцветяването.	41
9	Алчни алгоритми.	46
10	Пример за необходимостта от оцветяване на ребра.	47
11	Характеристиката на Euler и Платоновите тела.	58
12	За индуктивно дефинираните триангулации.	62

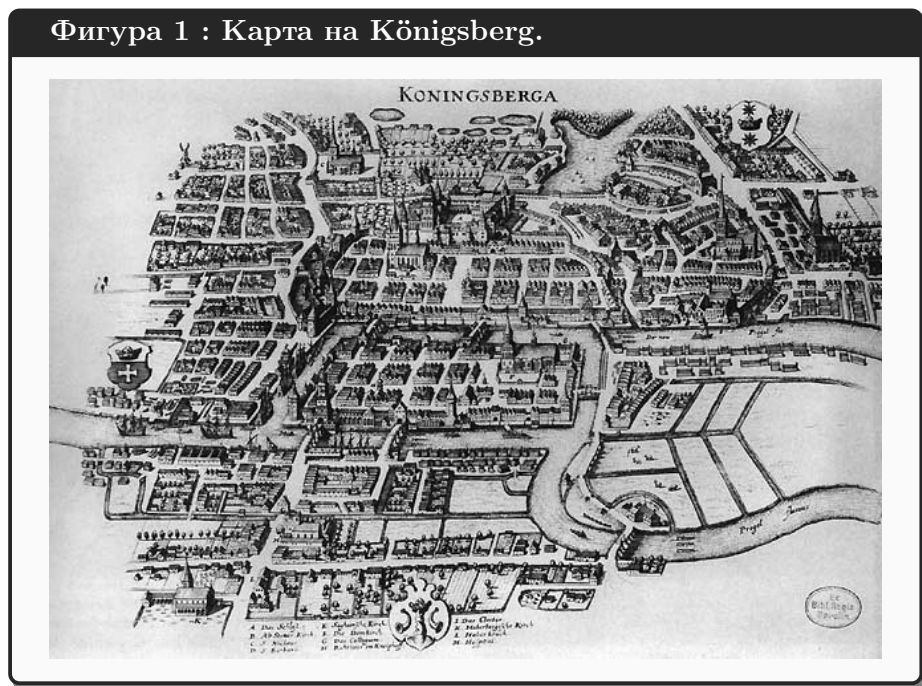
На професор Красимир Манев

Глава 1

История на теорията на графите

Началото на теорията на графите е поставено от гениалния математик Leonard Euler, който през 1735 г. решил *задачата за седемте моста на Königsberg*. Решението било новаторско и използвало математически обект, който днес бихме нарекли *неориентиран мултиграф*. Задачата за седемте моста на Königsberg е следната. В град Königsberg[†] в Източна Прусия тече река Pregel. В града наред реката има два големи застроени острова един до друг, наречени Kneiphof (K) и Lomse (L). Кварталът на северния бряг се казва Altstadt (A), а на южния, Vorstadt (V). Kneiphof е свързан с два моста с Altstadt, с други два моста с Vorstadt и с един мост с Lomse. Lomse освен това е свързан с един мост с Altstadt и с един мост с Vorstadt. Карта на града с реката и двата острова е показана на Фигура 1. Картата е взета от [уикипедия](#).

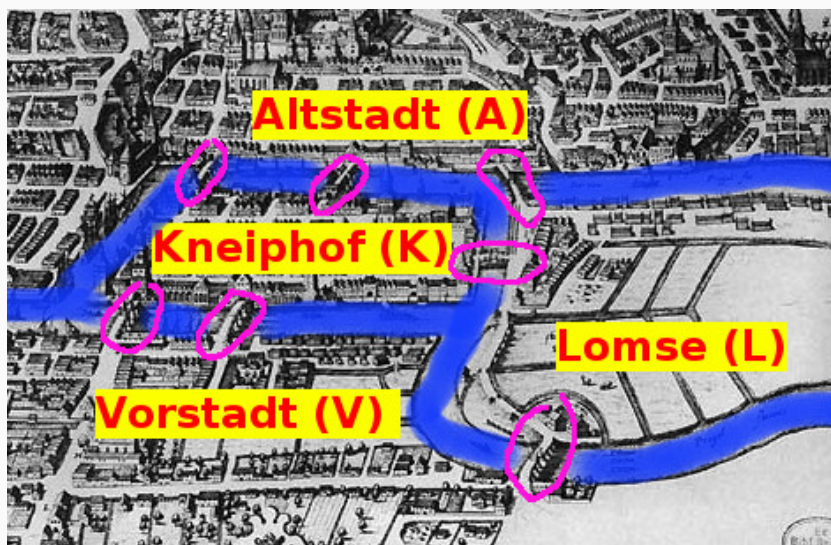
Фигура 1 : Карта на Königsberg.



Фигура 2 показва схема на града с четирите квартала K, L, A и V, реката и седемте моста.

[†]Град Königsberg вече не съществува. Градът е основан през 1255 г. от тевтонските рицари край брега на Балтийско море и до края на Втората Световна Война е главният град на германската територия Източна Прусия. През войната градът е почти изцяло разрушен. Победителите във войната отнемат Източна Прусия от Германия завинаги. Територията около разрушения Königsberg стават съветска. Построеният наново град е наречен Калининград. След разпадането на Съветския Съюз, въпросната територия заедно с Калининград се оказва руски анклав между Полша и Литва на брега на Балтийско море.

Фигура 2 : Карта на Königsberg с означения.



Показани са островите Kneiphof (K) и Lomse (L), кварталите Altstadt (A) и Vorstadt (V), река Pregel в синьо и седемте моста.

Самата задача е:

Да се намери маршрут за разходка в града, която започва в някой от четирите квартала K, L, A или V, минава през всеки от седемте моста точно по един път, и завършва в същия квартал, в който е започнала.

Хората от Königsberg дълго се опитвали да открият такъв маршрут в града и не успявали. Euler, който по това време е работил в Академията в близкия Санкт Петербург, решил задачата при посещение в Königsberg, доказвайки, че такъв маршрут не съществува.

Оригиналното решение на Euler [9][†] не съдържа термина *граф* никъде, нито съдържа рисунка на граф. Но по същество неговото решение се основава на това, което днес наричаме граф. Той използва по една буква за всеки от четирите квартала, по една буква за всеки от седемте моста, и разглежда възможните решения като стрингове от тези букви – нещо, което днес бихме нарекли *цикъл в граф*. Още в самото начало на статията си Euler отбелязва, че тази геометрична задача е коренно различна от нормалните геометрични задачи, които включват някакви големина. Euler говори за нов тип геометрия[‡], въведена от Лайбниц, в която няма големина и пресмятания на големина и която се занимава само с взаимните позиции; Ойлер я нарича “геометрия на позициите”.

Следното популярно решение на задачата е основано на решението на Euler. Ключовото наблюдение е, че за целите на тази задача, формата и размерите на частите от реката, островите, кварталите и мостовете нямат никакво значение. Единственото, което има значение, е измежду четирите обекта K, L, A и V, кой с кой е свързан, и при това с колко моста. Напълно достатъчно е да се мисли за *абстракция* на града, в която всеки от K, L, A и V е просто една точка, като някои двойки точки са свързани с някакви връзки, а други, не. Тези връзки, естествено, отговарят на мостовете. Може да се мисли за схема, в която:

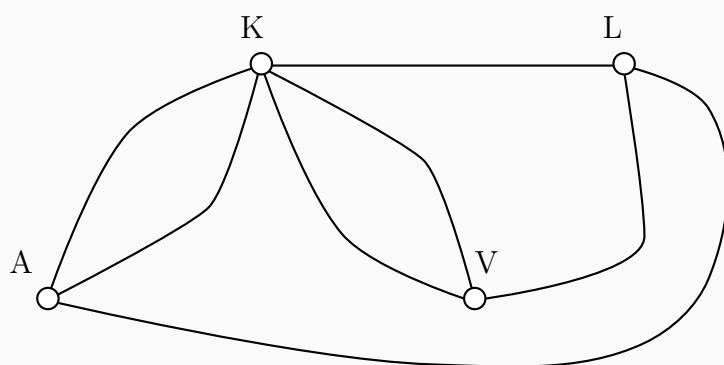
[†]Сканирано копие на оригиналната статия на Euler е свободно достъпно онлайн. Оригиналната статия обаче е на латински, което я прави недостъпна за масовия съвременен читател. Пълен превод на английски на тази статия има, примерно, в книгата на Biggs, Lloyd и Wilson [6].

[‡]Която днес бихме нарекли *топология*.

- четирите точки К, L, A и V са нарисувани в някакво подходящо разположение в равнината, което може да няма нищо общо с това, как са разположени съответните квартали в реалния град, и
- на всеки от седемте моста отговаря една връзка между съответните точки, чиито първообрази свързва въпросният мост, и
- всяка връзка между две точки е отбелязана с линия между тях, като геометрията на тези линии може да няма нищо общо с геометрията на реалните мостове.

Пример за такава схема има на Фигура 3. Забелязваме, че взаимното разположение на точките на Фигура 3 няма нищо общо с разположението на съответните квартали в града. Важното е, че точка К е свързана с точка А посредством две различни връзки-линии, които отговарят на двата моста между Kneiphof и Altstadt, и така нататък.

Фигура 3 : Абстракция на Königsberg.



За да решим задачата, достатъчно е да разгледаме този обект.

Всяка разходка в града, която минава през седемте моста точно веднъж и завършва в квартала, в който е започнала, може да се представи като разходка в обекта, нарисуван на Фигура 3, която минава през всяка линия точно веднъж и завършва в тази точка, в която е започнала. Euler забелязал, че такава разходка има само ако:

- за всяка точка има **четен брой** линии, които излизат от нея. Защо? – защото при такава разходка, на всяко “излизане” от точката трябва да съответства точно едно “влизане” след това, и
- има възможност да идем от всяка точка до всяка друга точка.

В съвременната терминология казваме, че всеки *връх* на графа трябва да има четна *степен* и графът трябва да е свързан, за да има *Ойлеров цикъл*. Задачата за мостовете на Königsberg няма решение, защото има върхове от нечетна степен. Прочее, всички върхове са от нечетна степен, но е достатъчно да има върхове от нечетна степен за да няма решение.

Повече информация за тази задача има в [11].

Глава 2

Обикновени графи

2.1 Определение на понятието. Съседство и инцидентност. Степени на върхове. Изтриване на върхове и ребра.

Определенията в тази секция са близки до определенията в [10].

Подчертаваме, че всички множества, които разглеждаме, са крайни.

Съвременното понятие “граф” е чисто теоретико-множествено. Определение 1 няма нищо геометрично или топологично в себе си. За да разберем какво е “граф”, достатъчно е да знаем какво е “множество”, “подмножество” и “наредена двойка”.

Определение 1: Граф, върхове и ребра

Граф е всяка наредена двойка $G = (V, E)$, където V е множество, чиито елементи се наричат *върхове*, E е множество, чиито елементи се наричат *ребра*, като

$$E \subseteq \{X \subseteq V : |X| = 2\}$$

Обикновено върховете се записват с малки латински букви като u , v и т. н. Имената на ребрата обикновено се записват като e_1 , e_2 и т. н. Тъй като всяко ребро е двueleментно множество от върхове, естествено е да определяме ребрата чрез двата им върха, записвайки примерно $e_1 = \{u, v\}$. Такъв запис обаче **не се използва**, а се използва $e_1 = (u, v)$. Това противоречи на нашата конвенция, че фигурните скоби се използват при липса на наредба, а кръглите, при наличие на наредба. Но ние сме длъжни да се съобразим със световно приетата конвенция за запис на ребра на граф. А тя е, ребрата да се записват с кръгли скоби, независимо от това, дали върховете са наредени или не[†]. И така, записвайки дадено ребро като (u, v) , ние **нямаме предвид** наредена двойка, а имаме предвид множеството с елементи u и v .

Конвенция 1

Когато става дума за графи, буквата n означава броя на върховете, освен ако не е дефинирана иначе, и буквата m означава броя на ребрата, освен ако не е дефинирана иначе. Типичен запис е $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ и $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$.

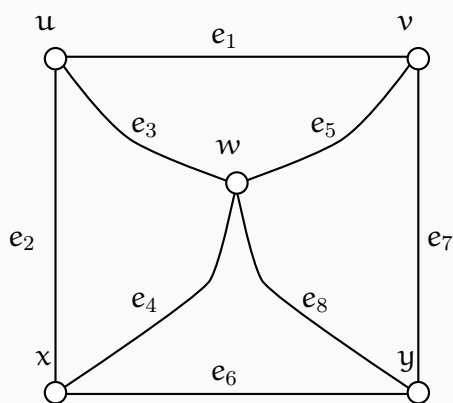
[†]Както ще видим нататък, при ориентираните графи, при които има наредба между върховете, ребрата също се записват с кръгли скоби.

Конвенция 2

Друга полезна конвенция е, ако е дадено името на графа, да кажем G , но имената на множеството от върховете и на множеството от ребрата са неизвестни, да ги означаваме съответно с " $V(G)$ " и " $E(G)$ ".

Пример за граф е $G_1 = (\{u, v, w, x, y, z\}, \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\})$, където $e_1 = (u, v)$, $e_2 = (u, x)$, $e_3 = (u, w)$, $e_4 = (x, w)$, $e_5 = (v, w)$, $e_6 = (x, y)$, $e_7 = (v, y)$, $e_8 = (w, y)$. Както се вижда, възможно е графът да има върхове, които не са в нито едно ребро, като връх z в случая. Такива върхове се наричат *изолирани*. Графът G_1 е нарисуван на Фигура 1. Възможно е ребрата да не бъдат именувани явно и тогава пишем $G_1 = (\{u, v, w, x, y, z\}, \{(u, v), (u, x), (u, w), (x, w), (v, w), (x, y), (v, y), (w, y)\})$.

Фигура 1 : Рисука на графа G_1 .



Възможно е графът да няма ребра, тоест $E = \emptyset$; в такъв случай, всички върхове са изолирани[†].

Конвенция 3

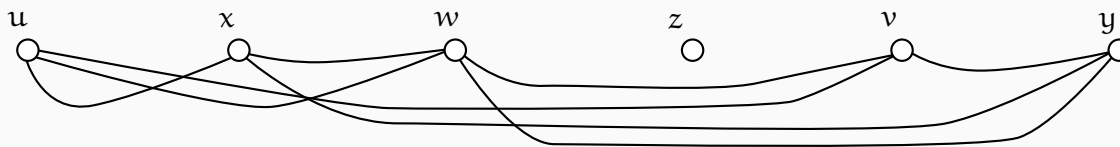
Нищо в Определение 1 не пречи V да бъде празното множество, което влече и $E = \emptyset$. Но ние ще приемем, че $V \neq \emptyset$ винаги.

Много важно е да се разбере, че **рисука на даден граф е принципно различно нещо от графа**. Аналогично, снимка на човек е нещо различно от човека, който е сниман. Графът е теоретико-множествено нещо: наредена двойка от някакви множества. Дадена рисунка на този граф е само средство той да бъде визуализиран така, че да бъде удобно на читателя да си го представи. Един граф може да бъде нарисуван по безброй начини, но всички тези рисунки си остават рисунки на един и същи граф. Дори да формализираме понятието "рисука" и да говорим за геометричен обект, състоящ се от точки и криви в равнината, този геометричен обект би бил принципно различно нещо от съответния граф – геометричният обект е сложен, неговите точки имат някакви координати и неговите криви имат някакви уравнения, докато при графа за координати на точките и за уравнения на кривите не става дума. Можем да кажем, че на един граф съответстват безброй много геометрични обекти в равнината,

[†]Вижте определението на "празен граф" на стр. 27

като графът се явява тяхна **абстракция**. Примерно, друга възможна рисунка на графа от Фигура 1 е показана на Фигура 2[†]. Имената на ребрата са изпуснати на фигурата.

Фигура 2 : Друга рисунка на графа G_1 от Фигура 1.



Определение 2

Нека $G = (V, E)$ е граф. За всеки два върха u и v , такива че $(u, v) \in E$ казваме, че u и v са *съседни*. За всеки две ребра e_1 и e_2 , такива че $e_1 \cap e_2 \neq \emptyset$ казваме, че e_1 и e_2 са *инцидентни*. За всеки връх u и всяко ребро e , такова че $u \in e$ казваме, че *реброто е инцидентно с връх u* . Ако $e \in E$ и $e = (u, v)$, то казваме, че u и v са *краищата на e* .

Като пример да разгледаме графа G_1 на Фигура 1. Върховете u и v са съседни, u и y не са съседни, z не е съсед на никой връх, u и e_1 са инцидентни, u и e_7 не са инцидентни, краищата на e_7 са v и y , и така нататък.

Съседството определя релация $R_G \subseteq V \times V$, такава че $\forall u \in V: uRv \leftrightarrow u$ и v са съседни. Ще наричаме тази релация, *релацията на съседство върху G* . Очевидно, R_G е антирефлексивна[‡] (защото никой връх не е съсед на себе си), симетрична и не е транзитивна. Аналогично, инцидентността между ребрата определя релация със същите свойства.

Определение 3: Множества $N(u)$, $N[u]$ и $I(e)$.

Нека $G = (V, E)$ е граф. За всеки връх $u \in V$, $N(u) \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V \mid u \text{ и } v \text{ са съседни}\}$, $N[u] \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V \mid u \text{ и } v \text{ са съседни}\} \cup \{u\}$ и $I(u) \stackrel{\text{def}}{=} \{e \in E \mid e \text{ е инцидентно с } u\}$.

Като пример да разгледаме графа G_1 на Фигура 1. $N(u) = \{v, w, x\}$, $N(w) = \{u, v, x, y\}$, $N(z) = \emptyset$, $N[w] = \{u, v, w, x, y\}$, $N[z] = \{z\}$, $I(y) = \{e_6, e_7, e_8\}$, $I(z) = \emptyset$, и така нататък.

Определение 4: Степен на връх.

Нека $G = (V, E)$ е граф. За всеки връх $u \in V$, *степената на u* е $|I(u)|$.

Нотация 1: $d(u)$ и $\Delta(u)$.

Нека $G = (V, E)$ е граф. С $d(u)$ бележим степента на u , за всеки връх $u \in V$. С $\Delta(G)$ бележим максималната степен на връх в G .

[†]На Фигура 2 някои криви, които представляват ребра, се пресичат. Това не означава, че в точките на пресичане има върхове. Както ще видим нататък, не винаги е възможно да нарисуваме граф в равнината по такъв начин, че кривите, които отговарят на ребрата, да не се пресичат във вътрешни точки.

[‡]Както ще видим нататък, ако позволим в графа да има така наречените *примки*, които са ребра, всяко от които има за два края един и същи връх, релацията не е непременно антирефлексивна, защото тогава може връх да е съсед на себе си.

Като пример да разгледаме графа G_1 на Фигура 1. По отношение на него, $d(u) = d(v) = d(x) = d(y) = 3$, $d(w) = 5$ и $d(z) = 0$.

Допълнение 1: Друго възможно дефиниране на “степен на връх”.

На пръв поглед, възможно е да дефинираме “степен на връх” и така: степента на u е броят на съседите на u , тоест $d(u) = |N(u)|$. Ако става дума за обикновени графи, каквито разглеждаме в момента, това определение е еквивалентно на Определение 4. Но, както ще видим нататък, когато разглеждаме неориентирани мултиграфи, Определение 4 се пренася директно върху неориентирани мултиграфи, стига те да нямат примки. Да разгледаме пак мултиграфа на Фигура 3, който се появи в историческата справка. Ако приложим Определение 4 директно, ще получим, че връх K има степен 5, защото има 5 ребра, инцидентни с него. От друга страна, ако дефинираме степента на връх като броят на съседите му, би трябвало K да има степен 3. От изложението в глава 3.3 става ясно, че има смисъл степента на K да е 5, а не 3.

Лема 1

За всеки граф $G = (V, E)$ е изпълнено:

$$\sum_{u \in V} d(u) = 2m$$

Доказателство: Сумата в лявата страна на равенството брои всяко ребро точно два пъти. $\square$

Следствие 1

За всеки граф $G = (V, E)$, броят на върховете от нечетна степен е четно число.

Доказателство: Припомняме си, че $\sum_{u \in V} d(u) = 2m$. Очевидно V се разбива на V_e , върховете от четна степен, и V_o , върховете от нечетна степен. Тогава $\sum_{u \in V} d(u) = \sum_{u \in V_e} d(u) + \sum_{u \in V_o} d(u)$. Очевидно $\sum_{u \in V_e} d(u) + \sum_{u \in V_o} d(u) = 2m$. Тъй като $\sum_{u \in V_e} d(u)$ винаги е четно число, то $\sum_{u \in V_o} d(u)$ също така винаги е четно число, понеже $\sum_{u \in V_e} d(u)$ и $\sum_{u \in V_o} d(u)$ се сумират до четно число, а именно $2m$.

Щом $\sum_{u \in V_o} d(u)$ е четно число, задължително е вярно, че $|V_o|$ е четно число. $\square$

Определение 5: Редица от степените.

Нека $G = (V, E)$ е граф. *Редицата от степените на G* е редицата от числата-степени на върхове в G , подредени в намаляващ ред.

Примерно, редицата от степените на графа G_1 от Фигура 1 е 0, 3, 3, 3, 5.

Следната лема е известна като “the hand-shaking lemma”. Неформално, тя казва, че в произволна група хора които са се здрависали по произволен начин помежду си, има поне двама души, които са се здрависали един и същи брой пъти.

Лема 2: The hand-shaking lemma.

Нека $G = (V, E)$ е граф с поне два върха. Съществуват поне два различни върха $u, v \in V$, такива че $d(u) = d(v)$.

Доказателство: Твърдението е еквивалентно на твърдението, че в редицата от степените има поне едно повтаряне на елементи. За всеки връх u , възможните стойности на $d(u)$ са от 0 до $n - 1$, тоест $d(u) \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$. Това са n различни стойности. Със следните съображения ограничаваме възможните стойности до само $n - 1$.

Да допуснем, че графът има изолиран връх. Това означава, че редицата от степените започва с 0. Лесно се вижда, че тогава няма връх от степен $n - 1$ —ако имаше връх от степен $n - 1$, той трябваше да е съсед на всички останали върхове, включително и на върха от степен 0, което противоречи на факта, че връх от степен 0 няма съсед. Показахме, че няма връх от степен $n - 1$. Тогава, за всеки връх u , $d(u) \in \{0, 1, \dots, n - 2\}$. Но това са само $n - 1$ различни стойности. А върховете са n . Съгласно принципа на Дирихле, трябва да има поне два върха u и v , такива че $d(u) = d(v)$.

Сега да допуснем, че няма изолирани върхове. Тогава за всеки връх u , $d(u) \in \{1, 2, \dots, n - 2\}$. Но това са само $n - 1$ различни стойности. А върховете са n . Съгласно принципа на Дирихле, трябва да има поне два върха u и v , такива че $d(u) = d(v)$. $\square$

Допълнение 2: Задачата със здрависванията

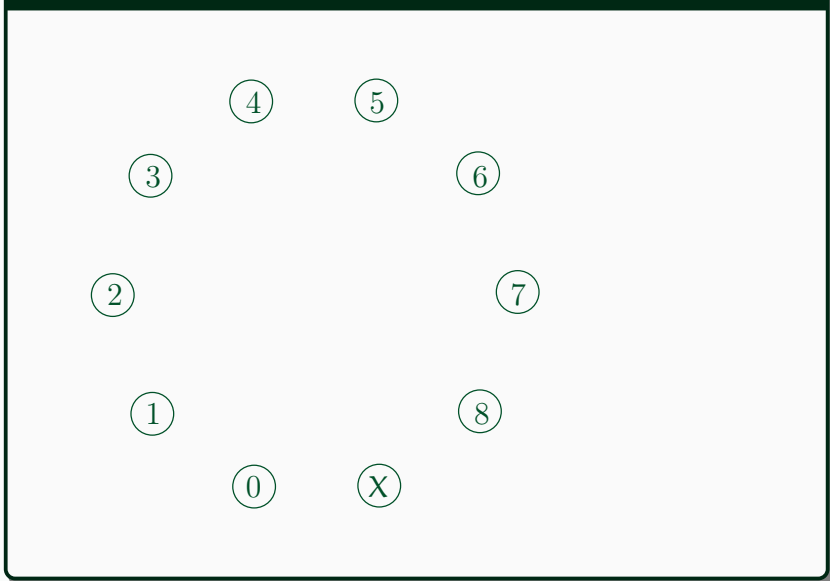
Задача 1

Семейство Стефанови е поканило четири семейства на гости. След пристигането си, някои от гостите се здрависват с други гости, някои, не. Никой не се здрависва със своя съпруг или съпруга, не се здрависва повече от веднъж с един и същи човек, и естествено не се здрависва със себе си. Когато всички гости са дошли и са настанени, г-н Стефанов пита всеки от останалите хора (това включва и неговата съпруга), с колко души се е здрависала или здрависал. Той получава само различни отговори. Пита се, в колко здрависвания е участвал самият г-н Стефанов?

Тази задача е от книгата на Michalewicz и Fogel [14, стр. 26], като е предложена на авторите от Peter Ross от университета на Edinburgh.

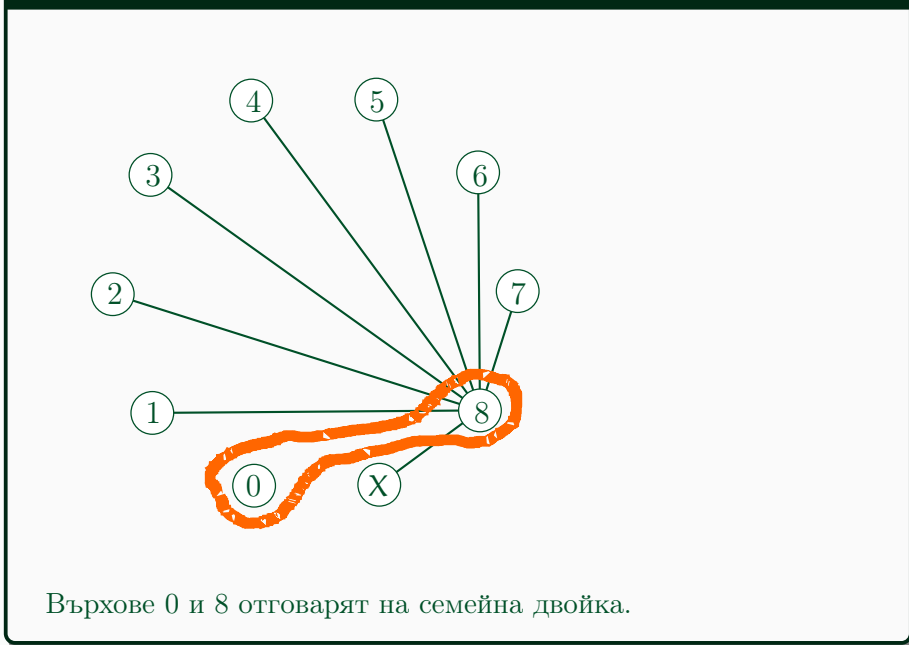
Решение: Става дума за пет семейства общо, което означава 10 човека. Ще моделираме задачата с граф. Върховете са десетте човека, а ребро между два върха се поставя тогава и само тогава, когато съответните хора са се здрависали. Казано е, че г-н Стефанов е получил само различни отговори. Не е казано експлицитно, но се подразбира, че г-н Стефанов е питал (и получил отговори от) 9 човека. Очевидно всеки човек може да участва в най-малко 0 и най-много 8 ръкостискания, понеже не може да се здрависва със себе си и със съпругата си или съпруга си. Това са 9 различни стойности. Тъй като г-н Стефанов е чул 9 различни числа от 9 човека, то той е чул именно числата $0, 1, \dots, 8$. Забележете, че редицата $(0, 1, \dots, 8)$ не е редицата от степените на графа, защото това са само степените на върховете на другите хора—не знаем самият г-н Стефанов в колко здрависвания е участвал, затова и степента на неговия връх засега не участва. Да означим върха, съответстващ на г-н Стефанов, с X , а върховете, съответстващи на останалите хора, със съответните числа, които те са казали на г-н Стефанов. Да си представим само върховете на графа без ребрата (вж. Фигура 3).

Фигура 3 : Графът на хората: само върховете.



Да разсъждаваме така. Връх 8 не може да е съсед на връх 0, следователно връх 8 трябва да е съсед на върхове 1, ..., 7, както и на връх X; ако не е съсед на тези върхове, няма как да е от степен осем. Следователно, ребрата, показани на Фигура 4, са в графа. Нещо повече—заключаваме, че хората, съответстващи на върхове 8 и 0, са съпружеска двойка, понеже няма кой друг да е съпруг или съпруга на 8, освен 0 (помним, че съпружеските двойки не се ръкуват помежду си, а 8 се е ръкувал или ръкувала с всички останали).

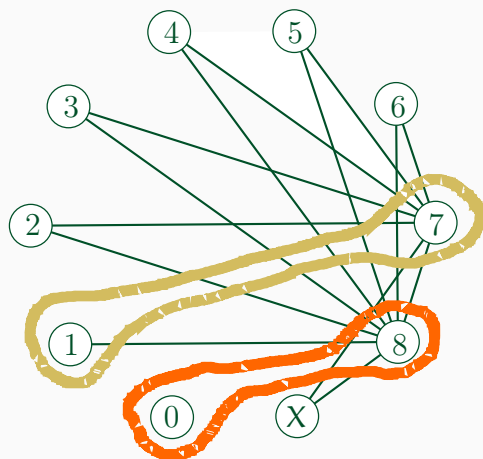
Фигура 4 : Тези ребра със сигурност са в графа.



Аналогично, връх 7 не може да е съсед на връх 0, защото връх 0 няма съседни, и не може да е съсед на връх 1, защото единственият съсед на връх е връх 8. Следователно, връх 7 трябва да е съсед—освен на 8—на върхове 2, ..., 6, както и на връх X; ако не е съсед на тези върхове, няма как да е от степен седем. Следователно, ребрата, показани

на Фигура 5, също са в графа. Нещо повече—хората, отговарящи на върхове 1 и 7, също са семейна двойка, защото няма кой друг да е съпруг или съпруга на 7, освен 1 (вече установихме, че 0 е в съпружеска двойка с 8).

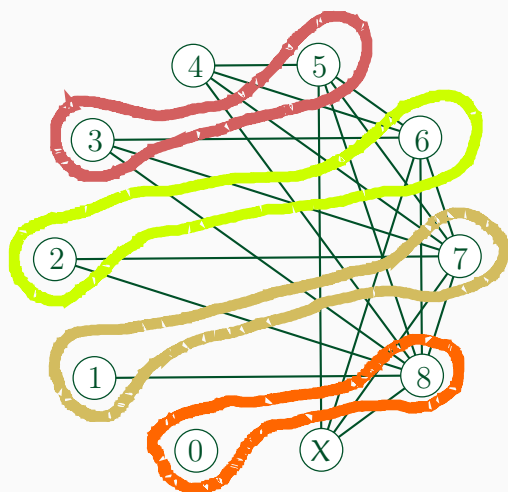
Фигура 5 : Тези ребра също със сигурност са в графа.



Върхове 1 и 7 отговарят на друга семейна двойка.

Ако продължим да разсъждаваме така, ще заключим, че 6 е съсед—освен на 8 и 7—на върхове 3, ..., 6, както и на връх X; и че 6 и 2 са съпружеска двойка. Също така, 5 е съсед—освен на 8, 7 и 6—на върхове 4, ..., 6, както и на връх X; и че 5 и 3 са съпружеска двойка. От разсъжденията дотук заключаваме, че графът съдържа поне ребрата, показани на Фигура 6.

Фигура 6 : Графът на хората. Оказва се, че това са всички ребра.



Разсъждавайки за върхове 8, 7, 6 и 5, заключаваме, че изобразените ребра са в графа. Четирите семейните двойки, които сме установили, са оградени.

Но графът не може да съдържа други ребра—за всеки връх u освен X вече установихме точно кои са ребрата, инцидентни с u , така че е невъзможно да има други ребра, защото освен X те трябва да имат още един край. И така, графът на ръкостисканията е точно графът, показан на Фигура 6. Петата семейна двойка може да бъде единствено X и връх 4.

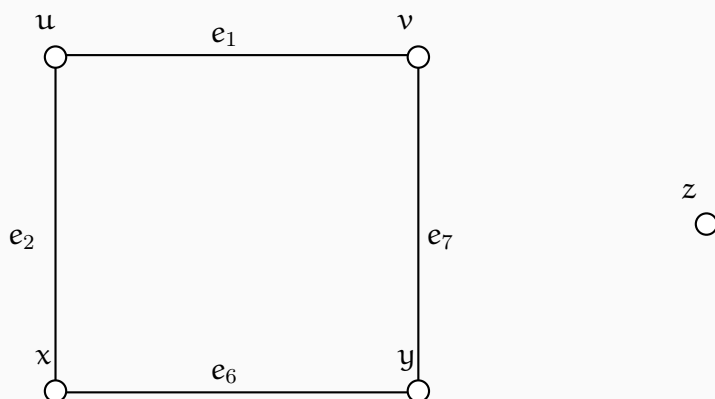
И така, г-н Стефанов се е здрависал точно 4 пъти, и неговата съпруга е четворката. $\square$

Нека $G = (V, E)$ е граф. Нека u е връх в него. Да *изтрием* u от G означава да преобразуваме G в G' , където:

$$G' = (V \setminus \{u\}, E \setminus J(u))$$

Накратко пишем $G' = G - u^\dagger$. Като пример: ако изтрием връх w от графа G_1 на Фигура 1, ще получим графа на Фигура 7.

Фигура 7 : Графът $G_1 - w$, където G_1 е графът от Фигура 1.

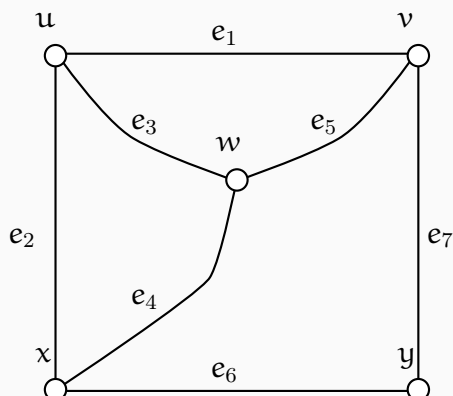


Нека $G = (V, E)$ е граф. Нека $e = (x, y)$ е ребро в него. Да *изтрием* e от G означава да преобразуваме G в

$$G' = (V, E \setminus \{e\})$$

Накратко пишем $G' = G - e$. Забележете, че при изтриване на ребро, неговите краища си остават в графа. Като пример: ако изтрием реброто e_8 от графа G_1 на Фигура 1, ще получим графа на Фигура 8.

[†]Подчертаваме, че ако u “изчезне” от графа, то задължително ребрата, инцидентни с u , също трябва да “изчезнат”. Недопустимо е да остане ребро, единият край на който не е “стъпил” върху връх u и “виси”.

Фигура 8 : Графът $G_1 - e_8$, където G_1 е графът от Фигура 1.

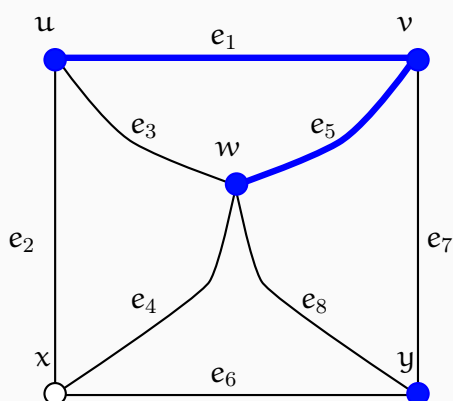
2.2 Подграфи. Индуцирани подграфи.

Определение 6: Подграф

Нека $G = (V, E)$ е граф. *Подграф* на G е всеки граф $G' = (V', E')$, такъв че $V' \subseteq V$ и $E' \subseteq E$.

Подчертаваме, че за да бъде G' подграф на G , **не е достатъчно** да бъде изпълнено $V' \subseteq V$ и $E' \subseteq E$. Освен това трябва и всяко ребро в E' да има за краища върхове, които са във V' —това прави G' граф.

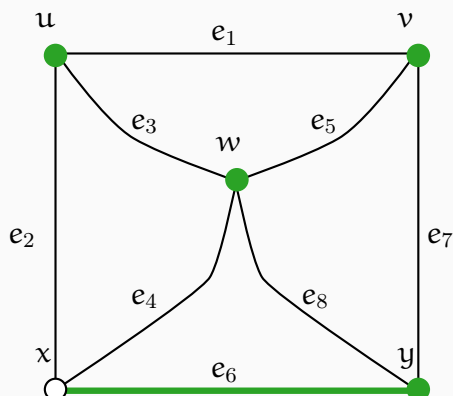
Като пример, да разгледаме графа G_1 на Фигура 1. Нека H' е наредената двойка $(\{u, v, w, y, z\}, \{e_1, e_5\})$. Вярно е, че H' е подграф на G_1 —вижте Фигура 9.

Фигура 9 : $H' = (\{u, v, w, y, z\}, \{e_1, e_5\})$, означен в синьо, е подграф на G_1 от Фигура 1.

Нека сега H'' е наредената двойка $(\{u, v, w, y, z\}, \{e_6\})$. Забелязваме, че H'' не е подграф на G_1 от Фигура 1, понеже единият край на реброто e_6 , а именно връх x , не е в множеството $\{u, v, w, y, z\}$; с други думи, H'' изобщо не е граф. Да подчертаем отново: **в граф не може**

да има “хвърчащи” ребра, които не са “стъпили” с двата си края върху върхове от този граф. Фигура 10 илюстрира не-графа H'' .

Фигура 10 : $H'' = (\{u, v, w, y, z\}, \{e_6\})$, означен в зелено, не е подграф на G_1 от Фигура 1. H'' щеше да е подграф, ако и връх x беше негов връх.



Определение 7: Индуциран подграф

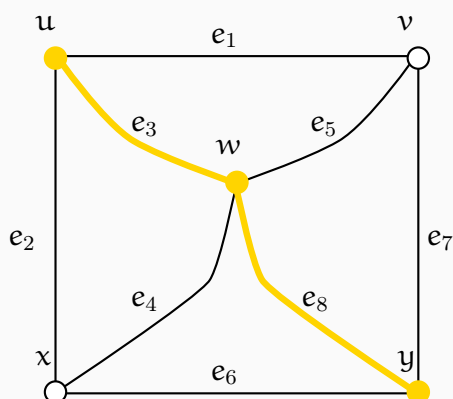
Нека $G = (V, E)$ е граф и $U \subseteq V$. Подграфът на G , индуциран от U , е графът $G' = (U, E')$, където $E' = \{(u, v) \in E \mid u \in U \wedge v \in U\}$.

С други думи, при дадено подмножество от върхове U , индуцираният подграф е графът, чието множество върхове е U и чието множество ребра са точно тези ребра на G , на които и двата края са в U . “Индуциран” означава “доведен”[†] и, наистина, индуцираният подграф е “доведен” от избора на U , в смисъл че ребрата на индуцирания подграф са еднозначно определени от върховете на U .

Нека пак разгледаме графа G_1 от Фигура 1. Нека изберем едно подмножество от върхове, да кажем $\{u, w, y\}$. Подграфът на G_1 , индуциран от $\{u, w, y\}$, е $(\{u, w, y\}, \{e_1, e_8\})$. Фигура 11 илюстрира този индуциран подграф.

[†]На латински “duco” означава “водя”.

Фигура 11 : Графът G_1 от Фигура 1 и неговият подграф, индуциран от $\{u, w, y\}$, оцветен в оранжево.



2.3 Пътища и цикли.

Неформално казано, нека си представим, че е даден граф и някакво същество живее в графа и по-точно във върховете на графа, но може да ползва ребрата за придвижване. Бивайки в кой да е връх, то може да се придвижи до, и само до, произволен негов съсед. Нека това същество тръгнало от някакъв връх и стигнало до друг връх, или се е върнало в началния връх, при това минавайки през някакви междинни върхове. “Път в граф” е описание на придвижването на това същество из графа.

Определение 8: Път.

Нека $G = (V, E)$ е граф. *Път* в G наричаме всяка алтернираща редица от върхове и ребра, за някое $t \geq 0$:

$$p = (u_{i_0}, e_{k_0}, u_{i_1}, e_{k_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_{t-1}}, e_{k_{t-1}}, u_{i_t})$$

където $u_{i_p} \in V$ за $0 \leq p \leq t$, $e_{k_p} \in E$ за $0 \leq p \leq t-1$, и освен това е изпълнено $e_{k_p} = (u_{i_p}, u_{i_{p+1}})$ за $0 \leq p \leq t-1$. Върховете u_{i_0} и u_{i_t} се наричат *краищата на пътя*. Останалите върхове са *вътрешните върхове на пътя*.

Ако всички елементи на пътя—върхове и ребра—са уникални, казваме, че p е *прост път*. *Дължината* на пътя е броят на ребрата в него. Ще бележим дължината на пътя с $|p|$. В случая, $|p| = t$.

Забелязваме, че определението допуска път без нито едно ребро, така че само един връх е тривиален път с дължина нула. Път без върхове не може да има съгласно това определение. Също така забелязваме, че пътищата без ограничения са безброй много в общия случай—тоест, ако графът има поне едно ребро—заради възможността да се “връщаме” по ребра назад, във върхове, в които вече “сме били”. От друга страна, простите пътища са само краен брой, щом графът е краен.

На английски традиционно се използва термините *path* за това, което ние сега нарекохме “път”, и *simple path* съответно за “прост път”. От известно време в англоезичната литература започва да се налага друга конвенция за именуване: *walk* е алтернираща редица като

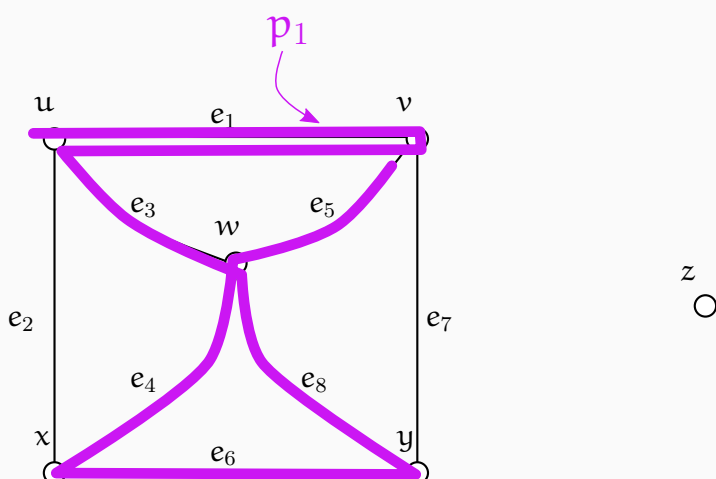
дефинираната горе, без други ограничения, *trail* не допуска повтаряне на ребра, но допуска повтаряне на върхове, а само *path* не допуска нито повтаряне на ребра, нито на върхове. Тъй като на български не е прието да се прави разграничение между тези три възможности с три различни термина, ние ще си останем с “път” и “прост път”.

Нека пак разгледаме графа G_1 от Фигура 1. Един възможен път в него е

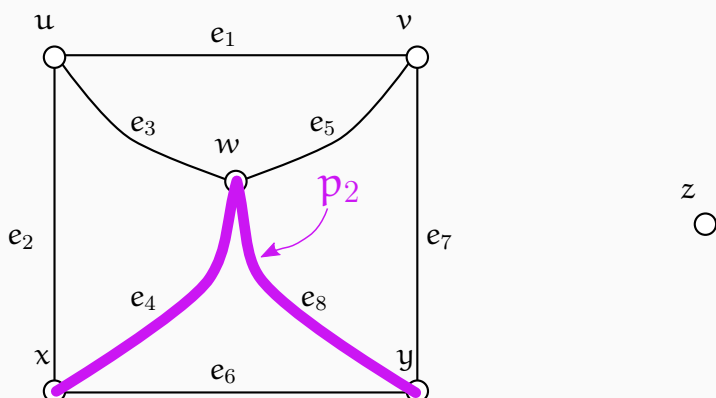
$$p_1 = (u, e_1, v, e_1, u, e_3, w, e_8, y, e_6, x, e_4, w, e_5, v)$$

Фигура 12 илюстрира p_1 . Забележете, че p_1 не е прост път. Примери за прост път са $p_2 = (x, e_4, w, e_8, y)$ и $p_3 = (z)$, като p_2 е показан на Фигура 13.

Фигура 12 : Път p_1 в графа G_1 от Фигура 1.



Фигура 13 : Прост път p_2 в графа G_1 от Фигура 1.



Когато описваме път, допустимо е да изпускаме имената на върховете и кръглите скоби в краищата. Примерно, може да запишем $p_1 = u, v, u, w, y, x, w, v$, $p_2 = x, w, y$ и $p_3 = z$. Този запис е недвусмислен, защото между два върха не може да има повече от едно ребро и е напълно ясно кои са изпуснатите имена на ребра. Но дори да използваме този икономичен запис, помним, че път е алтернираща редица от върхове и ребра, а не редица от върхове.

Конвенция 4

Простите пътища, в които няма повтаряне на елементи, се ползват по-често от другия вид (който има повтаряне на елементи). Затова, отсега нататък, като кажем “път”, разбираме “прост път”. Ако имаме предвид път с повтаряне на елементи, трябва изрично да споменем, че не е прост.

Заслужава си да разсъждаваме над следното. Понятието “път” се използва в теорията на графите в два смисъла, които имат нещо общо, но все пак са различни. От една страна, съгласно Определение 8, “път” е редица от върхове и ребра с определени свойства. От друга страна, често понятието “път” означава подграф на G със своите върхове и ребра. Прочее, Фигура 13 показва именно това: подграф на G_1 . За да осмислим разликата, да разгледаме следната редица от върхове и ребра в G_1 : $p_4 = (u, e_8, w, e_4, x)$. Задаваме си въпроса, дали p_4 е същият обект като p_2 , или не. Ако ги гледаме като редици от върхове и ребра, както определението изисква, те са различни обекти (взаимно инверсни пермутации). Ако ги гледаме като подграфи на G_1 , както често става на практика, те са един и същи обект (подграф). Отговорът е, че терминът “път” означава както редица от върхове и ребра, така и подграф, като второто значение се ползва по-често на практика, а от контекста трябва да е ясно кое значение имаме предвид. Забележете, че един и същи подграф-път има две различни описания-редици от върхове и ребра (всяко от които е инверсната пермутация на другото). За конкретния пример, подграфът на G_1 , отбелязан на Фигура 13 в розово, има две различни описания, а именно p_2 и p_4 .

Конвенция 5

Ако p е път и не сме дали имена на множествата от върховете и ребрата му, то с $V(p)$ означаваме множеството от неговите върхове и с $E(p)$ означаваме множеството от неговите ребра.

Определение 9: Слепване на пътища.

Нека $G = (V, E)$ е граф. Нека са в G има два пътя p_1 и p_2 , такива че:

$$p_1 = (a, e_{k_0}, u_{i_1}, e_{k_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_{t-1}}, e_{k_{t-1}}, b)$$

$$p_2 = (b, e_{q_0}, u_{r_1}, e_{q_1}, u_{r_2}, \dots, u_{r_{s-1}}, e_{q_{s-1}}, c)$$

и $V(p_1) \cap V(p_2) = \{b\}$. Слепването на p_1 и p_2 е пътът

$$p_3 = (a, e_{k_0}, u_{i_1}, e_{k_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_{t-1}}, e_{k_{t-1}}, b, e_{q_0}, u_{r_1}, e_{q_1}, u_{r_2}, \dots, u_{r_{s-1}}, e_{q_{s-1}}, c)$$

Използваме кратката нотация $p_1 \oplus p_2$ за резултата от слепването, тоест $p_3 = p_1 \oplus p_2$.

Ако p_1 и p_2 имат общи върхове освен връх b , използваме нотацията $p_1 \oplus_b p_2$, за да е ясно, че p_1 и p_2 се “слепват” именно в b , а не в друг връх.

Очевидно $|p_1 \oplus p_2| = |p_1| + |p_2|$. Като пример за слепване, да разгледаме пак Фигура 13. Вярно е, че $p_2 = (x, e_4, w) \oplus (w, e_8, y)$.

И накрая, *подпът* на даден път p ще наричаме всяка подредица на p , която отговаря на изискванията за път, тоест е алтернираща редица от върхове и ребра, започваща и завършваща на връх. Подчертаваме, че подредицата е непрекъсната. Примерно, ако $p = (u, e_1, v, e_2, w, e_3, x, e_4, y)$ е път, то подпътища са, примерно, (u) , (u, e_1, v, e_2, w) и (v, e_2, w) , но (u, e_2, w) не е подпът и (e_1, v, e_2, w) не е подпът.

Определение 10: Цикъл.

Нека $G = (V, E)$ е граф и p е път в него, където:

$$p = (u_{i_0}, e_{k_0}, u_{i_1}, e_{k_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_{t-1}}, e_{k_{t-1}}, u_{i_t})$$

Казваме, че p е *цикъл*, ако $u_{i_0} = u_{i_t}$. Казваме, че p е *прост цикъл*, ако p е цикъл с поне едно ребро и освен това, всички елементи освен $u_{i_0} = u_{i_t}$ са уникални.

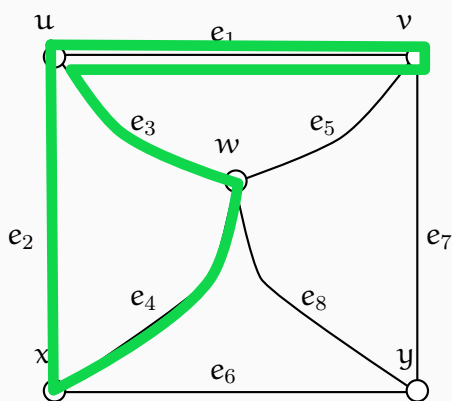
Иначе казано, цикъл е път, на който краищата съвпадат.

Тъй като “цикъл” е частен случай на път, дефиницията на “дължина” е същата: дължината на цикъла е броят на ребрата в него. Отново използваме нотацията $|p|$ за дължината.

Нека пак разгледаме графа G_1 от Фигура 1. Един възможен цикъл в него е

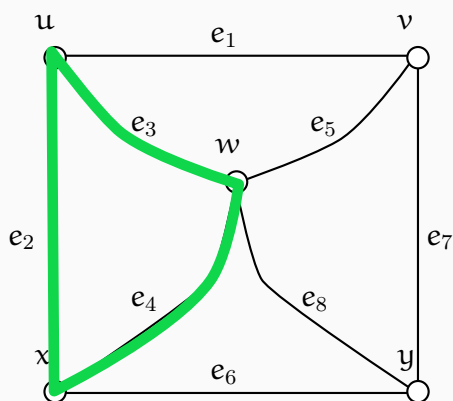
$$c_1 = (u, e_1, v, e_1, u, e_3, w, e_4, x, e_2, u)$$

Фигура 14 : Цикъл c_1 , който не е прост, в графа G_1 от Фигура 1.



Цикълът c_1 е показан на Фигура 14. c_1 не е прост цикъл. Прост цикъл е $c_2 = (u, e_3, w, e_4, x, e_2, u)$, който е изобразен на Фигура 15.

Фигура 15 : Прост цикъл c_2 в графа G_1 от Фигура 1.



Подобно на пътищата, циклите може да се описват като пропускаме имената на ребрата и записваме само имената на върховете. В случая, $c_1 = u, v, u, w, x, u$ и $c_2 = u, w, x, u$.

Лесно се забелязва, че минималната дължина на прост цикъл е 3. Индивидуален връх като u или z в последния пример представлява цикъл (с дължина 0), но не е прост цикъл. Едно ребро, примерно $e_1 = (u, v)$ е цикъл с дължина 2, ако го разгледаме като u, e_1, v, e_1, u , но това не е прост цикъл, защото e_1 също се повтаря. И така, най-късите възможни прости цикли са с дължина 3.

Конвенция 6

Простите цикли се ползват по-често от другия вид. Затова, отсега нататък, като кажем “цикъл”, разбираме “прост цикъл”. Ако имаме предвид цикъл, който не е прост, трябва изрично да споменем, че не е прост.

Четен цикъл е всеки цикъл с четна дължина. *Нечетен цикъл* е всеки цикъл с нечетна дължина.

Определение 11: Сливане на пътища

Нека $G = (V, E)$ е граф. Нека са в G има два пътя p_1 и p_2 , такива че:

$$p_1 = (a, e_{k_0}, u_{i_1}, e_{k_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_{t-1}}, e_{k_{t-1}}, b)$$

$$p_2 = (a, e_{q_0}, u_{r_1}, e_{q_1}, u_{r_2}, \dots, u_{r_{s-1}}, e_{q_{s-1}}, b)$$

и $V(p_1) \cap V(p_2) = \{a, b\}$ и освен това $|p_1| + |p_2| \geq 3$. *Сливането на p_1 и p_2 в цикъл* е простият цикъл

$$c = (a, e_{k_0}, u_{i_1}, e_{k_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_{t-1}}, e_{k_{t-1}}, b, e_{q_{s-1}}, u_{r_{s-1}}, e_{q_{s-2}}, \dots, u_{r_1}, e_{q_0}, a)$$

Използваме кратката нотация $p_1 \odot p_2$ за резултата от сливането, тоест $c = p_1 \odot p_2$.

Очевидно $|p_1 \odot p_2| = |p_1| + |p_2|$. Като пример, да разгледаме отново Фигура 15. Вярно е, че $c_2 = (u, e_2, x) \odot (u, e_3, w, e_4, x)$.

2.4 Свързаност и разстояние в граф. Ексцентрицитет на връх, диаметър и радиус на граф. Срязващи върхове и срязващи ребра. Срезове в графи.

Определение 12: Свързан граф.

Нека $G = (V, E)$ е граф. За всеки два върха $u, v \in V$ казваме, че u и v са свързани, ако съществува път с краища u и v . G е *свързан*, ако всеки два върха в него са свързани.

Не всеки граф е свързан. Примерно, графът на Фигура 1 на стр. 6 не е свързан, защото връх z не е свързан с никой друг връх.

Нека $Q_G \subseteq V \times V$ е следната релация: $\forall u, v \in V : uQv \Leftrightarrow u$ и v са свързани. Да наречем тази релация, *релацията на достижимост върху G* .

Лема 3

Релацията на достижимост е транзитивна.

Доказателство: Ще покажем, че за всеки три върха u, v, w е изпълнено следното: ако има път p_1 между u и v и има път p_2 между v и w , то има път p_3 между u и w . Читателят може да се изкуши да каже, че това е очевидно, ако вземем $p_3 = p_1 \oplus_v p_2$. Това е така, ако става дума за пътища, които не са непременно прости.

Ако настояваме пътищата в определението на свързването да са прости, може $p_1 \oplus_v p_2$ да не е прост път в случай, че p_1 и p_2 имат и други общи върхове (освен v). Нека връх b е първият (най-левият) връх в p_1 , който е общ за p_1 и p_2 (възможно е b да съвпада с u), ако p_1 е записан като $p_1 = u, \dots, b, \dots, v$. Тогава, очевидно, b е последният (най-десният) връх в p_2 , който е общ за p_1 и p_2 , ако p_2 е записан като $v, \dots, b, \dots, w$. Може b да съвпада с w . Нека p' е подпътят на p_1 между u и b включително и p'' е подпътят на p_2 между b и w включително. Тогава вземаме $p_3 = p' \oplus p''$ и доказателството е готово: p_3 е прост път между u и w . $\square$

Лема 4

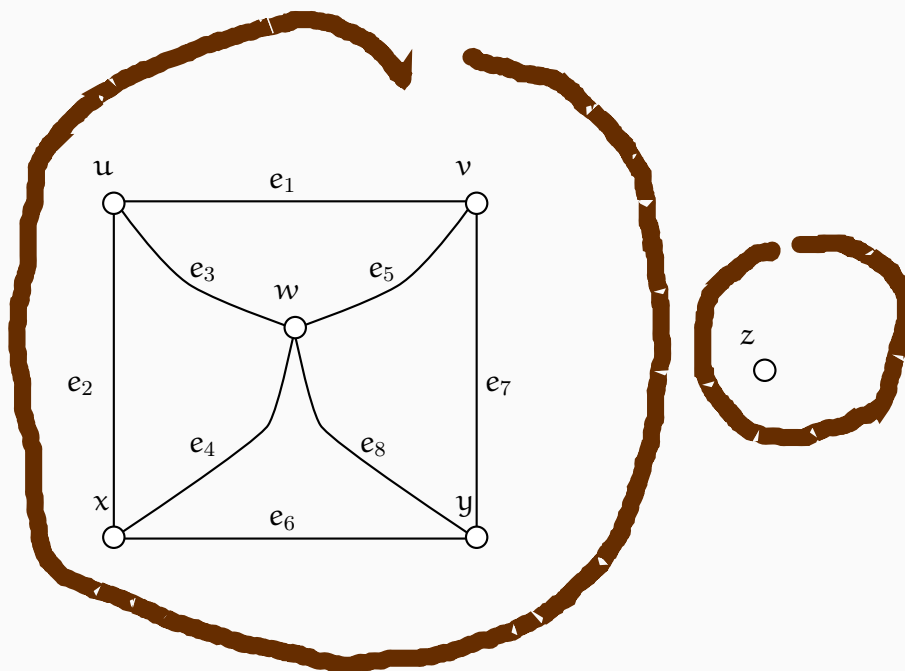
Нека R_G и Q_G са релациите, дефинирани съответно на стр. 7 и на предната страница. Q_G е рефлексивно и транзитивно затваряне на R_G . $\square$

Щом R_G е симетрична и Q_G е рефлексивно и транзитивно затваряне на R_G , то Q_G е рефлексивна, симетрична и транзитивна. Тогава Q_G е релация на еквивалентност. Нейните класове на еквивалентност са множества върхове, във всяко от които всеки два върха са свързани, но никои два върха от различни класове не са свързани. Като пример да разгледаме графа на Фигура 1 на стр. 6. Релацията на достижимост върху него има два класа на еквивалентност: $\{u, v, w, x, y\}$ и $\{z\}$.

Определение 13: Свързани компоненти.

Нека $G = (V, E)$ е граф и Q_G е релацията на достижимост върху G . Подграфите на G , индуцирани от класовете на еквивалентност на Q_G , се наричат *свързаните компоненти на G* .

Като пример да разгледаме пак графа на Фигура 1 на стр. 6. Той има точно две свързани компоненти, които са очертани на Фигура 16.

Фигура 16 : Двете свързани компоненти на графа G_1 от Фигура 1.**Определение 14: Свързан граф.**

Ако всеки два върха на даден граф са свързани, казваме, че той е *свързан граф*.

Възможно е следното алтернативно определение на “свързани компоненти”, която използва Определение 14.

Определение 15: Свързани компоненти, алтернативно определение.

Свързаните компоненти на граф са максималните по включване свързани подграфи.

Лема 5

Определения 13 и 15 са еквивалентни. □

Определение 16: Разстояние в граф.

Нека $G = (V, E)$ е свързан граф. За всеки два не непременно различни върха u и v , *разстоянието между u и v* дължината на най-къс между u и v . Разстоянието между u и v се бележи с $\text{dist}(u, v)$.

Определение 17: Метрика.

Нека A е произволно множество и $f : A \times A \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Казваме, че f е *метрика*, ако:

$$\forall x, y \in A : \text{dist}(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y$$

$$\forall x, y \in A : \text{dist}(x, y) = \text{dist}(y, x)$$

$$\forall x, y, z \in A : \text{dist}(x, y) + \text{dist}(y, z) \geq \text{dist}(x, z)$$

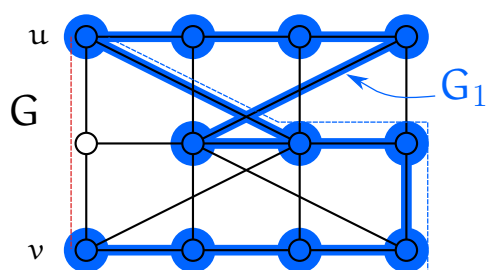
Лема 6

Функцията dist от Определение 16 е метрика.

Ако G не е свързан, то има двойки върхове, между които няма път. За несвързани графи променяме по следния начин определението на “разстояние”: ако u и v са свързани, то разстоянието между тях е дължината на най-къс път между u и v , в противен случай, разстоянието между тях е безкрайност. Последното записваме така: $\text{dist}(u, v) = \infty$.

Една забележка: не е правилно да се членува “най-късият път”, защото може да не е уникален; може да има много най-къси пътища между два върха.

За пример да вземем граф G_1 от Фигура 1. В него, $\text{dist}(u, u) = 0$, $\text{dist}(u, v) = 1$, $\text{dist}(u, y) = 2$, $\text{dist}(u, z) = \infty$ и така нататък.



Фигура 17: Най-късият път между u и v в G е очертан с **червена прекъсната линия**. Най-късият път между u и v в G_1 е очертан със **синя прекъсната линия**.

Понякога разглеждаме едновременно граф G и негов подграф G_1 и някакви върхове u и v , които са върхове както в G , така и в G_1 , и освен това u и v са свързани в G_1 (което влече, че са свързани и в G). Лесно се вижда, че разстоянието между u и v в оригиналния граф може да е различно от разстоянието между u и v в подграфа. Като пример да разгледаме графа G на Фигура 17. Той има подграф G_1 , очертан в синьо. Разстоянието между u и v в G е 2, защото такава е дължината на най-късия път между u и v в G . Каква е дължината на най-къс път между u и v в G_1 ? Този път трябва да се състои изцяло от сини ребра и сини върхове—защото е в подграфа. Лесно се вижда, че ако използваме само сини ребра и върхове, най-късият път между u и v

има дължината 6. Ако вече сме въвели и G , и G_1 , то използването на нотацията “ $\text{dist}(u, v)$ ” е двусмислено; за конкретния пример, $\text{dist}(u, v)$ може да е 2, ако имаме предвид целия граф, но може и да е 6, ако имаме предвид подграфа. За да различаваме разстоянието между u и v в G от разстоянието между u и v в G_1 , слагаме индекс G или G_1 така:

$$\text{dist}_G(u, v) = 2$$

$$\text{dist}_{G_1}(u, v) = 6$$

Лема 7

За произволен граф G , за произволен подграф G' на G и за произволни върхове $u, v \in V(G)$, такива че u е свързан с v в G' , е изпълнено:

$$\text{dist}_G(u, v) \leq \text{dist}_{G'}(u, v)$$

□

Определение 18

Нека $G = (V, E)$ е свързан граф и $u \in V$ е произволен връх. *Ексцентрицитетът на u* е

$$\epsilon(u) = \max \{ \text{dist}(u, v) \mid v \in V \}$$

Радиусът на G е

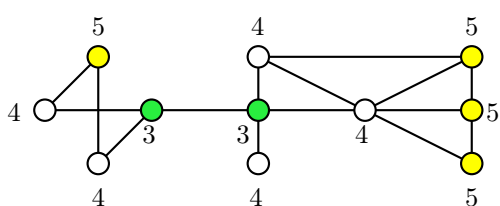
$$\text{rad}(G) = \min \{ \epsilon(u) \mid u \in V \}$$

Диаметърът на G е

$$\text{diam}(G) = \max \{ \epsilon(u) \mid u \in V \}$$

Център на графа е всеки връх x , такъв че $\epsilon(x) = \text{rad}(G)$. *Периферен връх* на графа е всеки връх x , такъв че $\epsilon(x) = \text{diam}(G)$.

С думи, ексцентрицитетът е максималното разстояние между u и който да е друг връх на графа; радиусът на графа е минималното, по всички върхове, максимално разстояние в графа; диаметърът е максималното, по всички върхове, максимално разстояние в графа. Диаметър и радиус на графи са важни понятия: ако графът моделира комуникационна мрежа, в която има закъснение единица между съседни върхове, то максималното закъснение, което може да се получи между два върха на мрежата, е равно на диаметъра на графа. Също така, върховете-центрове (те може да са повече от един) в графа отговарят на тези върхове на мрежата, които са най-централно разположени в смисъл, че закъснението между тях и който да е друг връх е минимално. Съответно периферните върхове са най-отдалечените върхове от кои да е други върхове.



Фигура 18: Граф с диаметър 5 и радиус 3.

Като пример, да разгледаме графа на Фигура 18. До всеки връх на графа е написан неговият ексцентрицитет. Да се убедим, че ексцентрицитетите на върховете са написани вярно. Първо забелязваме, че няма двойки върхове на разстояние повече от 5. После, за всеки от четирите жълти върха, максималното разстояние до друг връх е 5; а именно, за всеки от трите жълти върха вдясно, жълтият връх вляво е на разстояние 5, и съответно левият жълт връх е на разстояние 5 от който да е от жълтите върхове вдясно.

След това забелязваме, че за двата бели върха вляво, върховете на максимално разстояние са жълтите върхове вдясно (на разстояние 4); аналогично, за трите бели върха вдясно, максимално отдалечен връх (на разстояние 4) е жълтият връх вляво. И накрая, за левия зелен връх, максимално отдалечен (на разстояние 3) е всеки от

жълтите върхове вдясно; аналогично за десния зелен връх максимално отдалечен (на разстояние 3) е жълтият връх вляво. Виждаме, че ексцентрицитетите са написани правилно. Тогава графът има диаметър 5 и радиус 3, като в жълто са оцветени периферните върхове, а в зелено, центровете.

От примера на Фигура 18 може да помислим, че винаги радиусът е горе-долу половината от диаметъра и по-точно, че $\text{rad}(G) = \left\lceil \frac{\text{diam}(G)}{2} \right\rceil$. Това обаче не винаги е така! Най-общо, следното отношение е в сила

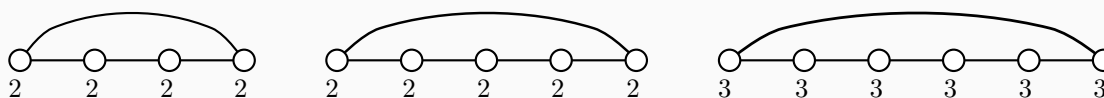
$$\text{rad}(G) \leq \text{diam}(G) \leq 2 \cdot \text{rad}(G)$$

Клас от графи, за които радиусът е равен на диаметъра, са циклите. Във всеки граф-цикъл[†] с дължина k , за всеки връх u :

$$\epsilon(u) = \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$$

Примери за това има на Фигура 19:

Фигура 19 : Графи-цикли и ексцентрицитетите на върховете им.



Друг пример за граф, в който всички върхове имат един и същи ексцентрицитет—а именно, единица—е графът K_n , дефиниран на стр. 27.

Определение 19: срязващо ребро и срязващ връх

Нека $G = (V, E)$ е граф. *Срязващ връх* в G е всеки $u \in V$, такъв че $G - u$ има повече свързани компонентни от G . *Срязващо ребро*, още се нарича *мост*, е всяко $e \in E$, такова че $G - e$ има повече свързани компоненти от G .

Определение 20: срязващо ребро и срязващ връх, алтернативно определение

Нека $G = (V, E)$ е граф. Срязващ връх в G е всеки $u \in V$, такъв че за някои различни върхове $v, w \in V$ е вярно, че всеки път между v и w съдържа u като вътрешен връх. Срязващо ребро е всяко $e \in E$, такова че за някои различни върхове $v, w \in V$ е вярно, че всеки път между v и w съдържа e .

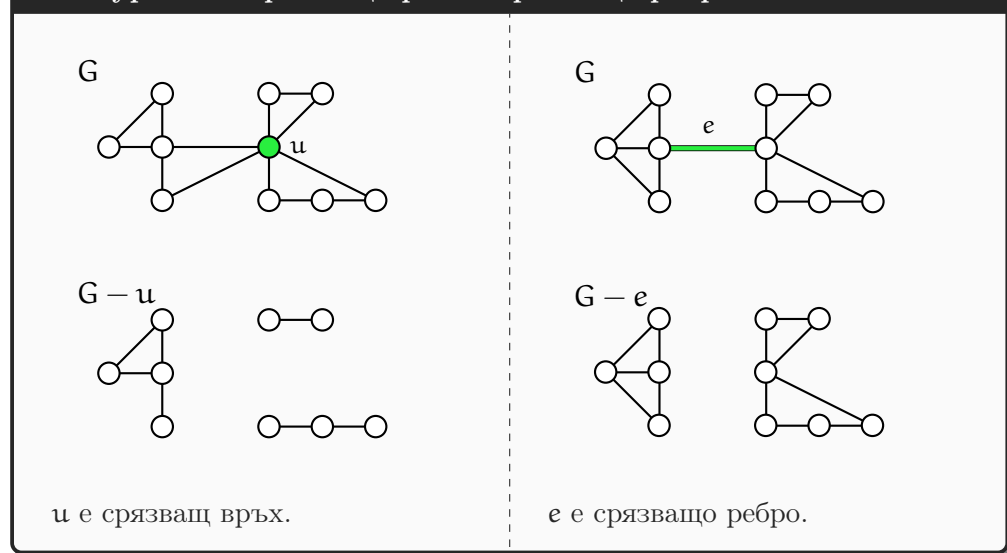
Лема 8

Определения 19 и 20 са еквивалентни. □

Фигура 20 илюстрира Определения 19 и 20.

[†]Не казваме просто “цикъл”, за да не се бърка понятието с цикъл в граф. Тук имаме предвид, че самият граф е цикъл.

Фигура 20 : Срязващ връх и срязващо ребро.



Допълнение 3: Приложение на срязващи върхове и ребра

Срязващите върхове и мостовете са важни понятия, ако графът моделира някаква свързаност. Примерно, ако моделира комуникационна мрежа, или пътна мрежа, или електрическа мрежа.

Нека графът моделира комуникационна мрежа от компютри и жични връзки между тях. Нека мрежата е свързана в смисъл, че всеки два компютъра могат да си “говорят”; може би не директно, а през други компютри, но имат връзка един с друг. Тогава срязващ връх в графа съответства на компютър, чиято повреда би довела до това, че мрежата би се разпадала на две или повече подмрежи, които не си “говорят”. В разпаданата мрежа има компютри, които не могат да комуникират взаимно. А срязващо ребро отговаря на жична връзка, чиято повреда би довела до разпадане на мрежата на точно две подмрежи, които не си “говорят”.

И така, срязващите върхове и мостовете отговарят на някакъв критично важни компоненти на мрежата. Мрежа, чийто съответен граф има срязващи върхове или мостове е потенциално по-ненадеждна от мрежа, чийто съответен граф няма такива елементи. От гледна точка на надеждността, очевидно предпочитаме мрежи, чиито съответни графи нямат срязващи върхове или мостове.

Да си припомним, че k -разбиване на множество A за някакво $k \in \mathbb{N}^+$ е всяко множество $X = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$, такова че

- $S_i \subseteq A$, $1 \leq i \leq k$.
- $S_i \neq \emptyset$, $1 \leq i \leq k$.
- $S_i \cap S_j = \emptyset$, $1 \leq i < j \leq k$.
- $\bigcup_{i=1}^k S_i = A$.

Определение 21: Срез в граф.

Нека $G = (V, E)$ е граф. *Срез* в G наричаме всяко 2-разбиване X на V . Ако $X = \{V_1, V_2\}$, то *срез-множеството* на X е

$$E' = \{(u, v) \in E \mid u \in V_1 \wedge v \in V_2\}$$

За всяко ребро $e \in E'$ казваме, че e *прекосява* среза X . *Теглото* на X е $|E'|$. *Страните* на среза са V_1 и V_2 .

Забележка: ако графът е тегловен (вж. Секция 3.4), то теглото на среза е сумата от теглата на ребрата, които прекосяват среза.

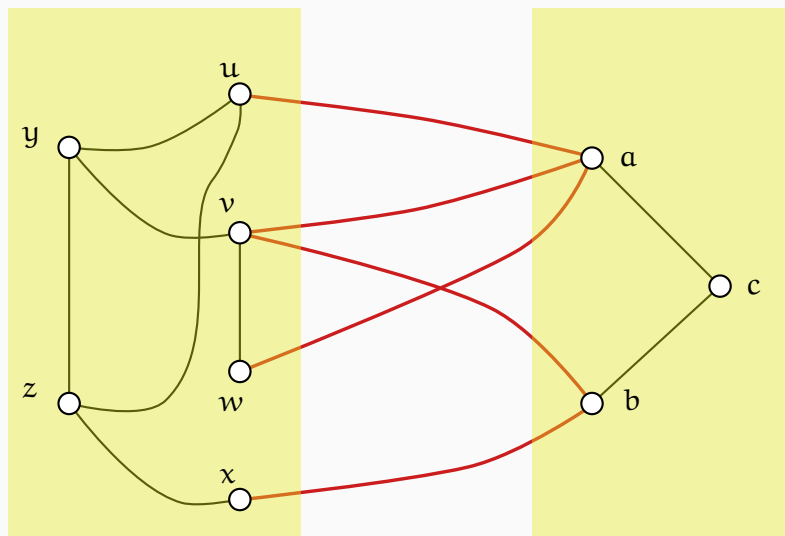
Понятието “срез” има голяма практическа важност. Задачата за намиране на *максимален поток в граф*, която е от огромна важност в оптимизацията, има бързо алгоритмично решение, което използва срезове в графи[†]. За подробности, вижте фундаменталната книга на Cormen, Leiserson, Rivest и Stein *Introduction to Algorithms* [7, глава 26, стр. 708]. Друго важно приложение на срезове е в областта на компютърното зрение [15, глава 5, стр. 79].

Понякога срезът се дефинира не като разбиването на V , а просто като множеството от ребрата, които го прекосяват, което множество тук нарекохме “срез-множеството” [15]. Често в практиката са интересни срезове, които се дефинират спрямо два предварително избрани върха: нека предварително са фиксирани различни върхове $s, t \in V$ и тогава всеки срез, такъв че s и t се намират в различни негови страни, се нарича s/t -срез.

По правило срезове в графи се онагледяват чрез рисунки, в които едната страна на среза се рисува вляво, а другата, вдясно. Това много прилича на начина, по който се рисуват двуделните графи (вж. Секция 2.7). Естествено, не всеки граф е двуделен, докато срез може да се дефинира във всеки граф, така че теорията на срезове в графи и теорията на двуделните графи са различни неща. Пример за рисунка на срез в граф е показана на Фигура 21.

[†]На английски: *graph cut*.

Фигура 21 : Срез в граф.



Ребрата от срез-множеството са в червено. Двете страни на среза са маркирани с жълта основа.

2.5 Регулярни графи. Пълни и празни графи. Клики и антиклики. Допълнение на граф.

Нека навсякъде в тази подсекция $G = (V, E)$ означава граф.

G е *k-регулярен*, ако $\forall u \in V : d(u) = k$. G е *регулярен*, ако е k -регулярен за някое k . G е *пълен граф*, ако има всички възможни ребра при даденото множество върхове, тоест ако $E = \{(u, v) | u \in V, v \in V, u \neq v\}$. Пълен граф на n върха се бележи с K_n . Ако игнорираме идентичностите на върховете, има само един пълен граф на n върха и има смисъл да говорим за *пълния граф на n върха*. Очевидно K_n е $(n-1)$ -регулярен.

Лесно се вижда, че диаметърът на K_n е 1 за $n > 1$. Радиусът също е 1 при $n > 1$. Освен това, всеки връх в K_n е едновременно център и периферен връх. Всичко това не е изненада—при пълната свързаност “всеки с всеки” в K_n , понятията диаметър, радиус, център и периферен връх се обезсмислят и формалното прилагане на определения води до такива на пръв поглед парадоксални изводи.

Лема 9

K_n има точно $\binom{n}{2}$ ребра.

□

G е *празен граф*, ако $E = \emptyset$. Празният граф (ако игнорираме идентичностите на върховете, имаме право да мислим за един единствен празен граф на n върха) е 0-регулярен. Ако $E \neq \emptyset$, графът е *непразен*.

Всяко $U \subseteq V$, такова че $U \neq \emptyset$ и $|U| = k$, е *k-клика* в G , ако U индуцира подграф на G , който е пълен (тоест, индуцира K_k). U е *k-антиклика*, ако U индуцира празен подграф. Ако кажем само *клика* или *антиклика*, става дума за k -клика или k -антиклика за някое k . Използваме понятието *независимо множество* като синоним на антиклика.

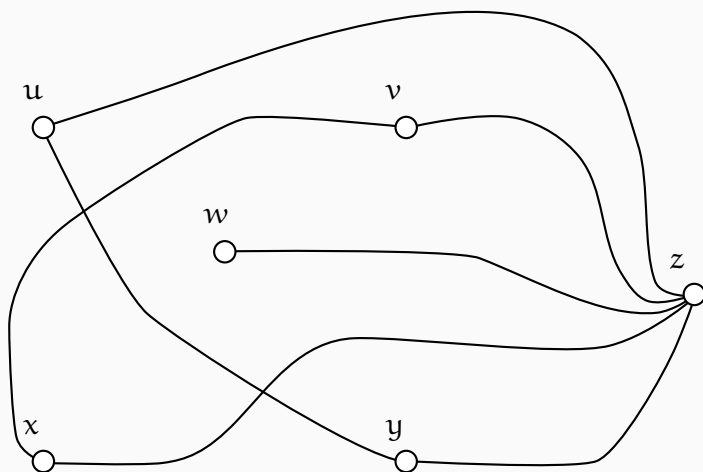
Като алгоритмична задача, задачата за кликите е максимизационна: трудно е да се намерят големи клики. Намирането на малки клики е тривиално—примерно, всеки връх е 1-клика сам по себе си—но безинтересно. Аналогично, задачата за антикликите също е максимизационна—ако графът не е пълен, лесно може да намерим двуелементна антиклика.

Като пример, да разгледаме графа на Фигура 1. Множеството върхове $\{u, v, w, \}$ е 3-клика. Също така, $\{x, w, y\}$ е 3-клика. Всяко ребро е 2-клика, примерно $\{v, y\}$. Всеки връх сам по себе си е тривиална 1-клика, примерно $\{x\}$ или $\{z\}$. В този граф 4-клика няма. Примери за антиклики са: $\{z, v\}$ е 2-антиклика, $\{u, y, z\}$ е 3-антиклика и така нататък. 4-антиклика в графа няма.

Кликово число на графа G е мощността на максимална[†] клика в G . Кликовото число на G се бележи с $\omega(G)$. Примерно, $\omega(G_1) = 3$, където G_1 е графът от Фигура 1. **Числото на независимост на графа** G е мощността на максимална антиклика[‡] в G . Числото на независимост се бележи с $\alpha(G)$. Примерно, $\alpha(G_1) = 3$, където G_1 е графът от Фигура 1.

Допълнението на G , което бележим с $\bar{G}$, е графът $\bar{G} = (V, E')$, където $E' = \{(u, v) | u \in V, v \in V, u \neq v\} \setminus E$. Неформално казано, E' са точно тези ребра, които “ти няма” в G . Да вземем за пример графа от Фигура 1. Неговият граф-допълнение е изобразен на Фигура 22.

Фигура 22 : Графът-допълнение на графа G_1 от Фигура 1.



Лема 10

$\bar{\bar{G}} = G$, за всеки граф G .

□

Лема 11

Нека $G = (V, E)$ е граф. За всяко $U \subseteq V$ е изпълнено следното: U е клика в G тогава и само тогава, когато U е антиклика в $\bar{G}$.

□

Следствие 2

$\omega(G) = \alpha(\bar{G})$.

□

[†]Не “максимална по включване”, а “глобално максимална”.

[‡]Да си припомним, че “независимо множество” е синоним за “антиклика”.

В Лема 12 имаме предвид включващо **или**.

Лема 12

Нека $G = (V, E)$ е граф с поне 6 върха. В G има 3-клика или 3-антиклика.

Доказателство: Без ограничение на общността, ще докажем твърдението за $n = 6$. Нека E' е множеството от ребрата на $\bar{G}$. Конструираме графа $\tilde{G} = (V, \tilde{E})$, където $\tilde{E} = E \cup E'$. Очевидно $\tilde{G}$ е пълен граф на 6 върха, така че $|\tilde{E}| = \binom{6}{2} = 15$. Да дефинираме, че *червените ребра*[†] в $\tilde{G}$ са ребрата от E , а *сините ребра* са ребрата от E' . Тогава $\tilde{E}$ се разбива на множеството от червените ребра и множеството от сините ребра. Нещо повече. Твърдението, което искаме да докажем, е еквивалентно на твърдението, че в $\tilde{G}$ има 3-клика, която индуцира подграф само с червени ребра или има 3-клика, която индуцира подграф само със сини ребра.

Да разгледаме произволен връх $u \in V$. В $\tilde{G}$, този връх е инцидентен с точно 5 ребра. Всяко от тях е или червено, или синьо. Съгласно обобщения принцип на Дирихле, поне 3 от тях са в един и същи цвят. Без ограничение на общността, нека този цвят е червен. И така, три ребра, инцидентни с u , да ги наречем (u, x) , (u, y) , (u, z) , са червени.

Сега разглеждаме ребрата (x, y) , (x, z) и (y, z) . Да допуснем, че поне едно от тях е червено. Без ограничение на общността, нека това е (x, y) . Тогава в $\tilde{G}$ има 3-клика, а именно $\{u, x, y\}$, такава че индуцираният от нея подграф има само червени ребра, а именно (u, x) , (u, y) и (x, y) , които са червени съгласно текущите допускания.

Сега да допуснем, че нито едно от ребрата (x, y) , (x, z) и (y, z) не е червено. Тогава и трите са сини. Тогава в $\tilde{G}$ има 3-клика, а именно $\{x, y, z\}$, такава че индуцираният от нея подграф има само червени ребра, а именно (x, y) , (x, z) и (y, z) , които са сини съгласно текущите допускания. $\square$

2.6 Върхово покриване и доминиращо множество.

Допълнение 4: За практическата важност на понятията

Да си представим n на брой експеримента, които се извършват в някаква лаборатория. Резултатите от някои двойки експерименти си противоречат; от други двойки, не. Искане се да се намери минимално подмножество на множеството на експериментите, такава че, ако отстраним експериментите от него, няма да има никакви противоречия. Ако моделираме задачата с граф, върховете на който отговарят на експериментите, а ребрата, на противоречията, иска се да се намери минимално подмножество от върхове, такива че тяхното изтриване от графа да не оставя нито едно ребро. Такова множество от върхове се нарича “върхово покриване”.

Сега да си представим, че са дадени някакви градове и пътища между тях. Искане се да се построят болници в градовете, но—за да се икономисат пари—не във всеки град. Изискването е, за всеки град, или в него да има болница, или в съседен град да има болница, и да бъдат построени колкото е възможно по-малко болници. Ако моделираме задачата с граф, иска се да се намери минимално подмножество от върхове, такива че всеки връх на графа да е един от тях, или да има съсед измежду тях. Такова множество се нарича “доминиращо”.

[†]Това слагане на цветове на ребрата е много различно от оцветяването на ребра съгласно Определение 27 на стр. 48. В Определение 27 се иска всички двойки инцидентни ребра да са в различни цветове. Тук няма такова изискване.

Определение 22: Върхово покриване и доминиращо множество.

Нека $G = (V, E)$ е граф и $U \subseteq V$. Казваме, че U е *върхово покриване* на G , ако:

$$\forall (u, v) \in E : u \in U \vee v \in U$$

Казваме, че U е *доминиращо множество* на G , ако

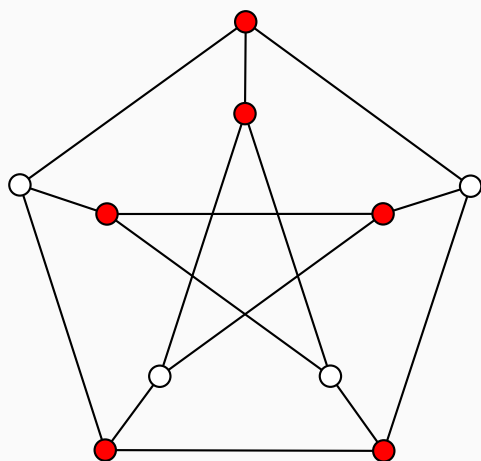
$$\forall u \in V (u \in U \vee \exists v \in N(u) (v \in U))$$

Като алгоритмични задачи, и двете са минимизационни. Трудно е да се намерят малки върхови покривания и малки доминиращи множества. Най-малката мощност на върхово покриване на G се бележи с $\tau(G)$ и се нарича *число на покриване* на G . Най-малката мощност на доминиращо множество на G се бележи с $\gamma(G)$ и се нарича *доминиращо число* на G .

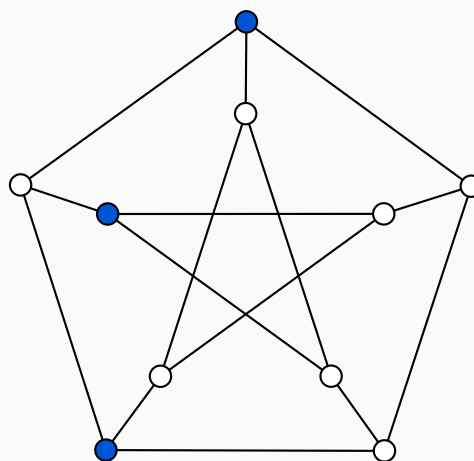
Примери за върхово покриване и доминиращо множество са показани на Фигура 23. Графът P , изобразен върху двете подфигури, се нарича граф на Petersen. Графът на Petersen не може да бъде покрит с по-малко от 6 върха: в лявата страна на Фигура 23 виждаме, че само външният петогълник[†] иска поне 3 върха, а независимо от това, вътрешните пет диагонала[‡] искат също поне 3 върха, така че 6 е долна граница за мощността на върховото покриване и върховото покриване на Фигура 23 е оптимално. И така, $\tau(P) = 6$.

От друга страна, графът на Petersen не може да бъде доминиран от по-малко от 3 върха. Защо? – защото графът на Petersen е 3-регулярен, а в 3-регулярен граф един връх може да доминира най-много 4 върха общо (включително и себе си). Тогава кои да е два върха могат да доминират най-много $2 \cdot 4 = 8$ върха общо (включително и себе си). Графът на Petersen има 10 върха, следователно не може да бъде доминиран от 2 върха. И така, $\gamma(P) = 3$, и доминиращото множество, показано в дясната страна на Фигура 23, е оптимално.

Фигура 23 : Върхово покриване и доминиращо множество в графа на Petersen.



Върхово покриване с 6 върха.



Доминиращо множество с 3 върха.

[†]Подграфът, индуциран от външните пет върха.

[‡]Подграфът, индуциран от вътрешните пет върха.

Определенията на върхово покриване и доминиращо множество привидно си приличат, но всъщност са много различни. Разликата в мощностите на минимално върхово покриване и минимално доминиращо множество може да е драстична. Примерно, всяко минимално върхово покриване на K_n има точно $n - 1$ върха (налага се да изтрием $n - 1$ върха, за да не останат ребра), докато всяко минимално доминиращо множество на K_n има точно 1 връх (избираме кой да е връх и забелязваме, че всички останали са му съседни). От друга страна, празният граф на n върха има минимално върхово покриване с мощност 0 (става дума за празното множество; тъй като този граф няма ребра, няма нужда да изтриваме върхове изобщо, така че да не останат ребра), но минималното доминиращо множество е с мощност n (всички върхове трябва да са в него, понеже няма ребра и никой връх не може да доминира друг връх).

Сравнете следната Лема 13 с Лема 11. Лема 11 казва, че клика в даден граф имплицира антиклика в графа-допълнение, и обратното. А Лема 13 казва, че върху един и същи граф, върхово покриване и антиклика са комплементарни в смисъл, че допълнението на върхово покриване до V е антиклика, и обратното.

Лема 13

Нека $G = (V, E)$ е произволен граф. За всяко $U \subseteq V$ е изпълнено следното: U е върхово покриване тогава и само тогава, когато $V \setminus U$ е антиклика. $\square$

Следствие 3

$\alpha(G) + \tau(G) = n$, за всеки граф G . $\square$

Лема 14

Нека $G = (V, E)$ е граф без изолирани върхове. Тогава всяко върхово покриване е доминиращо множество. Конверсното не е вярно. $\square$

Забележка: конверсното твърдение на импликацията $p \rightarrow q$ е импликацията $q \rightarrow p$. В случая, конверсното твърдение би било “всяко доминиращо множество е върхово покриване”.

Следствие 4

Нека $G = (V, E)$ е граф без изолирани върхове. Тогава $\tau(G) \geq \gamma(G)$. $\square$

Допълнение 5: За графа на Petersen

Графът на Petersen, който използвахме тук за илюстрация, е интересен математически обект, който е достатъчно малък, за да бъде възприеман визуално с лекота, и е достатъчно сложен, за да има нетривиални свойства. Графът на Petersen често се използва за илюстрация на различни свойства в теорията на графите. Той е 3-регулярен граф с 10 върха и 15 ребра. Практиката е показала, че много хипотези (недоказани твърдения) в теорията на графите намират лесно опровержение (стига да не са верни, разбира се), ако бъдат “опитани” върху графа на Petersen.

Името на графа идва от датския математик Julius Petersen. Въпреки името, този граф бил изследван преди Petersen от английския математик Kempe в контекста на т. нар. конфигурации на Desargues. Desargues бил френски математик от 16-17 век, който

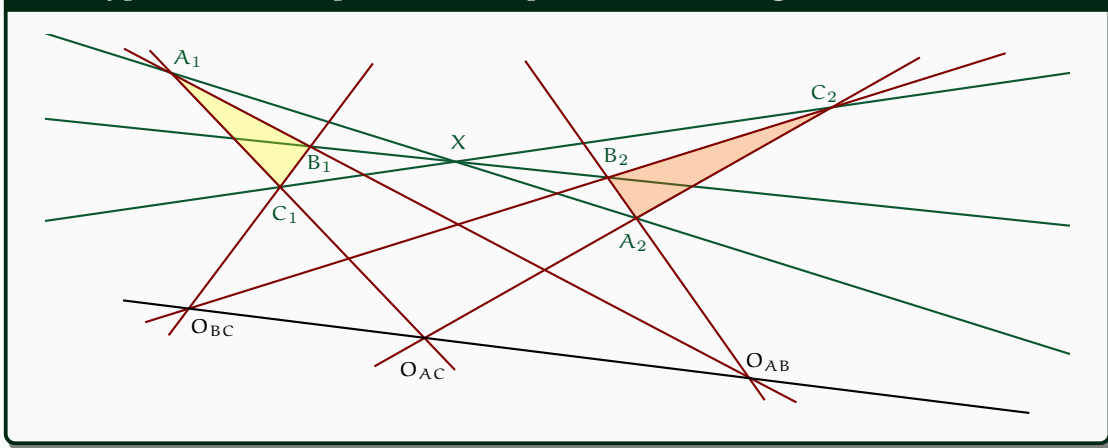
доказал следната теорема.

Теорема 1: Теорема на Desargues

Нека $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ са произволни триъгълници. Нека правите A_1B_1 и A_2B_2 се пресичат в точка O_{AB} , правите A_1C_1 и A_2C_2 се пресичат в точка O_{AC} и правите B_1C_1 и B_2C_2 се пресичат в точка O_{BC} . Правите A_1A_2 , B_1B_2 и C_1C_2 се пресичат в една и съща точка X тогава и само тогава, когато O_{AB} , O_{AC} и O_{BC} лежат на една и съща права.

Фигура 24 илюстрира Теорема 1. На фигурата са показани общо 10 прави: трите зелени прави, върху които лежат върховете на двата триъгълника, шестте кафяви прави, определени от страните на триъгълниците, и черната права, определена от O_{AB} , O_{AC} и O_{BC} . Тези 10 прави се пресичат по тройки в 10 точки, които са именувани.

Фигура 24 : Илюстрация на теоремата на Desargues.



Да наречем такава съвкупност от 10 прави и техните 10 пресечни точки по тройки, *конфигурация на Desargues*. Кемпре забелязал, че ако в конфигурация на Desargues съпоставим на всяка права един връх и свържем два върха с ребро тогава и само тогава, когато съответните им прави **не се пресичат** в една от десетте пресечни точки, ще получим това, което днес бихме нарекли граф, изоморфен на графа на Petersen^a. Примерно, на Фигура 24 черната права не се пресича (в една от десетте пресечни точки) с точно три други прави, а именно с трите зелени прави; а в графа на Petersen, върхът, който съответства на синята права, е съсед точно на трите върха, съответни на зелените прави, и така нататък.

За повече подробности около графа на Petersen и връзката с конфигурациите на Desargues вижте книгата на Holton и Sheehan [13].

^aСекция 2.9 обяснява понятието “изоморфизъм”.

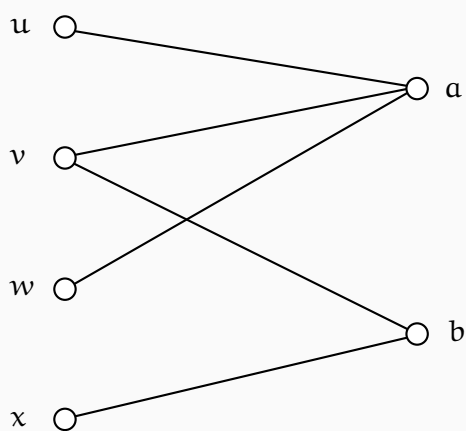
2.7 Двуделни графи.

Определение 23

Нека $G = (V, E)$ е граф. Ако съществува разбиване на V на две подмножества V_1 и V_2 , такива че $\forall (u, v) \in E : u \in V_1 \wedge v \in V_2$, казваме, че G е *двуделен граф*. Множествата V_1 и V_2 са *дяловете* на G .

Фигура 25 показва рисунка на двуделен граф. Типично, двуделните графи се рисуват така: дяловете вляво и вдясно, върховете им разположени вертикално, и ребрата с отсечки между дяловете.

Фигура 25 : Двуделен граф.

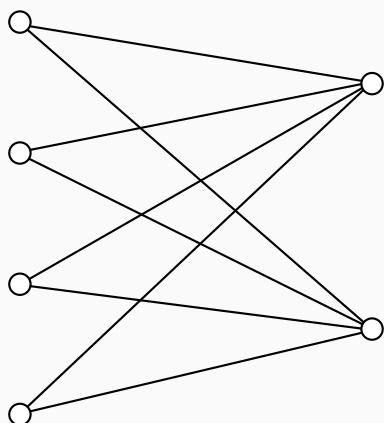


Единият дял е $\{u, v, w, x\}$, а другият дял е $\{a, b\}$.

Двуделните графи имат голямо приложение при моделиране на житейски ситуации, в които има два вида обекти, като обектите от първия вид са в някаква релация с обектите от втория.

Определение 23 има малък формален недостатък. Според него, графът, състоящ се от един единствен връх (и без ребра) не е двуделен, защото по определение разбиването става на непразни множества, така че всеки двуделен граф—ако следваме буквата на Определение 23—има поне два върха. Това не е особен проблем, защото така или иначе, интересни са големите графи, но за всеки случай ще додефинираме, че графът с един единствен (изолиран) връх е двуделен, като единият му дял е празен.

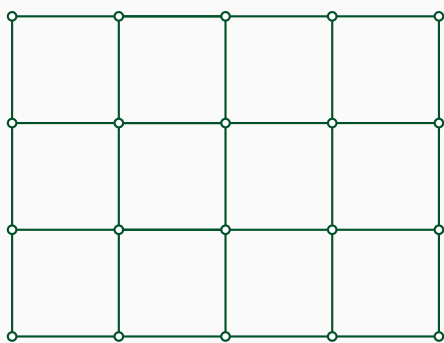
Пълн двуделен граф се нарича двуделен граф, такъв че всеки връх от единия дял е съсед на всеки връх от другия дял. Ако дяловете имат мощности p и q , пълният двуделен граф се бележи с $K_{p,q}$. Фигура 26 показва рисунка на $K_{4,2}$. Очевидно, $K_{p,q}$ е същият обект като $K_{q,p}$, тъй като дяловете не са подредени—точно кой от дяловете е нарисован вляво и кой, вдясно, е въпрос на естетическо предпочитание.

Фигура 26 : $K_{4,2}$.

Допълнение 6: Недеформируеми структури и двуделни графи

Добре известно е, че следната задача от строителното инженерство се решава елегантно с използване на двуделни графи. Подробности по нея, както и доста нейни обобщения, може да се намерят в [3].

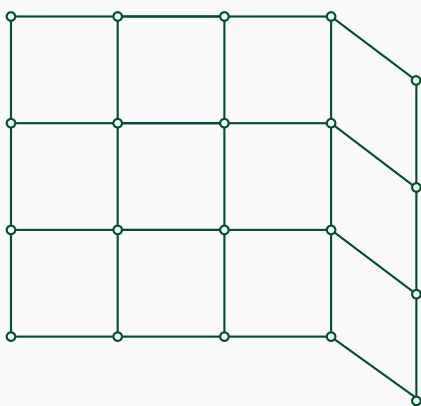
Преди да формулираме задачата ще обясним за какво става дума. Да дефинираме двумерна структура, която—за целите на тази задача—ще наричаме “структура от греди с размери $p \times q$ ”. Без формална дефиниция: дадени са $(p - 1)q + p(q - 1)$ еднакви стоманени греди с дължина 1, тънки и дълги, неразтегливи, неподатливи на натиск и неогъващи се. Гредите са наредени в нещо като правоъгълна мрежа с размери p реда на q колони и са захванати с шарнирни връзки в краищата си. Пример с $p = 4$ и $q = 5$ е показан на Фигура 27.

Фигура 27 : Структура от греди 4×5 .

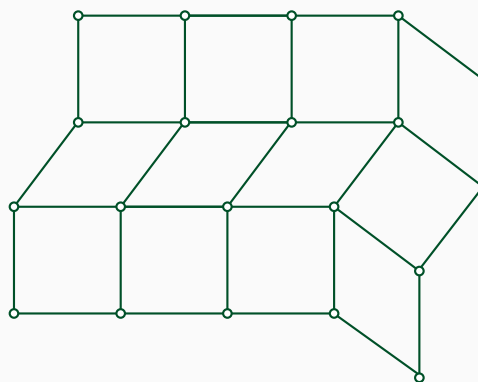
Структурата има 4 реда, 5 колони и общо $(4 - 1)5 + 4(5 - 1) = 31$ греди.

Тъй като връзките са шарнирни, структурата не е фиксирана, а е податлива на деформации, ако се приложи външна сила. Примерно, структурата от Фигура 27 може да се деформира до някоя от структурите, показани на Фигура 28.

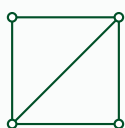
Фигура 28 : Деформации на структурата от Фигура 27.



Една възможна деформация.

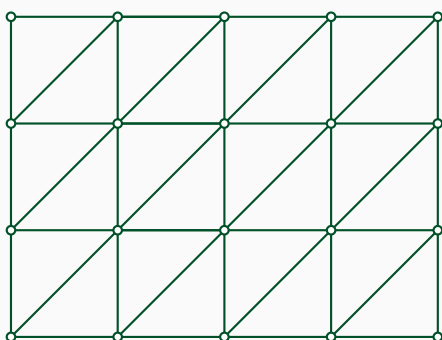


Друга възможна деформация.

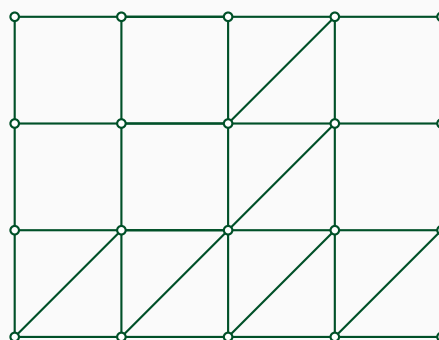


Сега да допуснем, че в допълнение на $p \cdot q$ еднаквите греди са дадени и други греди, по-дълги, които може да бъдат поставяни диагонално на “квадратите” на началната структура (преди деформациите). Всички диагонални греди са с една и съща дължина $\sqrt{2}$. Въпреки че диагоналните греди се захващат също с шарнирни връзки, те осигуряват *недеформируемост* на структурата. Най-прост пример за недеформируема структура от греди е един квадрат с поставен диагонал, показан тук. Тъй като триъгълникът е недеформируем дори при шарнирни връзки във върховете, а квадратът с диагонал в някакъв смисъл се състои от два “залепени” триъгълника, то показаната тук структура е недеформируема. Лесно се вижда, че структурата на Фигура 29 е недеформируема. За други структури е по-трудно да преценим на око дали са деформируеми или не (вж. Фигура 30).

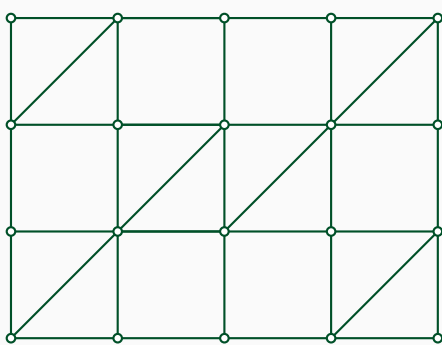
Фигура 29 : Недеформируеми структури.



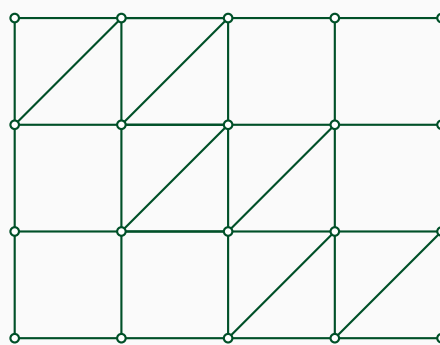
Ако всички във всички квадрати има диагонали, структурата е недеформируема.



Дори в някои от квадратите да няма диагонали, пак може структурата да е недеформируема.

Фигура 30 : Не е очевидно дали тези структури са деформируеми.

Структурата е деформируема.

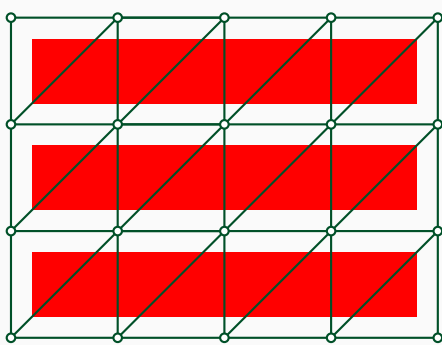


Структурата е недеформируема.

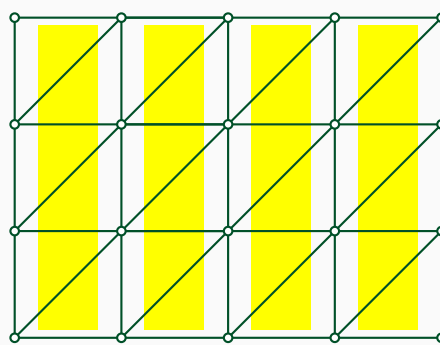
Задача 2

Дадена е структура от греди с диагонали. Да се намери просто необходимо и достатъчно условие, така че структурата да не е деформируема.

Решение: Да дефинираме, че структурата има $p - 1$ хоризонтала и $q - 1$ вертикала, където под “хоризонтал” се разбират редовете от клетките, които са между гредите (а не самите греди); и под “вертикал” се разбират колоните от клетките, които са между гредите (а не самите греди). Примерно, на Фигура 31 с червено са показани хоризонталите, а с жълто, вертикалите. Гредите на даден хоризонтал са вертикалните греди в него и гредите на всеки вертикал са хоризонталните греди в него.

Фигура 31 : Хоризонтали и вертикали на структура.

Структурата от Фигура 27 има 3 хоризонтала, тук оцветени в червено.



Структурата от Фигура 27 има 4 вертикала, тук оцветени в жълто.

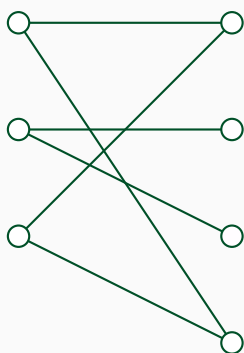
Следните съображения са очевидни:

- Гредите във всеки хоризонтал са успоредни. Това остава в сила дори хоризонталът да прави “чупки” надолу и нагоре, както примерно всички хоризонтали на Фигура 28.

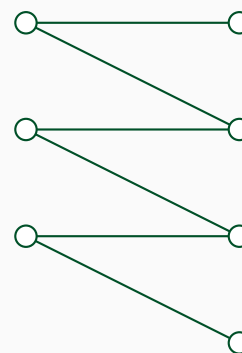
- Аналогично, гредите във всеки вертикал са успоредни. Това остава в сила дори когато вертикалът прави “чупки” наляво и надясно, както примерно най-десният вертикал на Фигура 28 вдясно.
- Поставянето на диагонална греда води до това, че съответният ромб е задължително квадрат.
- За всяка недеформируема структура:
 - гредите във всеки хоризонтал са успоредни на гредите във всеки друг хоризонтал;
 - гредите във всеки вертикал са успоредни на гредите във всеки друг вертикал;
 - гредите на всеки хоризонтал са перпендикулярни на гредите на всеки вертикал.

Да си представим двуделен граф $G = (V, E)$ с дялове V_1 и V_2 , такъв че V_1 има $p-1$ върха, а V_2 има $q-1$ върха. Нещо повече, върховете от V_1 съответстват на хоризонталите, а тези от V_2 , на вертикалите. За всеки два върха $u \in V_1$ и $v \in V_2$ има ребро (u, v) тогава и само тогава, когато в пресечната клетка на u -ия хоризонтал и v -ия вертикал в структурата има диагонална греда. Примери за такива графи има на Фигура 32. Несвързаният граф на Фигура 32 вляво отговаря на деформируемата структура на Фигура 30 вляво. Свързаният граф на Фигура 32 вдясно отговаря на деформируемата структура на Фигура 30 вдясно.

Фигура 32 : Двуделни графи, съответстващи на структури от греди.



Несвързан граф съответства на деформируема структура.



Свързан граф съответства на недеформируема структура.

Решение на задачата, която разглеждаме, се дава от Теорема 2. Тя е взета от книгата на Baglivo и Graver [3, Theorem 10.5, pp. 81], но доказателството ѝ не е тривиално и тук ще го прескочим.

Теорема 2: Необходимо и достатъчно условие за недеформируемост.

Дадена структура от греди е недеформируема тогава и само тогава, когато съответният двуделен граф е свързан. □

2.8 Оцветяване на графи.

Под “оцветяване на графи” може да се разбира едно от следните две неща: оцветяване на върхове или оцветяване на ребра. Тъй като първото е много по-често срещано, ако кажем само “оцветяване на графи” ще разбирате “оцветяване на върхове”.

2.8.1 Оцветяване на върхове

Допълнение 7: История на задачата за оцветяването.

Тази графова задача има интересна история. Широко разпространената версия—да я наречем “практичната версия”—свързва произхода на задачата с изработването на административни карти през 19 век. Административната карта, както подсказва името, се фокусира върху административното делене на някаква територия на някакви области, игнорирайки релефа и други подробности. За по-ясно възприемане, всяка област се оцветява в един цвят, а нейните съседи, в различни, достатъчно контрастиращи цветове.

Забележка 1

Определението на “съседни области” е: “такива, които имат обща граница, която не е просто точка”. Очевидно, ако допускаме съседни области да са и такива, които имат само обща точка, то може да има произволно много области, които са взаимно съседни и това да налага използването на произволно много цветове. Пример за реални области, имащи само обща точка, са щатите Юта, Ню Мексико, Аризона и Колорадо в САЩ. По нашето определение на “съседство”, нито два от тях не са съседни.

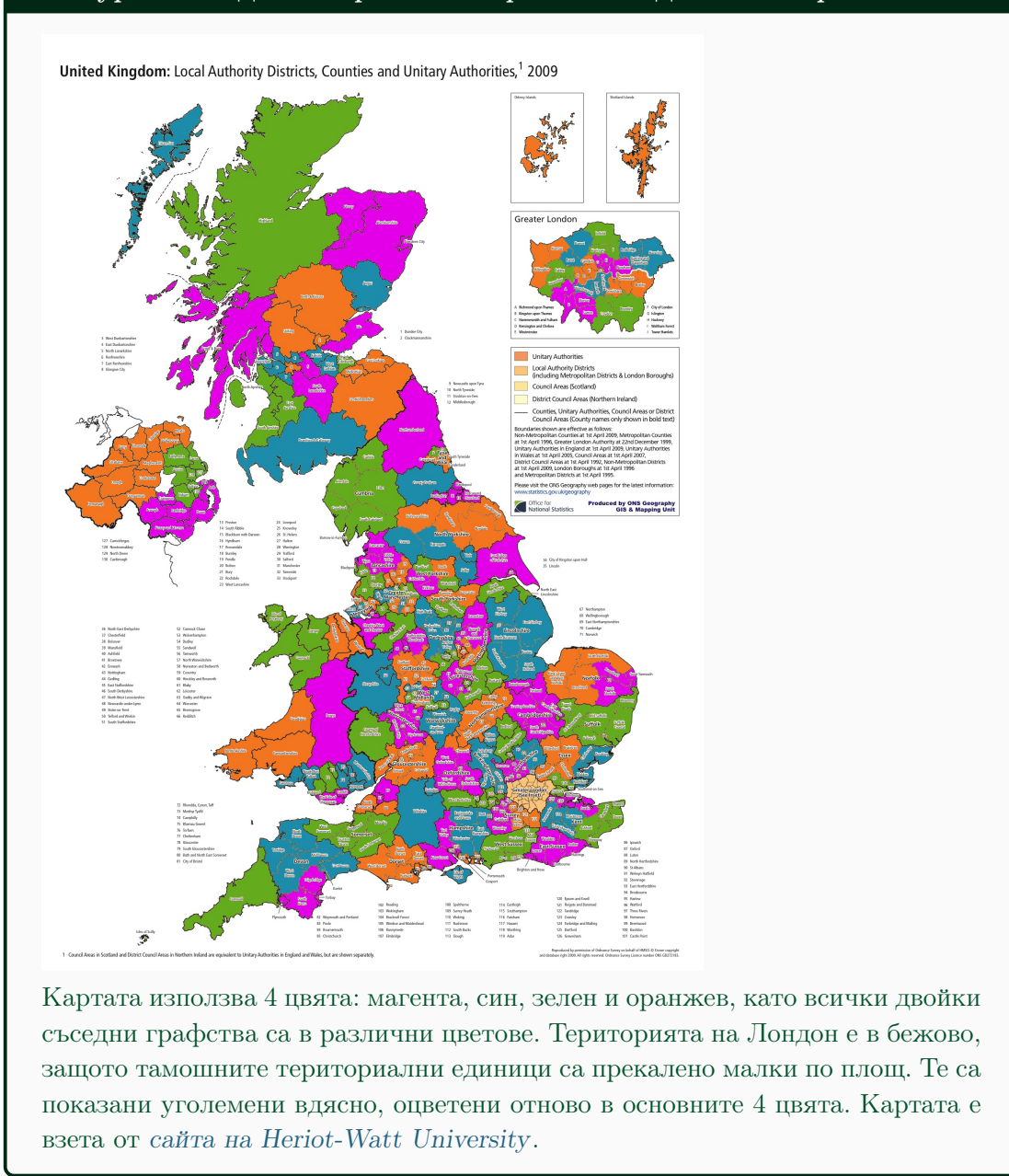
И така, през 19 век английските картографи, правейки административни карти, установили, че 4 цвята са необходими за оцветяване на някои карти и достатъчни за оцветяването на всяка известна карта.

Забележка 2

Лесно може да се даде пример за карта, която иска 4 цвята: представете си една област, обградена от “цикъл” от нечетен брой области, като началната област е съседна на всяка област от “цикъла”, а областите от “цикъла” са съседни по двойки по протежение на цикъла.

Пример за административна карта на Обединеното Кралство е показан на Фигура 33.

Фигура 33 : Административна карта на Обединеното Кралство.



По онова време използването на цветове при печатането било лукс. Колкото повече цветове се използвали, толкова оскъпяването било по-голямо, което мотивирало използването на минимален брой цветове. Картографите започнали да се питат, дали има карта, която да иска повече от 4 цвята, или 4 цвята стигат за всяка карта. След малко ще обясним каква е връзката между оцветяването на карти и графите.

Друга версия—може да я наречем “академичната версия”—за възникването на задачата за оцветяване на карти е описана в книгата на Rouse Ball [4]. Според нея, задачата първоначално била спомената в лекция на Möbius през 1840 г., но истинският интерес към нея започнал през 1850 г. след запитване на един студент към професор De Morgan дали е вярно, че 4 цвята винаги стигат; De Morgan не можел да отговори и се обърнал към прочутия Hamilton, който също не можал да отговори. С времето задачата достигнала до математици като Cayley и Peirce и започнала да интригува математи-

ческата общност. Чак през 1976 г. било доказано, че 4 цвята наистина са достатъчни. Доказателството станало известно като *Теоремата за четирите цвята* на Appel и Haken (вж. [1], [2]), които го редуцирали до систематично разглеждане на 1936 конфигурации. Разглеждането на всички тези случаи било направено с компютър и това бил първият важен резултат в математиката, в чието доказателство се използва резултат от работата на компютър.

Теорема 3: Теорема за четирите цвята, формулировка чрез карти.

Всяка административна карта може да бъде оцветена с не повече от 4 цвята. $\square$

Да се върнем на оцветяването на административни карти, с което започнахме. Задачата да бъде оцветена административна карта по указания начин може да бъде формулирана и чрез графи. Можем да съпоставим граф на картата, където върховете отговарят на териториалните подразделения (графствата в горния пример), а ребро между два върха се слага тогава и само тогава, когато съответните подразделения са съседни.

Забележка 3

Полученият граф се нарича *планарен граф*. Не всеки граф е планарен. Съществуват не-планарни графи, които не може да бъдат оцветени с 4 цвята. Повече информация за планарните графи има в Секция 2.10.

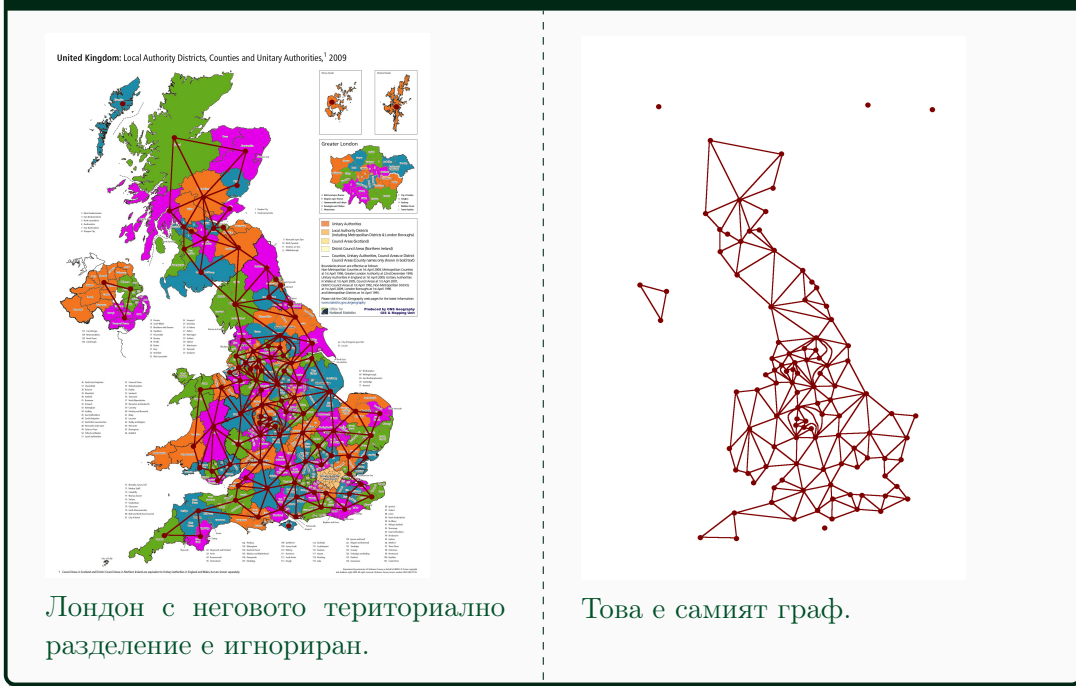
Да бъде оцветена картата с не повече от 4 цвята е същото като да бъде оцветен—съгласно Определение 24—съответният планарен граф с не повече от 4 цвята.

Теорема 4: Теорема за четирите цвята, формулировка чрез графи.

За всеки планарен граф G , $\chi(G) \leq 4$. $\square$

На Фигура 34 вдясно е показан графът на съседствата, който се получава от картата на Фигура 33. На Фигура 34 вляво е показан междинен етап от получаването на този граф.

Фигура 34 : Получаването на графа, съответстващ на картата от Фигура 33.



Тривиално е да се съобрази, че графът на Фигура 34 е 4-оцветим: това е очевидно, щом съответната му карта е оцветена с 4 цвята.

Допълнение 8: За практическата важност на оцветяването.

Оцветяването на върховете на графи се появява, когато графът моделира житейска ситуация, в която има несъвместимост между някакви двойки обекти измежду дадено множество от обекти. Ако несъвместимостта е симетрична, то всяка такава ситуация съвсем естествено се моделира с граф, който изразява несъвместимостта. Върховете му отговарят на обектите, а ребро между два върха се поставя тогава и само тогава, когато съответните обекти са несъвместими. По отношение на реалната ситуация може да ни интересуват две неща:

- да намерим максимален брой обекти, между които няма несъвместимост; пренесено в термините на графите, това е задачата за **намиране на максимална антиклика в графа**.
- да намерим разбиване на множеството от обектите на минимален брой подмножества, такива, че във всяко от тях да няма несъвместимост; това е задачата за **разбиване на върховете на графа на минимален брой антиклики**.

Както ще видим след малко, прието е втората задача да се формулира с така наречените *цветове*: за върховете от всяка от тези антиклики казваме, че са оцветени в един и същи *цвет*, който е различен от цветовете на върховете от останалите антиклики. Ето пример за такава задача, при която графът моделира симетрична несъвместимост. Дадено е някакво помещение за работа. Да кажем, цех. Дадени са някакви дейности $A_1, \dots, A_n$, които може да се вършат в този цех, като всяка дейност си има свое място,

на което може да се върши, и там има машини, специфични за нея. Да кажем, че всяка дейност се върши за единица време. Ние искаме да извършим всички дейности за минимално общо време. Всички дейности биха могли да се вършат едновременно, тъй като има достатъчно място (което би значело да загубим само единица време за всички дейности), но има едно важно ограничение: някои двойки дейности са несъвместими и не могат да се вършат едновременно. Примерно, шлайфане, което отделя прах, и боядисване, което иска да няма прах във въздуха. Заради наличието на такива несъвместимости не може да извършим всички дейности наведнъж. Нека съответният граф, моделиращ несъвместимостта, е G . Ако се интересуваме какъв е максималният брой дейности, които може да извършим наведнъж, то ние всъщност питаме какво е числото на независимостта на G , което означаваме с $\alpha(G)$. Ако се интересуваме в колко единици време най-малко може да бъдат извършени всички дейности, то ние всъщност питаме какво е хроматичното число на G , което означаваме с $\chi(G)$. Понятието “хроматично число на граф” е дефинирано в Определение 25.

За съжаление, и намирането на $\alpha(G)$, и намирането на $\chi(G)$, са изключително трудни за решаване задачи. Те принадлежат на известния клас от задачи **NP-complete**^a. Широко разпространеното мнение (въпреки че никой не е успял да го докаже строго) е, че няма бързи алгоритми за решаването на задачите от класа **NP-complete** върху общи графи. Ако това е така, то при граф G , да кажем, стотици върхове, задачата е практически нерешима^b.

^aТова не е съвсем прецизно. Всъщност, те са от класа **NP-hard**, понеже задачите от **NP-complete** са с еднобитов отговор.

^bАко обаче са поставени някакви допълнителни ограничения, тези задачи може да станат бързо решими. Примерно, по отношение на оцветяването, ако въпросът е, дали графът има хроматично число 2, или не, то тази ограничена версия на задачата се решава ефикасно дори за много големи графи посредством алгоритъма за обхождане в ширина, наричан накратко BFS.

Определение 24: оцветяване на върхове

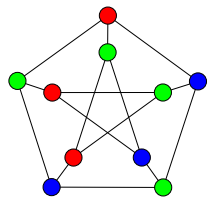
Нека $G = (V, E)$ е граф. *Оцветяване на върховете на G* , или просто *оцветяване на G* , е функция $f: V \rightarrow C$, където C е множество, чиито елементи се наричат *цветове*. Искане е функцията да е такава, че $\forall (u, v) \in E: f(u) \neq f(v)$.

Има смисъл и оцветяването да е сюрекция, за да няма неизползвани цветове.

Като алгоритмична задача, задачата се дефинира за произволни графи, не само за планарни, и е минимизационна—трудно е графът да бъде оцветен с малко цветове. Оцветяване с n цвята би било тривиално, но безинтересно. Лесно се вижда, че всяко множество от върхове от един и същи цвят е антиклика. Така че задачата всъщност е, да се разбие V на колкото е възможно по-малко антиклики.

Определение 25: Хроматично число.

Минималният брой цветове, с които може да бъде оцветен даден граф G , се нарича *хроматичното число на G* . Хроматичното число на G се бележи с $\chi(G)$.



Фигура 35

Пример за оцветяване на граф е показан на Фигура 35 вляво. На фигурата е изобразен графът на Petersen, чиито върхове са оцветени в три цвята: син, червен и зелен. Това е оптимално оцветяване за графа на Petersen, следователно той има хроматично число 3. Ще докажем, че оцветяването е оптимално в смисъл, че графът на Petersen не може да бъде оцветен с по-малко цветове. Забелязваме, че графът на Petersen има нечетен цикъл: примерно, външният контур на нарисувания граф е цикъл с дължина 5.

От друга страна, от Лема 15 на тази страница следва, че ако граф има поне един нечетен цикъл, то хроматичното му число не е 2. Следователно, хроматичното число на графа на Petersen не е 2. Очевидно хроматичното му число не е 1. Следователно, хроматичното му число е поне 3 и показаното оцветяване е оптимално като брой цветове.

Веднага се вижда, че $\chi(G) = 1$ тогава и само тогава, когато G е празният граф—наличието на поне едно ребро влече $\chi(G) \geq 2$. В сила е следният любопитен резултат.

Лема 15

Нека $G = (V, E)$ е непразен граф. $\chi(G) = 2$ тогава и само тогава, когато G няма нечетни цикли.

Без ограничение на общността, нека графът е свързан.

Доказателство, първа част: Да допуснем, че $\chi(G) = 2$. Нека цветовете са бял и черен и функцията на оцветяването е f . С други думи, $f: V \rightarrow \{\text{бял, черен}\}$. Ще докажем, че G няма нечетни цикли. Да допуснем, че G има поне един нечетен цикъл s . Разглеждаме произволен връх u от s . Без ограничение на общността, нека $f(u) = \text{бял}$. Веднага се вижда, че съседите на u в цикъла са черни, техните съседи в цикъла (на разстояние 2 от u в цикъла) са бели, и така нататък, като максимално отдалечените от u в цикъла върхове са точно два и са оцветени в един и същи цвят; и, естествено, са съседи, бидейки върхове от цикъла, което противоречи на 2-оцветимостта.

Това не е прецизно доказателство. Може да го формализираме по следния начин. За всеки нечетен цикъл s , за всеки връх x в s , е вярно, че има точно два максимално отдалечени от x върха (в s), да ги наречем y и z , като $\text{dist}_s(x, y) = \text{dist}_s(x, z) = \left\lfloor \frac{|s|}{2} \right\rfloor$. Без ограничение на общността, нека $f(u) = \text{бял}$. За всеки връх b от цикъла ще докажем по индукция по $\text{dist}_s(x, b)$ следното твърдение:

- $f(b) = \text{бял}$, ако $\text{dist}_s(x, b)$ е четно, и
- $f(b) = \text{черен}$, ако $\text{dist}_s(x, b)$ е нечетно.

където $\text{dist}_s(x, b)$ взема стойности от крайното множество $\{0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{|s|}{2} \right\rfloor\}$. Базата на индукцията е за $\text{dist}_s(x, b) = 0$, тоест за $b = x$: твърдението е вярно. Допускаме, че твърдението е вярно за всеки връх b , такъв че $0 \leq \text{dist}_s(x, b) < \left\lfloor \frac{|s|}{2} \right\rfloor$ (има точно два такива върха) и забелязваме, че твърдението остава вярно за b' , такъв че $\text{dist}_s(x, b') = \text{dist}_s(x, b) + 1$. След като сме доказали твърдението, веднага виждаме, че $f(y) = f(z)$, независимо дали разстоянието в цикъла между кой да е от тях и x е четно или нечетно. Но y и z са съседи и не може да бъдат оцветени в един и същи цвят. Изведеното противоречие опровергава последното направено допускане, а именно, че има поне един нечетен цикъл.

Доказателство, втора част: Да допуснем, че няма нечетни цикли. Ще докажем конструктивно, че $\chi(G) = 2$. Нека x е произволен връх от G . Дефинираме функцията на оцветяването

по следния начин:

$$\forall v \in V : f(v) = \begin{cases} \text{бял,} & \text{ако } \text{dist}(x, v) \text{ е четно} \\ \text{черен,} & \text{ако } \text{dist}(x, v) \text{ е нечетно} \end{cases}$$

Разбира се, дефинирането на функцията не е достатъчно. Трябва да докажем, че тя реализира именно оцветяване на графа. С други думи, трябва да докажем, че няма ребро, двата края на което са в един и същи цвят.

Да допуснем, че има ребро $e \in E$, такова че $e = (y, z)$ и $f(y) = f(z)$. Без ограничение на общността, нека $f(y) = f(z) = \text{бял}$, тоест $\text{dist}(x, y)$ е четно и $\text{dist}(x, z)$ е четно. Нека $\text{dist}(x, y) = 2s$ за някое $s \in \mathbb{N}^+$ и $\text{dist}(x, z) = 2t$ за някое $t \in \mathbb{N}^+$. Веднага се вижда, че $2s \leq 2t + 1$, защото от факта, че има път с дължина $2t$ между x и z и факта, че има ребро между z и y , следва, че има път с дължина $\leq 2t + 1$ между x и y . Аналогично, $2t \leq 2s + 1$. И така:

$$2s \leq 2t + 1$$

$$2t \leq 2s + 1$$

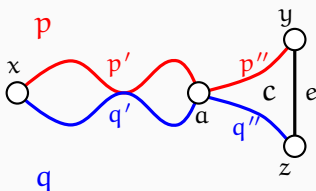
Тогава $2t - 1 \leq 2s \leq 2t + 1 \Leftrightarrow t - \frac{1}{2} \leq s \leq t + \frac{1}{2}$. Но s и t са цели числа, така че $s = t$. Излиза, че y и z са равноотдалечени от x .

Нека p е произволен път с миминална дължина между x и y и q е произволен път с миминална дължина между x и z . Както видяхме, $|p| = |q|$. Единият край на тези два пътя съвпада (върх x), но те може да имат и други общи върхове освен x . Нека върх a е най-отдалеченият от x върх, който е общ за p и q . Нека подпътят на p между x и a включително е p' и подпътят на p между a и y включително е p'' . Нека подпътят на q между x и a включително е q' и подпътят на q между a и z включително е q'' . Това означава, че $p = p' \oplus p''$ и $q = q' \oplus q''$. Фигура 36(а) илюстрира пътищата p и q заедно с реброто $e = (y, z)$.

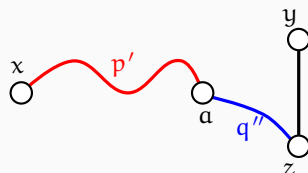
Твърдим, че $|p'| = |q'|$. Да допуснем, че $|p'| \neq |q'|$. Без ограничение на общността, нека $|p'| < |q'|$. Тогава пътят $p' \oplus_a q''$ свързва x със z и е по-къс от q ; това противоречи на направеното по-рано допускане, че q е най-къс път между x и z . Фигура 36(б) дава нагледно доказателство, че $|p'| = |q'|$: ако не беше така, тоест ако $|p'| < |q'|$, заместването на q' с p' в q би дало по-къс между x и z от q .

Доказахме, че $|p'| = |q'|$. Освен това знаем, че $|p| = |q|$ и че $|p| = |p'| + |p''|$ и $|q| = |q'| + |q''|$. Следователно, $|p''| = |q''|$. Нека $|p''| = k$. Тогава $|q''| = k$. Веднага виждаме, че $|c| = 2k + 1$, където $c = (p'' \oplus q'') \odot (z, e, y)$ (вж. Фигура 36(в)). Но това означава, че c е нечетен цикъл, което противоречи на първоначалното допускане, че в G няма нечетни цикли.

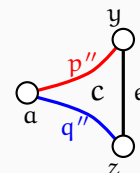
Фигура 36 : Илюстрация на доказателството на Лема 15.



Фигура 36(а)



Фигура 36(б)



Фигура 36(в)

□

Абсолютно очевидно е, че наличието на k -клика в графа G влече $\chi(G) \geq k$, защото само кликата иска k цвята за своето оцветяване. Затова следното твърдение е наречено наблюдение, а не лема.

Наблюдение 1

$\omega(G) \leq \chi(G)$, за всеки граф G .

Лесно може да измислим примери за графи, чието кликово число е строго по-малко от хроматичното число. Примерно, нека G е граф-цикъл с 5 върха. Тогава $\omega(G) = 2$, защото 3-клика няма, но $\chi(G) = 3$, защото има нечетен цикъл (припомняме си Лема 15).

Изследователите на графи са нарекли свойството, кликовото число да е равно на хроматичното, *перфектност*. Но определението на “префектен граф” е по-сложно от изискването $\omega(G) = \chi(G)$. Всеки граф може да бъде модифициран чрез добавяне на достатъчно голяма клика, така че кликовото и хроматичното число да се изравнят. Перфектността на графите изисква всяка част от графа да има определена структура. Това налага следното определение.

Определение 26: Перфектен граф.

Граф G е *перфектен*, ако за всеки индуциран подграф G' на G е вярно, че $\omega(G') = \chi(G')$.

Перфектните графи са интересни както от теоретична, така и от практическа гледна точка. Като пример за последното, задачите за намиране на $\alpha(G)$, $\chi(G)$ и $\omega(G)$ са бързо решими, ако графът е перфектен, въпреки че са практически нерешими[†] в общия случай. Перфектните графи са въведени от великия изследовател на теорията на графите Claude Berge [5]. Примери за перфектни графи ще видим следващи секции.

Лема 16

За всеки граф G , $\chi(G) \cdot \alpha(G) \geq n$.

Доказателство: Както вече отбелязахме, оцветяването на граф G с k цвята е намиране на разбиване $\{V_1, V_2, \dots, V_k\}$ на $V(G)$, такова че всяко от $V_1, \dots, V_k$ е антиклика. Тогава всяко оптимално оцветяване на G , което става с $\chi(G)$ цвята, е разбиване $\{V_1, V_2, \dots, V_{\chi(G)}\}$ на $V(G)$, като всяко от тези множества е антиклика. Но тогава $|V_i| \leq \alpha(G)$ за $1 \leq i \leq \chi(G)$, тъй като по определение не може да има антиклика, по-голяма от $\alpha(G)$. Тогава $\sum_{i=1}^{\chi(G)} |V_i| \leq \chi(G) \cdot \alpha(G)$. Но по принципа на разбиването, $\sum_{i=1}^{\chi(G)} |V_i| = n$. Желаният резултат следва веднага. $\square$

Лесно се забелязва, че съществува следната връзка между “двуделността” на графите и оцветяването на графите.

Лема 17

За всеки граф G , G е двуделен тогава и само тогава, когато $\chi(G) \leq 2$. $\square$

Лема 18

За всеки граф G , $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

[†]Както вече споменахме, те са от класа задачи NP-hard. Детайлното разискване на това понятие е далече извън обсега на тези лекции.

Доказателство: Ще покажем алгоритъм, който оцветява G с не повече от $\Delta(G) + 1$ цвята.

Алгоритъм 1: Алчно ОЦВЕТЯВАНЕ

Вход: граф $G = (\{v_1, v_2, \dots, v_n\}, E)$ и цветове $C_1, \dots, C_{\Delta(G)+1}$.

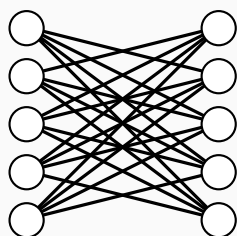
Изход: Оцветяване на G с не повече от $\Delta(G) + 1$ цвята.

- ❶ Оцветяваме v_1 в цвят C_1 и присвои $i \leftarrow 2$.
- ❷ Ако $i > n$, край.
- ❸ В противен случай, нека C' е цветът с най-малък номер, такъв че за всеки $v_j \in N(v_i)$, такъв че $j < i$ (което означава, че v_j вече е оцветен от нашия алгоритъм) цветът на v_j не е C' . Такъв цвят C' очевидно съществува, защото $|N(v_i)| \leq \Delta(G)$. Оцвети v_i в цвят C' , увеличи i с единица и отиди на ❷.

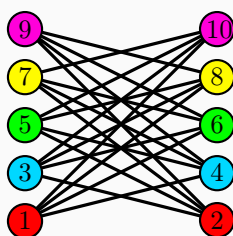
Аргументацията, че такъв “свободен” цвят C' има за всеки пореден връх, е доказателство за коректността на **Алгоритъм 1**. $\square$

Алчно ОЦВЕТЯВАНЕ не е оптимален, тъй като може да използва повече цветове, отколкото са необходими. Наистина, да разгледаме графа G , показан на Фигура 37(а). Този граф е двуделен[†] и е 2-оцветим, съгласно Лема 17. Ако приложим Алчно ОЦВЕТЯВАНЕ с подредба на върховете като на Фигура 37(б), ще използваме 5 цвята. Ако приложим Алчно ОЦВЕТЯВАНЕ с подредба на върховете като на Фигура 37(в), използваме само 2 цвята, което е оптимално.

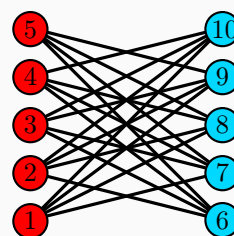
Фигура 37 : Алчно ОЦВЕТЯВАНЕ връща оцветявания с различна мощност при различни наредби на върховете.



Фигура 37(а):
Граф-корона.



Фигура 37(б):
5-оцветяване.



Фигура 37(в):
2-оцветяване.

Допълнение 9: Алчни алгоритми.

Това, което казахме за не-оптималността на Алчно ОЦВЕТЯВАНЕ върху графа-корона от Фигура 37(а) може да бъде обобщено за графи с произволна големина. Да си представим граф-корона, който има $2n$ върха (тогава всеки дял има точно n върха). В зависимост от реда, в който Алчно ОЦВЕТЯВАНЕ разглежда върховете, е възможно

[†]Граф като този на Фигура 37(а) се нарича граф-корона. Всеки граф-корона се получава от един пълен двуделен граф с равномощни дялове, от който са изтрети ребрата на едно перфектно съчетание. “Перфектно съчетание” е дефинирано в Секция 2.13.

той да върне оцветяване с n цвята, докато всъщност има оптимално оцветяване със само 2 цвята (защото графът си остава двуделен).

Следователно, съществуват графи и наредби на върховете им, за които АЛЧНО ОЦВЕТАВАНЕ работи ужасно. “Ужасно” в смисъл, че резултатът, който намира, е много далече от оптималния—примерно, оцветяване с n цвята на граф, който е 2-оцветим. Алгоритъмът работи бързо, но освен бързината му, за нас има значение колко близо до оптималното е намереното решение.

Алгоритъм като АЛЧНО ОЦВЕТАВАНЕ се нарича *алчен алгоритъм*^а, което обяснява и избора на името му. Алчните алгоритми правят итеративно поредица от избирания, като критерият за избиране е прост и локално-оптимален. “Локално-оптимален” означава оптимален само от гледна точка на текущата итерация^б. В случая с АЛЧНО ОЦВЕТАВАНЕ алгоритъмът избира произволен следващ връх v_i . Произволният избор е възможно най-простият избор, но в някакъв тривиален смисъл е оптимален избор, така че алгоритъмът действително може да се класифицира като алчен.

Както видяхме, алчният алгоритъм не решава задачата оптимално винаги. Задачата за оптимално оцветяване на графи е изключително трудна и не е изненада, че избирането на произволен следващ елемент води това, че върху някои примери намереният резултат е много далече от оптималния. Има задачи, които се решават оптимално с алчни алгоритми, но задачата за оцветяване на граф с минимален брой цветове не е от тях.

^аНа английски е *greedy algorithm*.

^бПо-изтънчената, но по-сложна за реализация идея всички тези избирания да се правят от единна глобална гледна точка.

2.8.2 Оцветяване на ребра

Допълнение 10: Пример за необходимостта от оцветяване на ребра.

Да си представим комуникационна мрежа, която се състои от компютри и двупосочни симетрични връзки между някои двойки компютри. Разглеждаме дискретно време от времеви интервали с дължина единица. В рамките на един интервал, даден компютър комуникира с **най-много един друг компютър**, с който е свързан директно. При това комуникацията е двупосочна: и другият може да комуникира с първия. Искаме да направим разписание^с за комуникация между тези компютри, така че всеки да има възможност да комуникира с всички свои съседи, като при това минимизираме общия брой на ползваните времеви интервали.

Задачата може да се моделира с граф. Върховете са компютрите, а ребрата са директните комуникационни линии между компютри. Искаме да разбием множеството от ребрата на **минимален брой** подмножества, такива че в нито едно подмножество да няма инцидентни ребра. Можем да мислим за тези подмножества като за “цветове”, но сега цветове на ребрата, а не на върховете. Множеството от цветовете отговаря точно на интервалите от време: в първия интервал ще разрешим комуникация по линиите, които са оцветени в първия цвят; във втория интервал ще разрешим комуникациите по линиите, оцветени във втория цвят, и така нататък. Подредбата на цветовете няма никакво значение. Важното е, че ребрата от един и същи цвят точно отговарят на комуникациите, които са разрешени в съответния интервал от време. Тъй като няма

инцидентни ребра от един и същи цвят, то няма как в това разписание да има интервал от време, в който някой компютър да комуникира с повече от един съсед.

°На английски, *schedule*.

Определение 27: оцветяване на ребра

Нека $G = (V, E)$ е граф. *Оцветяване на ребрата на G* е функция $h : E \rightarrow C$, където C е множество, чиито елементи се наричат *цветове*. Искане се функцията да е такава, че $\forall e \in E \forall e' \in J(e) : h(e) \neq h(e')$.

Има смисъл оцветяването на ребра да е сюрекция, за да няма неизползвани цветове.

Като алгоритмична задача, оцветяването на ребрата също е минимизационна задача. Минималният брой цветове, с които можем да оцветим ребрата на графа G , се бележи с $\chi'(G)$ и се нарича *хроматичен индекс на G* .

При оцветяването на върхове, очевидна долна граница за хроматичното число беше кликовото число. При оцветяването на ребрата, очевидна долна граница за хроматичния индекс е максималната степен на връх в графа, която бележим с $\Delta(G)$. Лесно можем да измислим пример за граф G , такъв че $\chi'(G) = \Delta(G)$; примерно, четен граф-цикъл. Лесно можем да измислим и пример за граф G , такъв че $\chi'(G) > \Delta(G)$; примерно, нечетен граф-цикъл.

Важен теоретичен резултат на съветския математик Визинг е, че винаги можем да оцветим ребрата на графа с $\Delta(G) + 1$ цвята [16].

Теорема 5: Теорема на Визинг, 1964

За всеки граф G , $\chi'(G) \in \{\Delta(G), \Delta(G) + 1\}$.

□

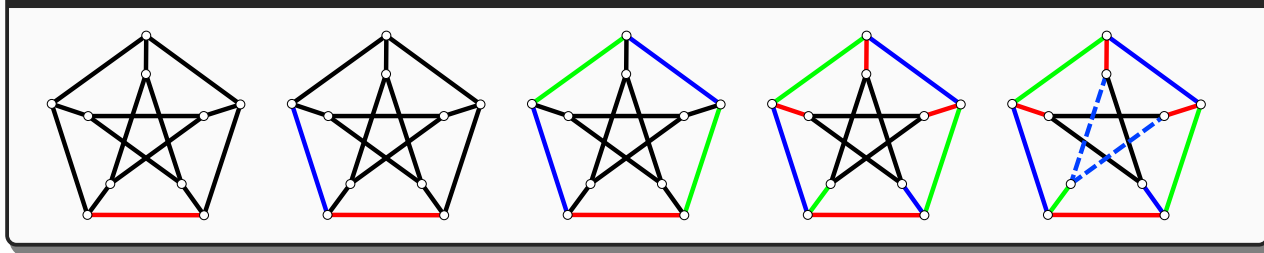
Доказателство на теоремата на Визинг е достъпно онлайн на [тази страница](#).

Лема 19

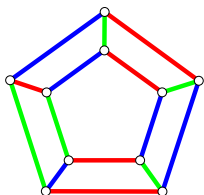
Графът на Petersen има хроматичен индекс 4.

Доказателство: Нека цветовете са червен, зелен и син. Да допуснем, че графът на Petersen има хроматичен индекс 3. Да си представим оцветяването на ребрата с трите цвята като процес, който е показан на Фигура 38 отляво надясно.

Да разгледаме един от циклите на графа. Нека това е цикълът, който е нарисован като външен. Тъй като той има дължина 5, той е нечетен и само за неговото реброво оцветяване са необходими 3 цвята. Лесно се вижда, че точно един от цветовете се среща само веднъж върху този цикъл, а другите два цвята се срещат по два пъти. Без ограничение на общността, нека цветът, който се среща върху точно едно ребро, е червен (което значи, че от останалите четири ребра, две са сини и две са зелени). Без ограничение на общността, червеното ребро да е реброто най-долу от външния цикъл. Без ограничение на общността, нека реброто вляво от него е синьо. Това форсира оцветяване на външния цикъл, показано в средата на фигурата. Това пък форсира оцветяването на петте “радиални” ребра. Сега се налага да оцветим в синьо и двете ребра, показани със син пунктир в десния край на фигурата, защото всяко от тях е инцидентно с едно зелено и едно червено ребро. Но тези две ребра са инцидентни! Това опровергава допускането, че графът на Petersen има хроматичен индекс 3.

Фигура 38 : Невъзможно е да оцветим ребрата на графа на Petersen в 3 цвята.

□

**Фигура 39**

Заслужава да се отбележи, че графът, показан на Фигура 39, който много прилича на графа на Petersen, има хроматичен индекс 3—което се вижда и на фигурата. И двата графа са нарисувани като външен цикъл с форма на правилен петоъгълник, още 5 “радиални” ребра навътре, и още един цикъл с дължина 5 във вътрешността. Разликата е, че при графа на Petersen вътрешният цикъл е нарисован като пентаграма, а при графа на Фигура 39 вътрешният цикъл е нарисован като правилен петоъгълник. Съществена

разлика между двата графа е, че този граф има цикли с дължина 4, а графът на Petersen няма такива.

2.9 Изоморфизъм на графи.

Терминът “изоморфен” означава “със същата форма”[†]. Неформално казано, два графа са изоморфни, ако е изпълнено следното. Нека единият граф е нарисован с произволна рисунка. Нека другият граф е материализиран от топчета и гумени ластичи (от някаква идеална гума, която може да се разтяга и свива неограничено по наше желание), като топчетата отговарят на върховете, а ластичите, на ребрата. И така, графите са изоморфни, ако можем да наложим изработеното от топчета и ластичи съответствие на втория граф върху рисунката на първия граф по такъв начин, че всяко топче от втория да “легне” върху точно една точка от рисунката на първия, и всяко гумено ребро на втория да легне точно върху точно едно от нарисованите ребра на първия. Очевидно за целта трябва двата графа да имат един и същи брой върхове, а също така и един и същи брой ребра. Но, както ще видим след малко, това не е достатъчно, за да бъдат изоморфни.

Определение 28: Изоморфизъм на графи.

Нека $G' = (V', E')$ и $G'' = (V'', E'')$ са графи. Казваме, че G' и G'' са изоморфни, ако съществува биекция $\phi : V' \rightarrow V''$, такава, че

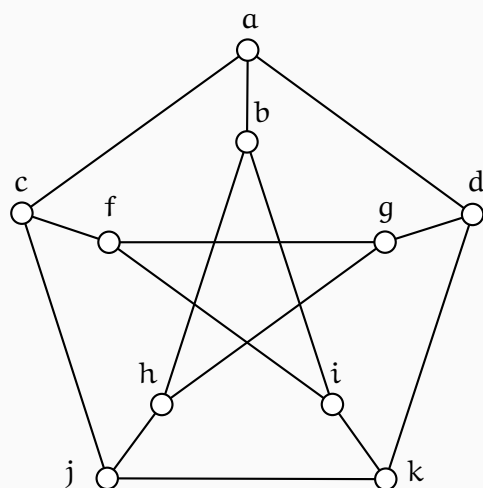
$$\forall \{u, v\} \in \mathcal{V}_2 : (u, v) \in E' \leftrightarrow (\phi(u), \phi(v)) \in E''$$

където $\mathcal{V}_2 = \{X \subseteq V' \mid |X| = 2\}$.

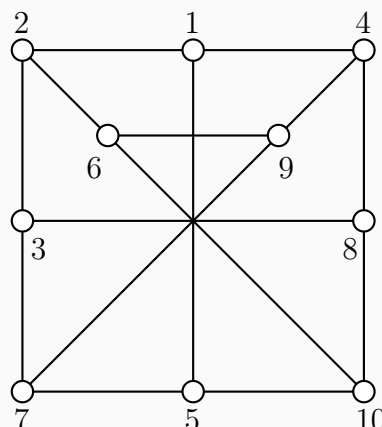
Пример за изоморфни графи е показан на Фигура 40.

[†]Етимологията е следната: на гръцки ἴσος означава “равен”, а μορφή означава “форма”.

Фигура 40 : Тези два графа са изоморфни.



Класически нарисуван граф на Petersen.



Нетипично нарисуван граф на Petersen.

Графът на Фигура 40 вляво е “класически” нарисуван граф на Petersen с имена на върховете. Графът на Фигура 40 вдясно на пръв поглед е доста различен от графа вляво, но всъщност тези графи са изоморфни; графът вдясно е графът на Petersen, нетипично нарисуван, с имена на върховете. Една възможност—със сигурност не единствена—е следната:

$$\begin{array}{llllll} \phi(a) = 6 & \phi(b) = 10 & \phi(c) = 2 & \phi(d) = 9 & \phi(f) = 1 & \\ \phi(g) = 4 & \phi(h) = 8 & \phi(i) = 5 & \phi(j) = 3 & \phi(k) = 7 & \end{array} \quad (2.1)$$

Тогава съответствието на ребрата е следното:

$$\begin{array}{lll} (a, b) \text{ съответства на } (6, 10), & (a, c) \text{ съответства на } (6, 2), & (a, d) \text{ съответства на } (6, 9) \\ (b, h) \text{ съответства на } (10, 8), & (b, i) \text{ съответства на } (10, 5), & (c, f) \text{ съответства на } (2, 1) \\ (c, j) \text{ съответства на } (2, 3), & (d, g) \text{ съответства на } (9, 4), & (d, k) \text{ съответства на } (9, 7) \\ (f, g) \text{ съответства на } (1, 4), & (f, i) \text{ съответства на } (1, 5), & (g, h) \text{ съответства на } (4, 8) \\ (h, j) \text{ съответства на } (8, 3), & (i, k) \text{ съответства на } (5, 7), & (j, k) \text{ съответства на } (3, 7) \end{array}$$

2.10 Планарност на графи.

Изложението на материала в тази секция е близко до изложението в [10].

Тъй като по отношение на планарността множествените ребра[†], ориентацията на ребрата и наличието на примки нямат значение, а свързаните компоненти могат да се разглеждат една след друга, без ограничение ще разглеждаме обикновени, свързани графи, освен ако изрично не кажем друго.

[†]Става дума за мултиграфи, вж. Секция 3.3.

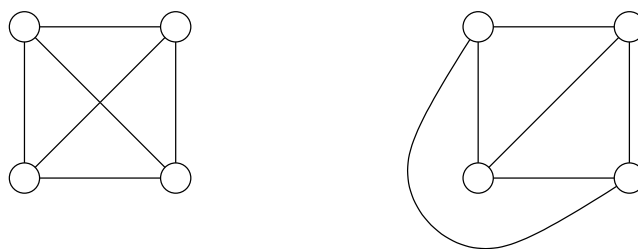
Определение 29: Планарен граф.

Нека $G = (V, E)$ е граф, където $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ и $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$. *Планарно вписване* на G , ако изобщо съществува, е съвкупността от:

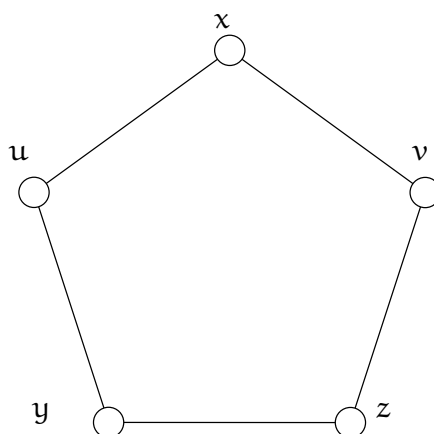
- множество $\mathfrak{V} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ точки в Евклидовата равнина, наречени *планарни върхове*. Нека f е биекция $f: V \rightarrow \mathfrak{V}$.
- множество прости отворени криви $\mathfrak{E} = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$, наречени *планарни ребра*, всяко от които свързва два планарни върха. Следните две условия са изпълнени:
 - съществува биекция $g: E \rightarrow \mathfrak{E}$, такава че $\forall (x, y) \in E$ е вярно, че $f(x)$ и $f(y)$ са краищата на $g(e)$ в равнината.
 - планарните ребра не се пресичат, освен може би в крайните си точки.

G е *планарен граф*, ако има планарно вписване.

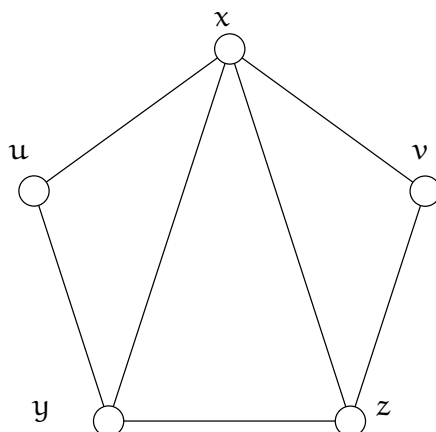
Както ще докажем след малко, не всеки граф има планарно вписване. Полу-формално казано, граф е планарен, ако може да бъде нарисован в равнината така, че кривите, съответстващи на ребрата, да не се пресичат (освен евентуално в общи краища). Това, че някой граф е нарисован с пресичане на (планарните си) ребра не означава, че той няма планарно вписване. Примерно, ето две рисунки на K_4 : в лявата има пресичане на ребра, следователно тя не съответства на планарно вписване, но дясната съответства на планарно вписване:



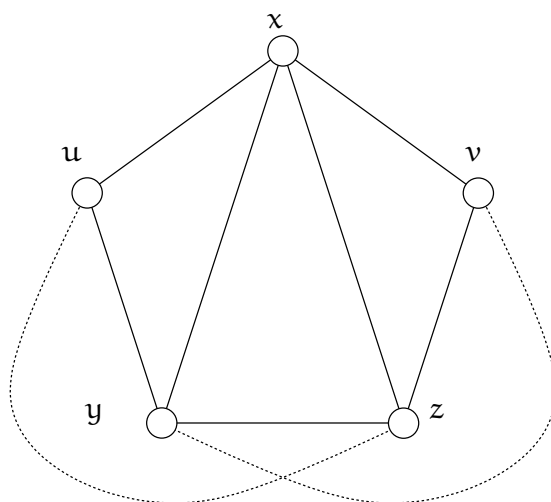
Задачата да се изчисли дали даден граф е планарен или не, тоест дали може да се нарисова в равнината без пресичане на ребра или не, не е тривиална. Следният пример показва това. Нека " $K_5 - e$ " означава K_5 , от който е изтрито произволно ребро. След малко ще докажем, че K_5 не е планарен, а сега ще покажем, че $K_5 - e$ е планарен. Да се опитаме да нарисуваме $K_5 - e$ без пресичане на планарни ребра, като първо сложим периферия от 5 планарни ребра и после сложим още 4 планарни ребра-диагонали. Ето разполагането на периферията:



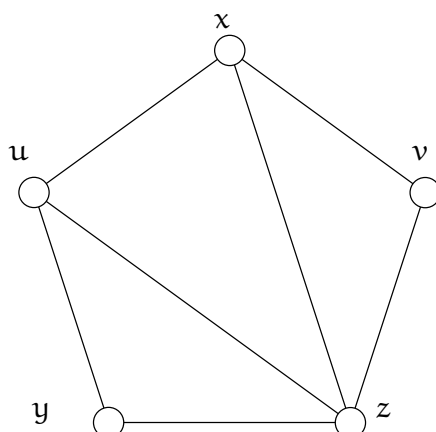
За определеност, нека липсващото ребро е между върховете u и v . Ако първо сложим планарните ребра (x, y) и (x, z) като диагонали:



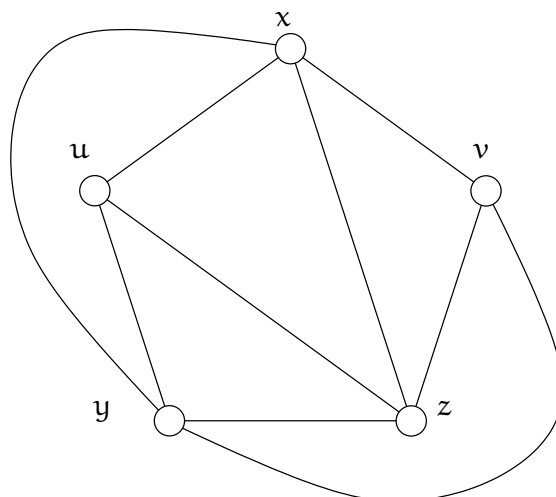
очевидно няма как да сложим останалите две планарни ребра (u, z) и (v, y) без пресичане на планарни ребра:



Ако обаче започнем с (u, z) и (x, z) като диагонали:



можем да добавим и останалите (x, y) и (y, v) без пресичане и да се убедим, че K_5 — е е планарен:



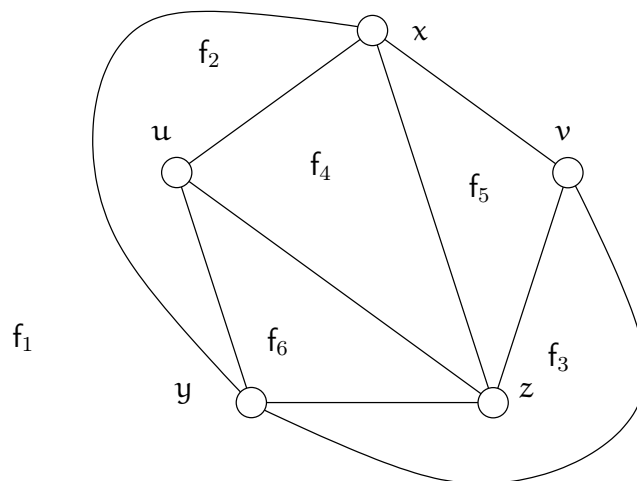
И така, виждаме, че ако разглеждаме планарното вписване като процес, в който планарните ребра се слагат в равнината едно след друго, редът на слагането им има значение! Дори ако графът е планарен, може да не успеем да довършим планарното вписване при неподходящо разполагане на първите планарни ребра.

2.10.1 Лица на планарните вписвания.

Определение 30: Лица на планарно вписване.

Нека G е планарен граф и $\mathfrak{G}$ е някое негово планарно вписване. Да махнем от равнината всички планарни върхове и ребра. Тази операция води до разпадането на равнината на свързани райони, които наричаме *лицата* на $\mathfrak{G}$. Точно едно от лицата е неограничено – това е *външното лице*, а останалите са *вътрешните лица*.

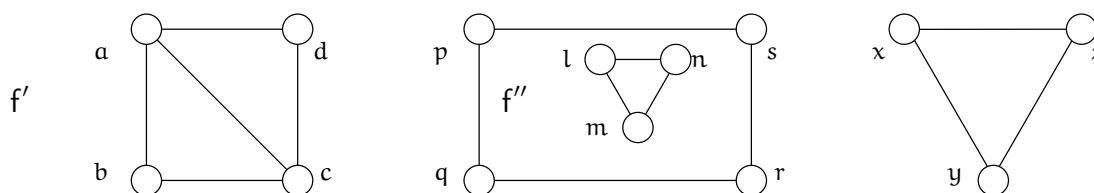
Примерно, следното планарно вписване на K_5 – е има лица $f_1, \dots, f_6$. Външното лице е f_1 :



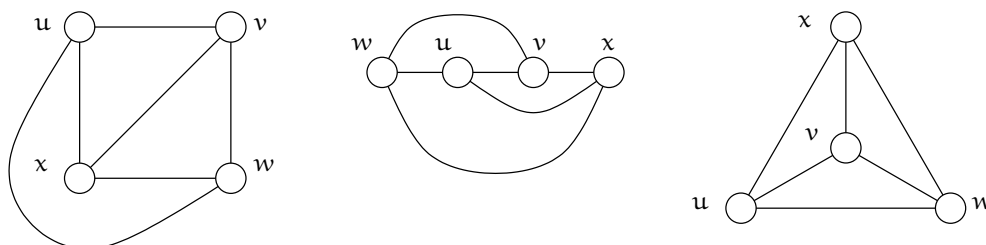
Очевидно е, че при вписванията на свързани планарни графи, всяко лице има точно един *ограждащ цикъл*[†]. Ограждащият цикъл е цикълът от точно тези планарни ребра и върхове, които участват в границата на лицето. В последния пример, ограждащият цикъл на f_1 е цикълът (x, y, v, x) . Надолу ще видим, че ограждащият цикъл може да е прост или да не е прост. При несвързаните планарни графи, едно лице може да има няколко ограждащи

[†]Това е в сила и за свързаните планарни мултиграфи с примки.

цикъла. Като пример да разгледаме следното планарно вписване на граф с четири свързани компоненти. Лицето f' има 3 ограждащи цикъла: (a, b, c, d, a) , (p, q, r, s, p) и (x, y, z, x) , а лицето f'' има два ограждащи цикъла (p, q, r, s, p) и (l, m, n, l) :



Дефиницията на планарно вписване говори за точки и криви в равнината, а това са геометрични понятия. Ние ще гледаме на планарните вписвания не на ниво геометрия, а на по-високо ниво[†]. Конкретните координати на планарните върхове и конкретните форми на планарните ребра няма да ни интересуват. По причини, които ще станат ясни след малко, следните три планарни вписвания на K_4 ще считаме за еквивалентни, тоест едно и също вписване, нарисувано по три различни начина:



И така, на лицата няма да гледаме като на конкретни геометрични фигури, а по-общо, като на графови цикли, но цикли в дадена *посока*. Да изберем една посока на въртене в равнината, примерно обратната на часовниковата стрелка. Тогава всяко лице описваме чрез изреждане на върховете на ограждащия го цикъл във вече избраната посока[‡]. Дали посоката е по или срещу часовниковата стрелка е без значение, важното е за всички лица посоката да е една и съща. Всяко планарно вписване ще считаме за определено, ако за всяко лице е казано кой е ограждащият го цикъл (описан в избраната посока). За простота ще считаме, че лице и неговият ограждащ цикъл са синоними.

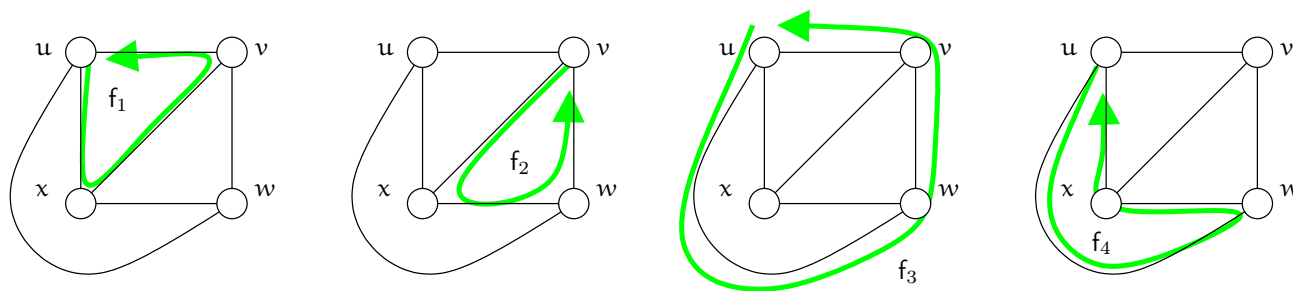
Такова описание на вписването не е геометрично, а е чисто *комбинаторно*. Да направим конкретна рисунка с конкретна геометрия на точките и линиите от комбинаторно описание би било задача на изчислителната геометрия. Още един пример – планарното вписване на $K_4 = (\{u, v, w, x\}, \{(u, v), (u, w), (u, x), (v, w), (v, x), (w, x)\})$ се идентифицира чрез четирите си лица:

$$\begin{aligned} f_1 &= (u, x, v, u) \\ f_2 &= (v, x, w, v) \\ f_3 &= (u, w, x, u) \\ f_4 &= (u, w, v, u) \end{aligned}$$

За да се убедим, че лицата имат такива описания, да ги разгледаме подробно едно по едно:

[†]По-високото ниво е топологията.

[‡]Ако не използваме термина “цикъл”, можем да кажем неформално, че за всяко лице описанието е последователността от върхове, които би видяло “двумерно същество” (живеещо в равнината), което обикаля систематично дадено лице по границата в избраната посока, докато не се върне там, откъдето е започнало обиколката.



Дали в описанието на лицата ще записваме началния връх два пъти, както правим тук, или веднъж, примерно $f_1 = (u, x, v)$, не е съществено, а е въпрос на избор.

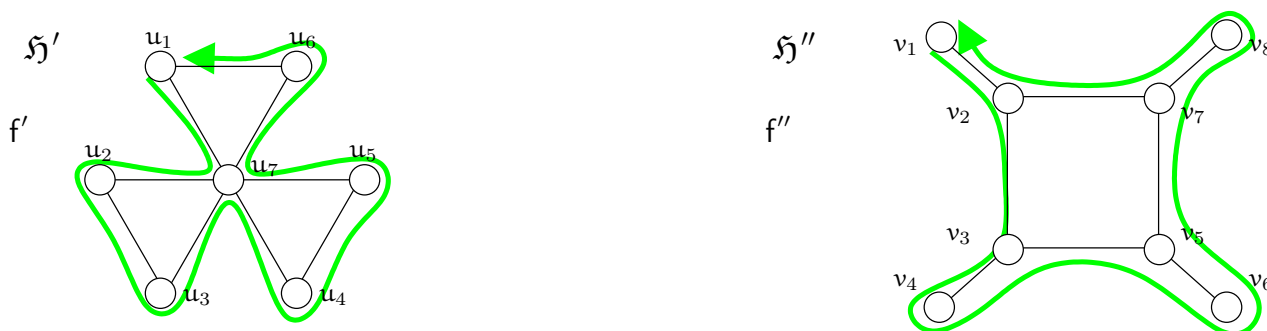
Заслужава да се отбележи, че по отношение на комбинаторното описание на вписванията, външното лице не се отличава от другите лица по нищо. Тоест, ако искаме от комбинаторното описание да направим геометрично описание, можем да изберем което искаме лице за външно. Този факт има и друга интерпретация. Планарните графи са точно графите, които могат да бъдат вписани в сферата – това се доказва тривиално със стереографска проекция[†] между равнината и сферата. Тъй като върху сферата за външно лице не може да се говори, очевидно външното лице в равнината не е съществено различно от другите лица и всяко лице от сферичното вписване може да бъде проектирано върху външно лице в равнината при подходяща стереографска проекция.

От изложеното дотук читателят може да остане с впечатлението, че:

- ① за всеки планарен граф, броят на лицата е един и същи за всяко вписване,
- ② за всеки планарен граф, лицата са едни и същи за всяко вписване,
- ③ за всяко вписване, всеки две лица са различни в комбинаторния смисъл, и
- ④ лицата винаги имат прости ограждащи цикли.

Както ще видим, ① е вярно твърдение—което ще покажем в подсекция 2.10.2—а ②, ③ и ④ не са верни и сега ще ги опровергаем.

Да разгледаме твърдение ④. Всяко лице има *прост* ограждащ цикъл тогава и само тогава, когато графът има поне три върха и няма срязващи върхове. Ще оставим този факт без доказателство, като само ще дадем два примера за планарни графи H' и H'' , всеки от които има поне един срязващ връх. Ще нарисуваме планарните им вписвания, $\mathfrak{H}'$ и $\mathfrak{H}''$ с външни лица съответно f' и f'' .



[†]Виж http://en.wikipedia.org/wiki/Stereographic_projection

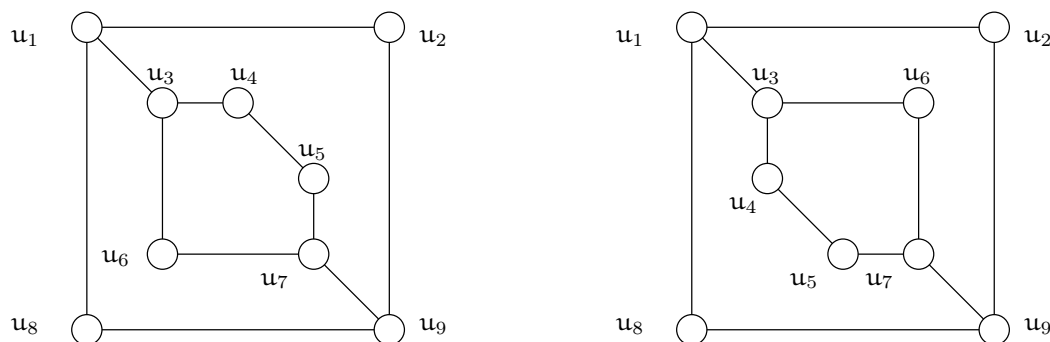
Очевидно

$$f' = (u_1, u_7, u_2, u_3, u_7, u_4, u_5, u_7, u_6, u_1)$$

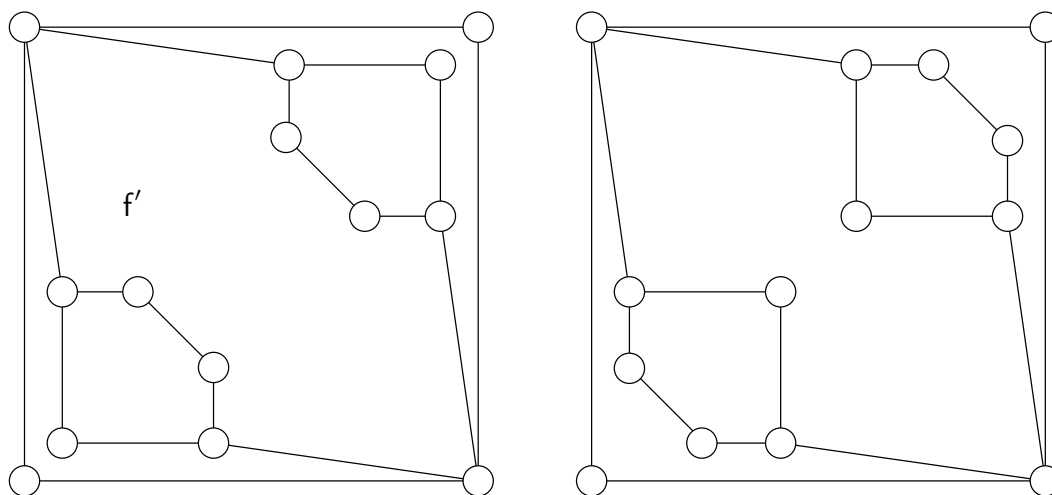
$$f'' = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_3, v_5, v_6, v_5, v_7, v_8, v_7, v_2, v_1)$$

тоест ограждащите ги цикли не са прости.

Сега ще опровергаем твърдение ② като покажем, че на един и същи планарен граф може да съответстват различни планарни вписвания. При това, различни не като геометрия, а като комбинаторни описания на лицата. Да разгледаме следните две планарни вписвания на един и същи планарен граф:

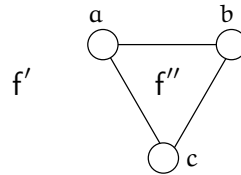


За да се убедим, че вписванията са различни, достатъчно е да забележим, че във вписването отляво има лице, в което присъстват u_8 и u_6 , а във вписването отдясно няма такова лице. Последният пример показва различни вписвания на един и същи граф, но едното от тях може да бъде получено от другото чрез преименуване на върховете: ако разменим местата на имената u_2 и u_8 във вписването вдясно, ще получим вписването вляво. Може да се дадат примери за различни вписвания на един и същи граф, които не могат да бъдат получени едно от друго чрез просто преименуване, например:



Графът е един и същ и в двете двете вписвания, и броят на лицата е 6, но вписването вляво има лице f' с 10 върха, а нито едно от шестте лица вдясно не е с 10 върха. Показахме, че лицата може да съответстват на цикли, които не са прости, както и че един и същи планарен граф може да има различни планарни вписвания.

И накрая ще опровергаем твърдение ③. Да разгледаме следното планарно вписване на K_3 :



И f' , и f'' имат описание (a, c, b, a) . Тъй като идентифицираме лице с неговото описание, излиза, че двете лица, в комбинаторния смисъл, не са различни.

2.10.2 Характеристика на Euler. Следствия от нея.

Теорема 6: Теорема на Euler.

За всеки свързан планарен мултиграф G с n върха и m ребра е вярно, че всяко планарно вписване на G има един и същи брой лица, да речем f лица, като е изпълнено

$$n - m + f = 2 \quad (2.2)$$

Това равенство е известно като Характеристика на Euler.

Казвайки “характеристика”, имаме предвид характеристика на равнината. В Секция 2.17 разглеждаме други двумерни повърхнини, за вписванията на графи в които (2.10.2) не е в сила.

Доказателство: Да разгледаме произволно вписване $\mathfrak{G}$ на G . Щом G е свързан, той има поне едно покриващо дърво D . Да разгледаме планарното вписване $\mathfrak{D}$ на D , индуцирано от $\mathfrak{G}$. Очевидно D има $n - 1$ ребра, а $\mathfrak{D}$ има точно едно лице и $n - 1$ планарни ребра.

D се получава от G чрез премахване на $m - (n - 1) = m - n + 1$ ребра – факт, който лесно може да бъде доказан чрез изследване на алгоритъм, която последователно премахва ребра, участващи в цикли, докато не остане свързан граф без цикли, тоест дърво. Аналогично, $\mathfrak{D}$ се получава от $\mathfrak{G}$ чрез премахване на $m - n + 1$ планарни ребра. При всяко премахване на планарно ребро, точно две лица на вписването се сливат в точно едно лице, значи броят на лицата намалява с единица. Тъй като $\mathfrak{D}$ има едно лице, следва, че $\mathfrak{G}$ има точно

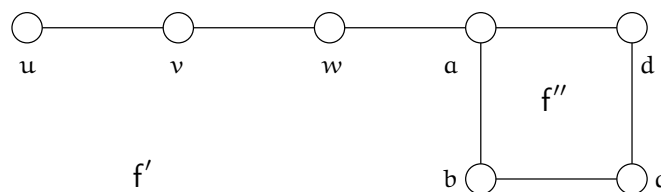
$$\underbrace{1}_{\text{брой на лицата на } \mathfrak{D}} + \underbrace{m - n + 1}_{\text{брой на премахнатите ребра от } \mathfrak{G}} = m - n + 2$$

лица. Тъй като този резултат не зависи от избора на планарно вписване, следва че броят на лицата $f = m - n + 2$ е инварианта на графа, независеща от конкретното вписване. Щом $f = m - n + 2$, очевидно $n - m + f = 2$. $\square$

Определение 31: Степен на лице на планарно вписване.

За всяко планарно вписване $\mathfrak{G}$ на произволен планарен граф G , за всяко лице t на $\mathfrak{G}$, *степената на t* е дължината на цикъла, ограждащ t . Степента на t бележим с $d(t)$.

Като пример ще разгледаме степените на двете лица f' и f'' в следното вписване:



Степента на f'' е очевидно 4. Степента на f' е 10, тъй като ограждащият цикъл $(u, v, w, a, b, c, d, a, w, v, u)$, който не е прост, има дължина 10.

Лема 20

За всеки планарен (мулти) граф G с m ребра, ако $\mathfrak{G}$ е произволно планарно вписване на G с f на брой лица $t_1, t_2, \dots, t_f$, в сила е:

$$\sum_{i=1}^f d(t_i) = 2m$$

Доказателство: Всяко ребро се брой точно два пъти при сумирането на степените на лицата. $\square$

Допълнение 11: Характеристиката на Euler и Платоновите тела.

Теорема 6 има интересна геометрична интерпретация. Теоремата в този си вид е твърдение за неориентирани графи, включително и за мултиграфи с примки. В частност, тя е в сила за многостени (които са геометрични обекти), тъй като на всеки многостен M естествено съответства граф G : върховете на графа съответстват на върховете на многостена, а ребрата на графа съответстват ръбовете на многостена. Графът G е планарен, понеже:

- многостенът може да бъде трансформиран в сфера чрез континуална трансформация, така че самият многостен естествено задава вписване на графа в сферата;
- както вече отбелязахме на стр. 55, графите, които може да бъдат вписани в сферата са точно графите, които може да бъдат вписани в равнината.

Следователно, лицата на многостена съответстват на лицата на вписването. Приложена за многостени, Теорема 6 казва, че за всеки многостен:

$$\text{броят на върховете} - \text{броят на ребрата} + \text{броят на лицата} = 2$$

Числото 2 се нарича *Ойлерова характеристика на многостените*. По-общо казано, Ойлеровата характеристика описва свойство на повърхнината, в която се вписват графите, съответстващи на многостените—тази повърхнина е сферата. Както ще видим в Секция 2.17, съществуват повърхнини, по-сложни от сферата, примерно тороидът, чиято характеристика не е 2. Оригиналната статия на Ойлер на латински, както и преводи на английски и немски, може да бъдат намерени [на този сайт](#) (вж. [8]).

От особен интерес са *регулярните многостени*, наречени още *Платонови тела*^a.

Определение 32: Регулярен многостен

Регулярен е всеки многостен $\mathfrak{M}$, такъв че:

- стените на $\mathfrak{M}$ са конгруентни многоъгълници и
- във всеки връх на $\mathfrak{M}$ се срещат един и същи брой стени.

Добре известен факт, който ще докажем след малко, използвайки теорията на графите, е, че съществуват точно пет Платонови тела:

1. регулярният тетраедър,
2. кубът, който може да наречем регулярен хексаедър,
3. регулярният октаедър,
4. регулярният додекаедър и
5. регулярният икосаедър.

Във всяко от тези имена, коренът е гръцката дума $\epsilon\delta\rho\alpha$, която означава *сядане, седене*, и оттам *лице на геометрично тяло*. Префиксът пред корена идва от броя на стените на съответното тяло:

1. *тетра*- идва от старогръцката дума $\tau\acute{\epsilon}\tau\tau\alpha\rho\epsilon\varsigma$, която означава *четири*,
2. *хекса*- идва от старогръцката дума $\epsilon\acute{\xi}$, която означава *шест*,
3. *окта*- идва от старогръцката дума $\acute{o}\kappa\tau\omega$, която означава *осем*,
4. *додека*- идва от старогръцката дума $\delta\acute{o}\delta\epsilon\kappa\alpha$, която означава *дванадесет*, и
5. *икоса*- идва от старогръцката дума $\epsilon\iota\chi\omicron\sigma\iota$, която означава *двадесет*.

Фигура 41 показва петте Платонови тела. Фигурата е взета от [уикипедия](#).

Фигура 41 : Петте платонови тела.



Ще покажем, че няма други Платонови тела, разглеждайки ги като графи, вписани в сферата (тоест, планарни графи). За целта ще използваме Теорема 6. Да разгледаме произволно Платоново тяло, като всъщност разглеждаме съответния му граф $G = (V, E)$, а също така разглеждаме и вписването на G в сферата. Нека F е множеството от лицата на това вписване. Тъй като всички върхове са от една и съща степен, с d_v означаваме степента на кой да е връх. Аналогично, тъй като всички лица на сферичното вписване са от една и съща степен, с d_f означаваме степента на кое да е лице. Нека n , m и f съответно означават броя на върховете, ребрата и лицата на вписването. От Лема 1 знаем, че $\sum_{u \in V} d(u) = 2m$. Тогава

$$nd_v = 2m \quad (2.3)$$

От Лема 20 знаем, че $\sum_{t \in F} d(t) = 2m$. Тогава

$$fd_f = 2m \quad (2.4)$$

От Теорема 6 знаем, че

$$n - m + f = 2 \quad (2.5)$$

Замествайки n и f в (2.5) съгласно (2.3) и (2.4), получаваме

$$\frac{2m}{d_v} - m + \frac{2m}{d_f} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{d_v} + \frac{1}{d_f} = \frac{1}{2} + \frac{1}{m} \quad (2.6)$$

Но $m > 0$. Тогава

$$\frac{1}{d_v} + \frac{1}{d_f} > \frac{1}{2} \quad (2.7)$$

От неравенство (2.7) и факта, че $d_v \geq 3$ и $d_f \geq 3$ лесно извеждаме, че единствените пет възможности за стойностите на d_v и d_f са:

$$d_v = 3, d_f = 3 \quad (2.8)$$

$$d_v = 3, d_f = 4 \quad (2.9)$$

$$d_v = 3, d_f = 5 \quad (2.10)$$

$$d_v = 4, d_f = 3 \quad (2.11)$$

$$d_v = 5, d_f = 3 \quad (2.12)$$

Първата възможност (2.8) съответства на тетраедъра, втората възможност (2.9) съответства на хексаедъра (куба), третата възможност (2.10) съответства на додекаедъра, четвъртата възможност (2.11) съответства на октаедъра и петата възможност (2.12) съответства на икосаедъра.

^a На английски, *Platonic solids*.

Теорема 7: Връзка между m и n при планарните графи.

За всеки планарен (не мулти) граф G , може и да не е свързан, с поне две ребра, ако n е броят на върховете и m е броят на ребрата, то

$$m \leq 3n - 6$$

Доказателство: Нека G е свързан – ако не е свързан, доказваме неравенството за свързаните компоненти и сумираме по компонентите. И така, G е свързан планарен граф. Нека лицата са f на брой, наречени $t_1, t_2, \dots, t_f$. Имаме:

$$n - m + f = 2 \quad \text{съгласно Теорема 6}$$

$$n - 2 = m - f \quad \text{очевидно}$$

$$3n - 6 = 3m - 3f \quad \text{очевидно}$$

$$3n - 6 = m + 2m - 3f \quad \text{очевидно}$$

$$3n - 6 = m + \sum_{i=1}^f d(t_i) - 3f \quad \text{Съгласно Лема 20}$$

Забележете, че $\sum_{i=1}^f d(t_i) - 3f$ е неотрицателно количество за всеки планарен граф с поне две ребра, защото всяко лице има ограждащ цикъл с дължина поне 3, тоест $d(t_i) \geq 3$ за всяко i . Щом $\sum_{i=1}^f d(t_i) - 3f \geq 0$, следва, че $3n - 6 \geq m$. $\square$

Следствие 5

K_5 не е планарен граф.

Доказателство: Директно от Теорема 7: K_5 има 10 ребра, 5 върха, и $10 \not\leq 3 \cdot 5 - 6$. $\square$

Следствие 6

За всеки планарен граф, $m < 3n - 6$ тогава и само тогава, когато всяко негово планарно вписване има поне едно лице от степен поне 4. $\square$

И така, горната граница $3n - 6$ за броя на ребрата е достижима, и то точно тогава, когато всички лица са от степен точно 3.

Определение 33: Триангулация.

Всяко планарно вписване, в което всяко лице е от степен 3, ще наричаме *триангулация*.

За удобство и по-кратко изразяване може да игнорираме разликата между триангулация като геометрично понятие, от една страна, и графа, на който е тази триангулация, от друга страна. Тогава терминът “триангулация” ще бъде приложим и за графи; а именно за графите, чието планарно вписване е триангулация. Следният алгоритъм трансформира произволно свързано планарно вписване на граф в триангулация.

Алгоритъм 2: Алгоритъм ТРИАНГУЛИРАНЕ

Вход: Планарно вписване $\mathfrak{G}$.

Изход: Триангулация.

- ❶ Ако всички лица на $\mathfrak{G}$ са от степен 3, върни $\mathfrak{G}$.
- ❷ В противен случай, нека S е произволно лице на $\mathfrak{G}$ от степен ≥ 4 . Нека u и v са два различни произволни планарни върха от S , между които няма планарно ребро. Добави към $\mathfrak{G}$ планарно ребро между u и v , така че новото ребро да не пресича други планарни ребра във вътрешни точки. Отиди на ❶.

Съгласно Следствие 6, ТРИАНГУЛИРАНЕ връща планарно вписване на граф, за който $m = 3n - 6$. Той “раздробява” лицата от степен ≥ 4 на лица от степен точно 3. Ние вече видяхме пример за работата на ТРИАНГУЛИРАНЕ, без да сме използвали в явен вид името на алгоритъма. На фигурата на стр. 51 е показан граф-цикъл с дължина 5, който не е триангулация (съответно не е вярно, че $m = 3n - 6$, защото $5 \neq 3 \cdot 5 - 6$). После добавяме ребрата (u, z) и (x, z) , но това все още не е триангулация (съответно не е вярно, че $m = 3n - 6$, защото $7 \neq 3 \cdot 5 - 6$). И накрая добавяме ребрата (x, y) и (y, v) (вж. фигурата на стр. 53), с което полученият граф, който наричаме $K_5 - e$, е триангулация (съответно $m = 3n - 6$, защото $9 = 3 \cdot 5 - 6$).

Вярността на следната лема е очевидна.

Лема 21

Всяка триангулация може да бъде генерирана от ТРИАНГУЛИРАНЕ при подходящ вход.
□

Допълнение 12: За индуктивно дефинираните триангулации.

Ще разгледаме индуктивно определение на понятието “триангулация”. То се оказва некоректно в смисъл, че **не е** еквивалентно на Определение 33. Важният извод тук е, че не всяко индуктивно определение на вече дефинирано понятие, което индуктивно определение звучи смислено, е непременно еквивалентно на първоначалното не-индуктивно определение.

Всяко индуктивно определение е алгоритъм, който генерира елементите на някакво множество, започвайки от **база**, която се състои от един или повече елемента на множеството, и прилагайки **индуктивна стъпка**, която—ако **вече** са генерирани някакви елементи на множеството—генерира нови елементи от досега генерираните, използвайки една или повече **присъединителни операции**. В общия случай, индуктивната стъпка се прилага неограничен брой пъти, защото по правило индуктивно генерираните множества са безкрайни, но всеки отделен елемент на множеството се генерира чрез краен брой стъпки. Това ни позволява да казваме “алгоритъм”, а не “процедура”: алгоритмите задължително трябва да завършват след краен брой стъпки.

Алгоритъм 3: Алгоритъм Индуктивно Триангулиране

Вход: Равнината без нищо вписано в нея.

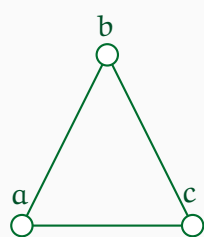
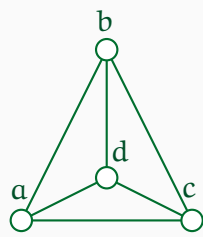
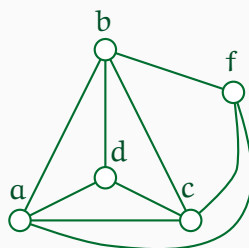
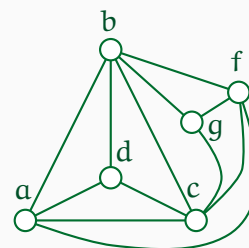
Изход: Триангулация.

- ❶ (База) Ако в равнината не е вписано нищо, сложи планарно вписване на K_3 .
- ❷ (Индуктивна стъпка) Ако вече е вписана някаква триангулация $\mathfrak{G}$, вземи произволно нейно лице S , сложи в негова вътрешна точка един нов планарен връх x и свържи x с трите върха на S чрез планарни ребра, които не се пресичат, и така получи нова триангулация $\mathfrak{G}'$.

Присъединителната операция в случая е добавяне на нов връх и нови ребра, инцидентни с него.

Фигура 42 илюстрира работата на този алгоритъм.

Фигура 42 : Алгоритъм, строящ триангулации.

Фиг.42(а):
започваме с
3-клик.Фиг.42(б): слагаме
нов връх d и три
ребра.Фиг.42(в): слагаме
нов връх f и три
ребра.Фиг.42(г): слагаме
нов връх g и три
ребра.

Читателят може да се изкуши да допусне, че ИНДУКТИВНО ТРИАНГУЛИРАНЕ може да генерира всяка възможна триангулация, аналогично на ТРИАНГУЛИРАНЕ (вж. Лема 21).

Хипотеза 1:

Алгоритъм ТРИАНГУЛИРАНЕ може да генерира всяка възможна триангулация.

Ако Хипотеза 1 беше вярна, то доказателството на теоремата за четирите цвята (вж. Теорема 3) би било абсолютно тривиално. Тривиално упражнение е да се докаже със структурна индукция, че обектите, генерирани от ИНДУКТИВНО ТРИАНГУЛИРАНЕ, са оцветими с не повече от четири цвята:

- В базата на индуктивната дефиниция, очевидно K_3 е 4-оцветим;
- в индуктивната стъпка, ако допуснем, че триангулацията $\mathfrak{G}$ е 4-оцветима, то планарните върхове на лицето S ползват не повече от 3 от тях и имаме “свободен” цвят, в който да оцветим новодобавения връх x , така че $\mathfrak{G}'$ получава оцветяване с не повече от четири цвята, такова че на всяко планарно ребро двата края са различни цветове.

Очевидно оцветяването на планарното вписване с не повече от четири цвята определя 4-оцветяване на съответния планарен граф-триангулация. И така, графите-триангулации, които ТРИАНГУЛИРАНЕ генерира, са 4-оцветими. Съгласно Хипотеза 1, това са всички триангулации. Очевидно всеки планарен граф може да се получи от някакъв граф-триангулация чрез изтриване на ребра. Но изтриването на ребра не може да промени 4-оцветимостта. Следователно, всеки планарен граф е 4-оцветим.

Ясно е, че доказателството на теоремата за четирите цвята не може да е толкова просто. Невъзможно е водещи математици в света да се опитват да докажат теоремата с десетилетия и да не забележат, че има доказателство със сложността на задача за домашно. Хипотеза ?? не може да е вярна.

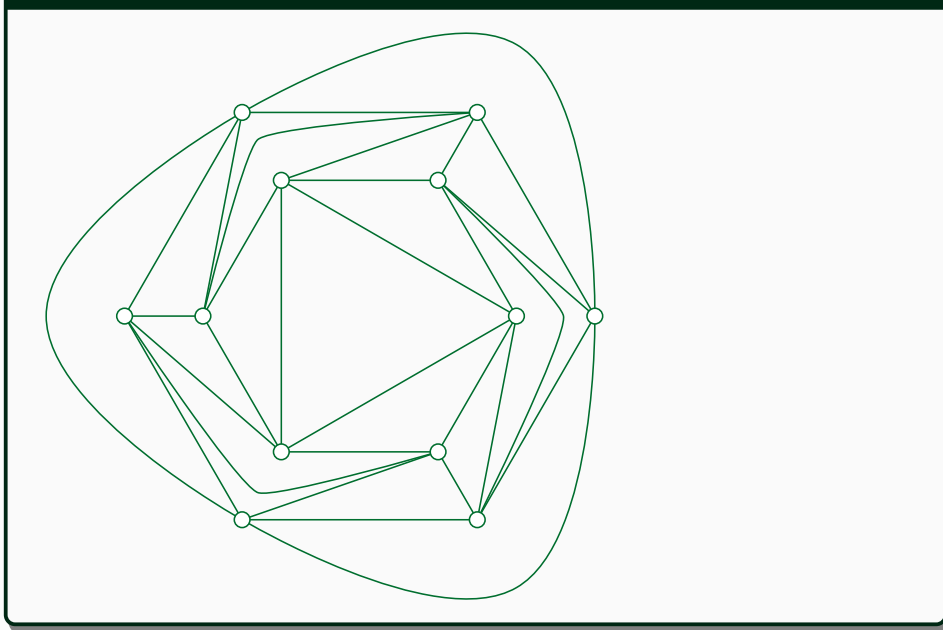
Сега ще опровергаем Хипотеза 1 с контрапример—триангулация, която не може да бъде генерирана от ИНДУКТИВНО ТРИАНГУЛИРАНЕ. Ще започнем от факта, че всеки планарен граф има връх от степен ≤ 5 (вж. Лема 22, която е надолу в тази секция). Първо да се запитае, може ли да има планарен граф, в който **всеки** връх е от степен

точно 5? От най-общи съображения, такъв граф трябва да има поне 6 върха, а именно някакъв връх от степен 5 и неговите 5 съседа. В действителност, такъв граф $G = (V, E)$ трябва да има поне 12 върха по следните причини:

- Както вече знаем, $m \leq 3n - 6$.
- От друга страна, знаем, че $\sum_{v \in V} d(v) = 2m$, а $\sum_{v \in V} d(v)$ трябва да е $5n$, така че $m = \frac{5n}{2}$.

От $m \leq 3n - 6$ и $m = \frac{5n}{2}$ веднага следва $n \geq 12$. А дали тази долна граница е достижима? Тоест, дали има 5-регулярен планарен граф с 12 върха? Фигура 43 показва, че такъв граф има.

Фигура 43 : 5-регулярен планарен граф с 12 върха.



Графът на Фигура 43 е контрапример за Хипотеза 1. Той не може да бъде генериран от ИНДУКТИВНО ТРИАНГУЛИРАНЕ. За да се убедим, че е така, достатъчно е да съобразим, че ИНДУКТИВНО ТРИАНГУЛИРАНЕ генерира триангулации (и съответно, графи), които имат връх от степен 2 (базата) или 3 (индуктивната стъпка). А графът на Фигура 43 няма такива върхове, тъй като е 5-регулярен.

Теорема 8

За всеки планарен (не мулти) двуделен граф G с поне две ребра, ако n е броят на върховете и m е броят на ребрата, то

$$m \leq 2n - 4$$

Доказателство: Нека G е свързан – ако не е свързан, доказваме неравенството за свързаните компоненти и сумираме по компонентите. И така, G е свързан планарен двуделен граф.

Нека лицата са f на брой, наречени $t_1, t_2, \dots, t_f$. Имаме:

$$n - m + f = 2 \quad \text{съгласно Теорема 6}$$

$$n - 2 = m - f \quad \text{очевидно}$$

$$2n - 4 = 2m - 2f \quad \text{очевидно}$$

$$2n - 4 = m + \frac{2m - 4f}{2} \quad \text{очевидно}$$

$$2n - 4 = m + \frac{\sum_{i=1}^f d(t_i) - 4f}{2} \quad \text{Съгласно Лема 20}$$

Забележете, че $\sum_{i=1}^f d(t_i) - 4f$ е неотрицателно количество за всеки планарен двуделен граф с поне две ребра, защото всяко лице има ограждащ цикъл с дължина поне 4, тоест $d(t_i) \geq 4$ за всяко i . Щом $\sum_{i=1}^f d(t_i) - 4f \geq 0$, следва, че $2n - 4 \geq m$. $\square$

Следствие 7

$K_{3,3}$ не е планарен граф.

Доказателство: Директно от Теорема 8: $K_{3,3}$ има 9 ребра, 6 върха, и $9 \not\leq 2 \cdot 6 - 4$. $\square$

Определение 34: Подразделяне и свиване на ребра

Нека $G = (V, E)$ е произволен граф и $e = (v, w)$ е произволно ребро в G . *Подразделянето на e ^a* е трансформирането на G в

$$G' = (V \cup \{u\}, (E \setminus \{e\}) \cup \{(v, u), (u, w)\})$$

където u е връх, такъв че $u \notin V$.

Обратната операция на подразделянето е *свиване на две ребра чрез връх от степен 2*^b. Нека x е произволен връх от степен 2 в G , такъв че ако y и z са съседите на x , то $(y, z) \notin E$. Нека $e_1 = (y, x)$ и $e_2 = (x, z)$. Свиването на двете ребра e_1 и e_2 чрез връх x , или просто *свиването на x* , е трансформирането на G в

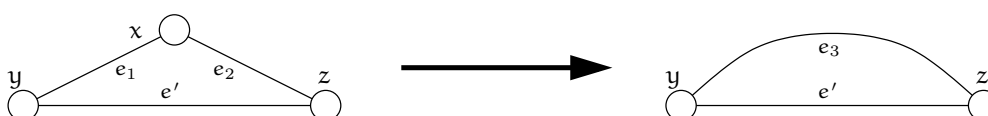
$$G'' = (V \setminus \{x\}, (E \setminus \{e_1\} \cup \{e_2\})) \cup \{e_3\}$$

където e_3 е ребро с краища y и z , такова че $e_3 \notin E$.

^aНа английски терминът е *edge subdivision*.

^bНа английски терминът е *edge contraction through a vertex of degree 2*.

В определението на свиване на ребро искаме двата съседа y и z на x да не са съседни помежду си преди свиването. Без това ограничение може да имаме проблем: ако y и z са съседни преди свиването и реброто между тях е e' , след свиването ще имаме две ребра, e' и e_3 , между y и z :



Ако допускаме мултиграфи, проблем няма, степените на y и z са същите като преди свиването и броят на лицата—ако говорим за планарно вписване—остава същият. Но обикновено в приложенията на тази теория говорим за не-мулти графи, следователно всяко ребро се идентифицира с краищата си. Това означава да слеем e' и e_z в едно ребро, с което намаляваме степените на y и z с единица. Намаляването на степените на върхове, които не биват свивани, е нежелано, понеже идеята на свиването на връх от степен 2 е останалата част на графа да не бъде засегната. Освен това, при такова сливане на паралелни ребра, ако говорим за планарно вписване, броят на лицата намалява. За да избегнем всичко това, искаме двата върха-съседни на свивания връх, да не са съседни помежду си.

Определение 35: Хомеоморфизъм.

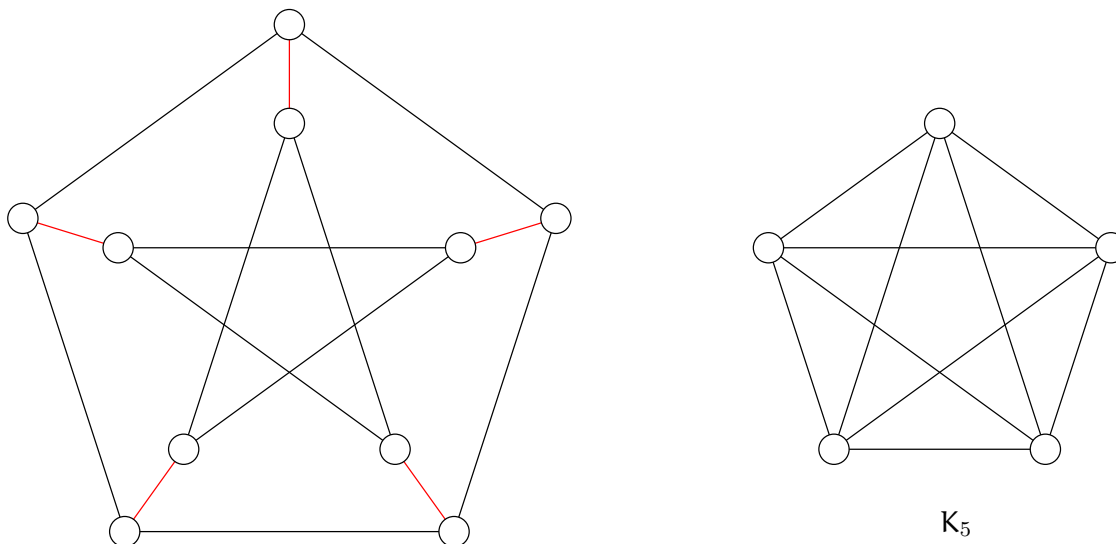
Два графа са хомеоморфни, ако единият може да бъде получен от другия чрез последователност от подразделяния и свивания на ребра.

Теорема 9: Теорема на Kuratowski

Граф е планарен тогава и само тогава, когато не съдържа подграф, хомеоморфен на K_5 или $K_{3,3}$.

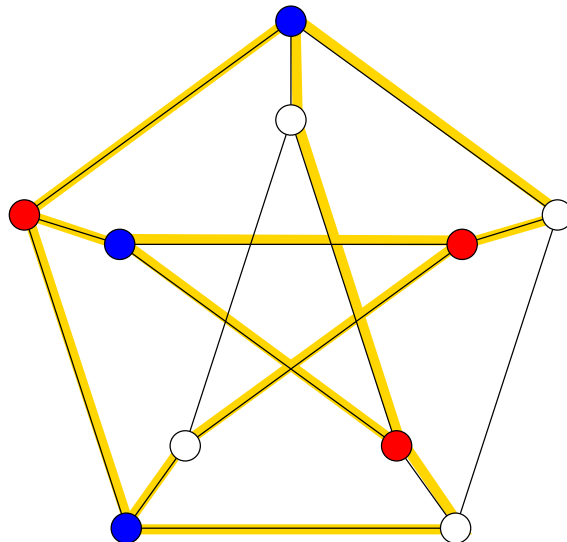
Доказателство: В едната посока, доказателството следва веднага от Следствие 5, Следствие 7 и очевидния факт, че ако граф е планарен, всеки негов подграф също е планарен. В другата посока, доказателството е дълго и много техническо, поради което го прескачаме. Пълното доказателство може да бъде намерено в [10, стр. 77–80, Theorem 3.5]. $\square$

Да разгледаме графа на Petersen. Той не е планарен. Да докажем това с теоремата на Kuratowski. Естествено е да се опитаме да докажем това чрез K_5 , понеже графът на Petersen съдържа, в някакъв смисъл, K_5 в себе си – ако на следната рисунка на графа на Petersen “колабираме” петте червени ребра, за всяко от тях идентифицирайки двата му края, ще получим точно K_5 :



Но графът на Petersen не съдържа подграф, хомеоморфен на K_5 . За да видим, че е така, да съобразим, графът на Petersen е 3-регулярен, а в K_5 е 4-регулярен; от друга страна, всеки два хомеоморфни графа очевидно имат един и същи брой върхове от степен, различна от 2. Следователно, колабирането на ребра в посочения смисъл е различна операция от свиването на ребра.

Доказателството с теоремата на Kuratowski, че графът на Petersen не е планарен, използва $K_{3,3}$, а не K_5 . Действително, графът на Petersen съдържа подграф, хомеоморфен на $K_{3,3}$. На следната рисунка е показан един такъв подграф, нарисуван върху графа на Petersen. Неговите върхове от степен, различна от две, 2 са означени с червен и син цвят (очевидно, върховете от единия дял са червени, а от другия са сини). С жълто са означени простите непресичащи се пътища в този подграф – ако в тях свием върховете от степен 2 (това са белите върхове), действително ще получим $K_{3,3}$.



Лема 22

Във всеки планарен граф има връх от степен, не по-голяма от 5.

Доказателство: Да допуснем противното: съществува планарен граф $G = (V, E)$, такъв че $\forall v \in V (d(v) \geq 6)$. Нека $|V| = n$ и $|E| = m$. Тогава

$$\sum_{v \in V} d(v) \geq 6n \quad \leftrightarrow \quad \sum_{v \in V} d(v) = 6n + k \text{ за някое неотрицателно } k$$

Известно е, че $\sum_{v \in V} d(v) = 2m$. Следователно,

$$2m = 6n + k \quad \leftrightarrow \quad m = 3n + \frac{k}{2}$$

Но тъй като $\frac{k}{2}$ е неотрицателно, този извод противоречи на Теорема 7 на стр. 60. $\square$

Теоремата за четирите цвята (Теорема 3) е изключително сложен теоретичен резултат. По-слабото твърдение, Теоремата за петте цвята, има достатъчно просто доказателство, така че да го разгледаме в пълнота.

Теорема 10: Теорема за петте цвята.

Всеки планарен граф е 5-оцветим.

Доказателство: Нека цветовете са жълт, зелен, син, червен и кафяв. С цел по-кратко изложение няма да правим строга разлика между планарен граф, неговите върхове и ребра, от една страна, и планарното му вписване със своите планарни върхове и ребра, от друга страна.

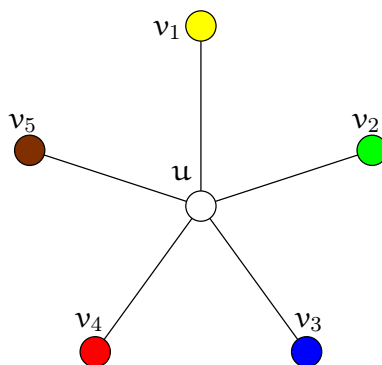
Ще докажем теоремата с индукция по броя на върховете. За база ще вземем планарните графи с не повече от 5 върха. Те са очевидно 5-оцветими. Да допуснем, че всеки планарен граф с $\leq n$ върха е 5-оцветим. Да разгледаме произволен планарен граф $G = (V, E)$ с $n + 1$ върха. Съгласно Лема 22, $\exists v \in V (d(v) \leq 5)$. Нека $G - u$ е графът, получен от G след изтриване на u . Очевидно $G - u$ също е планарен, освен това $G - u$ има n върха. Съгласно индуктивното предположение, $G - u$ е 5-оцветим. Нека $N(u)$ означава множеството от съседите на u в G . По конструкция, $|N(u)| \leq 5$.

Ако $|N(u)| \leq 4$, то очевидно съществува поне един цвят измежду петте, без ограничение на общността нека това е зеленият цвят, който не се използва от никой връх в $N(u)$. Тогава оцветяваме u в зелено и сме готови. Нека $|N(u)| = 5$. Ако има поне един цвят измежду петте, който не се използва от никой връх в $N(u)$, доказателството се извършва аналогично. Нека всичките пет цвята се ползват от петте върха на $N(u)$.

Нека $N(u) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$. Без ограничение на общността, нека в планарното вписване на G , тези върхове се срещат в последователност

$$(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$$

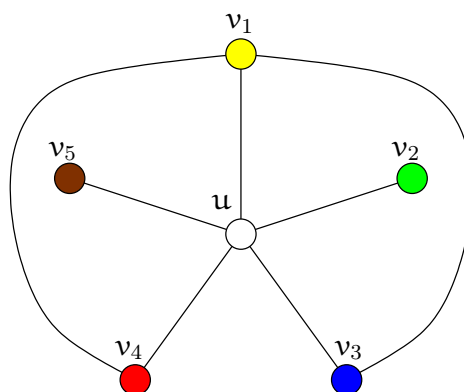
ако обикаляме около u в дадена посока, да речем, по часовниковата стрелка, и нека цветовете им са, както е показано на следната рисунка:



Между всеки два от върховете $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ може да има или да няма ребро, но тези възможности не са независими. Да разгледаме десетте ненаредени двойки $\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_1, v_5\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_2, v_5\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_5\}, \{v_4, v_5\}$. Да наречем тези двойки, *потенциалните ребра*. От тях, $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\}, \{v_1, v_5\}$ са *късите* потенциални ребра, а останалите, *дългите*. Подчертаваме, че това разграничение между къси и дълги потенциални ребра е възможно само след указването на разположението на върховете в равнината; ако разсъждавахме на ниво граф (а не на ниво планарно вписване) без да уточним някаква кръгова подредба между $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, такова категоризиране на потенциалните ребра би било безсмислено. Още дефинираме, че кое да е потенциално ребро *присъства* в G , ако в G има ребро с краища съответните два върха.

Тривиално е да се покаже, че поне едно от потенциалните ребра не присъства в G . Ако допуснем обратното, в G би имало подграф[†], изоморфен на K_5 . Сега ще покажем по-силно твърдение: поне три от дългите потенциални ребра не присъстват в G , независимо от това дали и колко къси потенциални ребра присъстват. Доказателството се основава на наличието на петта ребра $(u, v_1), \dots, (u, v_5)$ в (планарното вписване на) G . Лесно се вижда, че най-много две дълги потенциални ребра може да се разположат в равнината, така че да няма пресичане нито на дълги ребра, нито на дълго ребро с някое от (u, v_i) за $1 \leq i \leq 5$. Следната рисунка онагледява възможността да има две дълги ребра, инцидентни с v_1 :

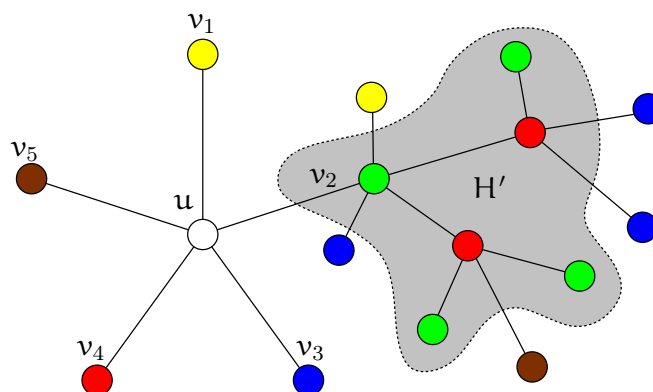
[†]Става дума за индуцирания от $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ подграф.



Следователно, за поне два върха от $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, без ограничение на общността нека това са v_2 и v_4 , е вярно, че те не са съседни в G . Останалата част на доказателството използва допускането, че между v_2 и v_4 няма ребро. Подчертаваме, че никъде надолу *няма да използваме допускане*, че има ребра (v_1, v_3) и (v_1, v_4) . Последната рисунка имаше за цел да покаже, че не може да има повече от две дълги ребра. Дълги ребра може изобщо да няма.

Цветовете на v_2 и v_4 са зелено и червено. Нека H е подграфът на G , индуциран от зелените и червените върхове.

Случай I: v_2 и v_4 се намират в различни свързани компоненти на H . Нека H' е свързаната компонента на H , която съдържа v_2 . Примерно:



Правим следната смяна на цветовете на върховете:

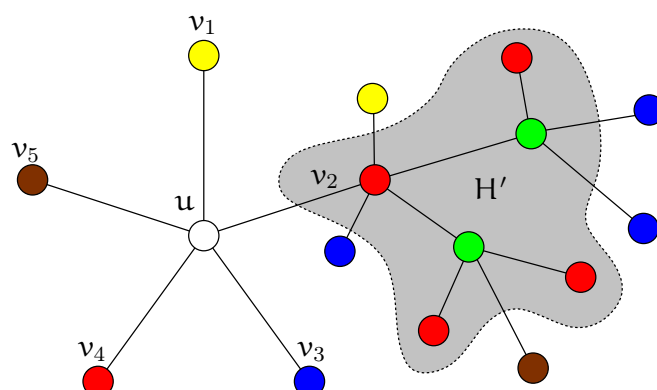
- всеки връх на H' , който е бил зелен преди смяната на цветовете, става червен,
- всеки връх на H' , който е бил червен преди смяната на цветовете, става зелен,
- цветът на всеки връх в G , който не е в H' , не се променя.

Ще докажем, че тази смяна на цветовете представлява легално оцветяване на върховете на графа. Тоест, че не може да се получи ребро, двата края на което са оцветени в един цвят.

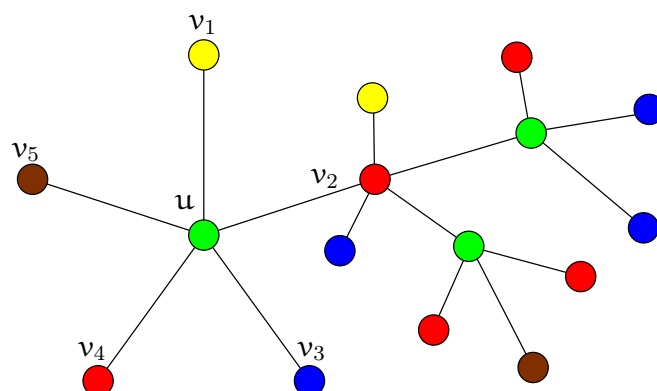
1. ребрата, нито един връх на които не е от H' , очевидно не могат да имат два края от един цвят след смяната;
2. да разгледаме произволно ребро (x, y) , точно единият край на който, да речем x , е в H' . Преди смяната на цветовете, x е бил червен или зелен, y е бил жълт, син или кафяв. След смяната, x е пак в един от цветовете червен или зелен (обратния на предния цвят), а y си остава в цвят, който не е нито червен, нито зелен. Следователно, двата края на (x, y) не са оцветени в един цвят след смяната.

3. да разгледаме произволно ребро (x, y) от H' . Без ограничение на общността нека x е бил червен, а y , зелен преди смяната. Тогава след смяната x е зелен, а y , червен. Следователно, двата края на (x, y) не са оцветени в един цвят след смяната.

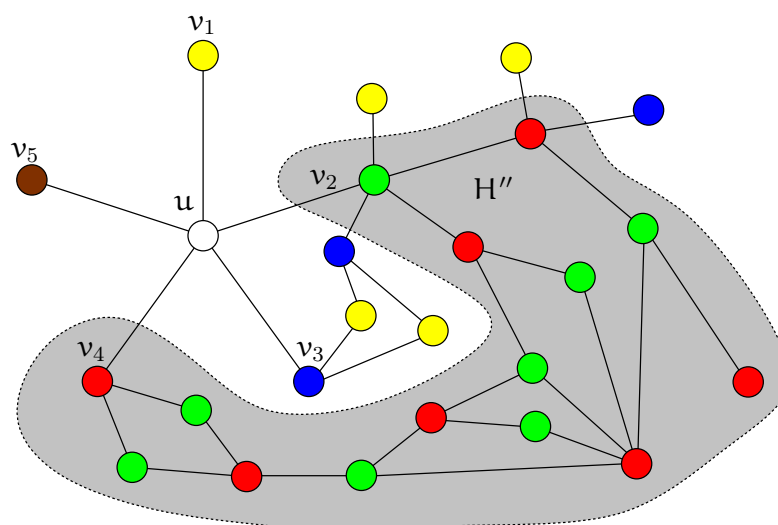
Доказахме твърдението. Ето как изглежда горният пример след смяната на цветовете на H' :



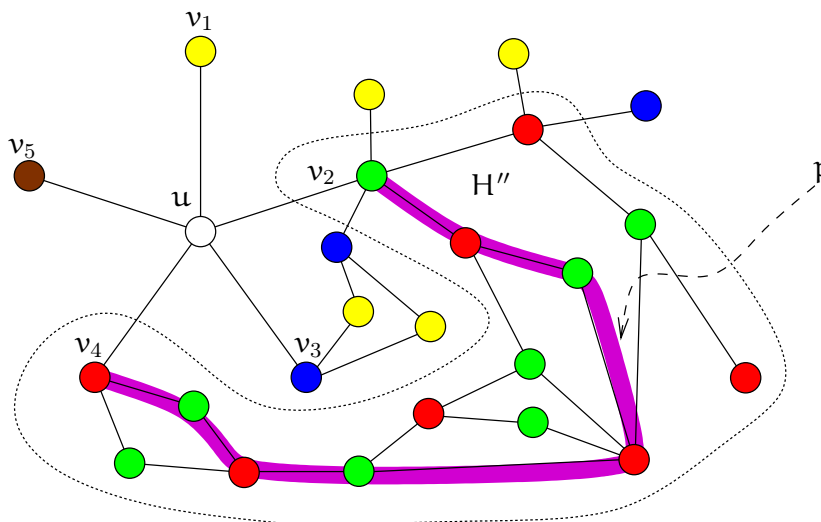
След смяната на цветовете, цветът, в който е бил оцветен v_2 преди смяната, а именно зеления, е “свободен” в смисъл, че нито един съсед на u не го ползва. Оцветяваме u в него и получаваме 5-оцветяване на G :



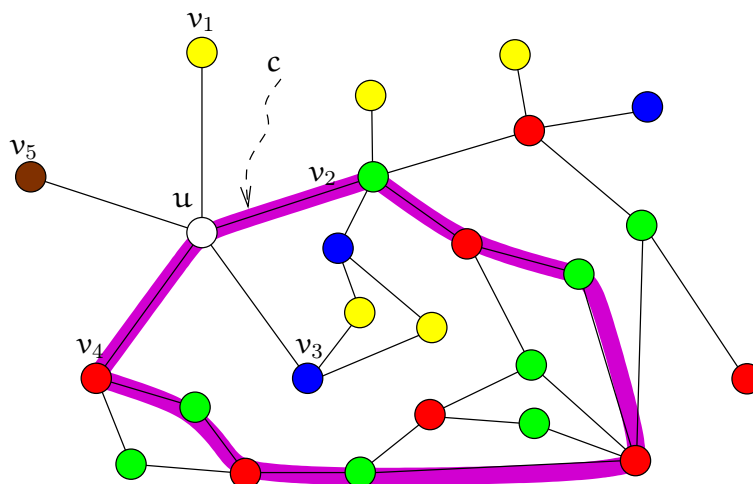
Случай II: v_2 и v_4 се намират в една и съща свързана компонента на H . Нека тази свързаната компонента на H бъде наречена H'' . Примерно:



В този случай е безсмислено да сменяме оцветяването на върховете от H'' като в **Случай I**—червено в зелено и обратно—защото няма да “освободим” нито червения, нито зеления цвят за u ; u би имал и червен, и зелен съсед след смяната. Но забелязваме, че v_1 и v_3 в този случай са, в някакъв смисъл, изолирани един от друг. Формално, в G не съществува алтерниращ жълто-син път с краища v_1 и v_3 . Сега ще докажем този факт. Тъй като H'' е свързан, съществува алтерниращ зелено-червен прост път между v_1 и v_3 в H'' . На следната рисунка е показан такъв примерен път p , очертан в пурпурно:

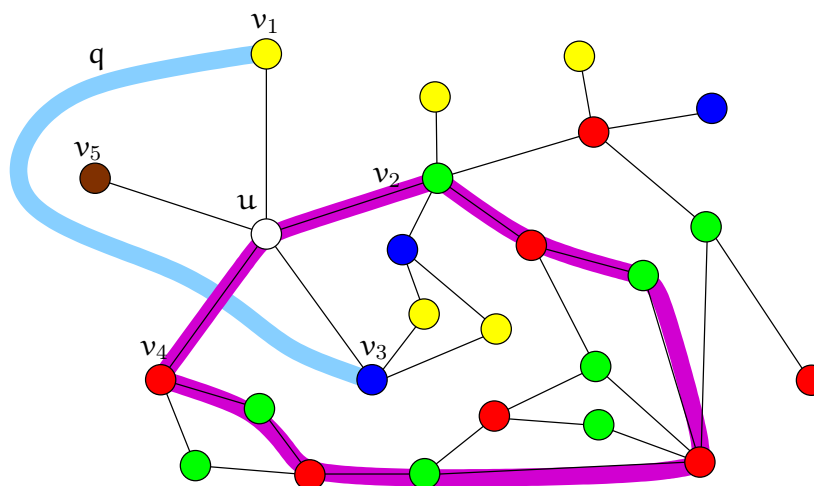


Заедно с ребрата (u, v_4) и (u, v_2) и връх u , пътът p образува прост цикъл c в G :

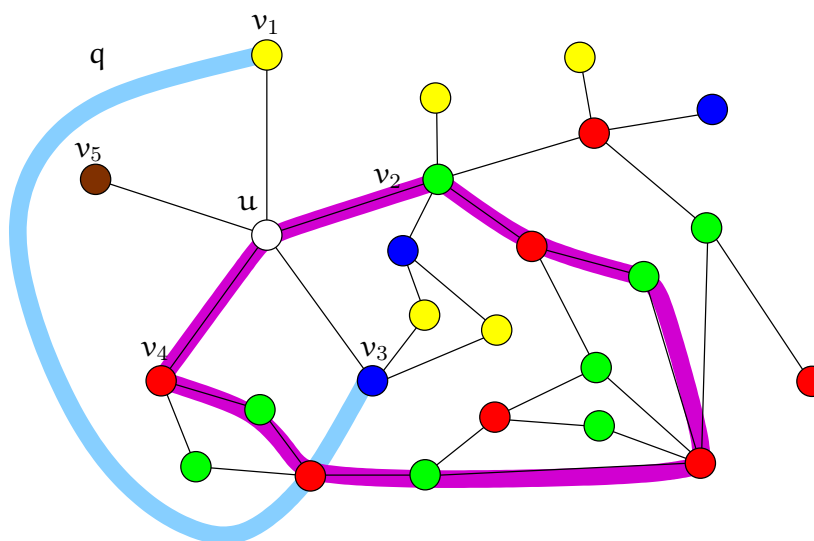


Спрямо цикъла c има точно два района на равнината и очевидно всеки върховете v_1 и v_3 се намира в един от тези райони. Следователно:

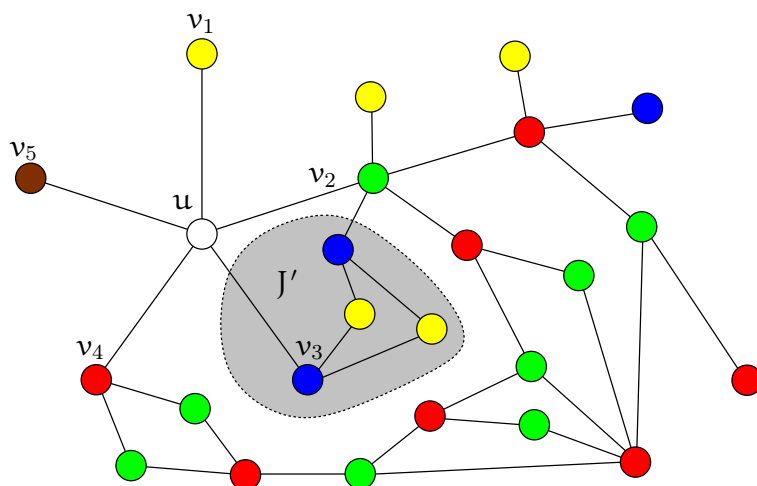
- нито може да има ребро с краища v_1 и v_3 в G , защото такова ребро би пресичало ребро от c , а по конструкция G е планарен;
- нито може да има алтерниращ жълто-син път с краища v_1 и v_3 . Ако допуснем, че има такъв път q и той няма общ връх с c , би имало непозволено пресичане на ребра и G не би бил планарен (q е очертан в светло синьо):



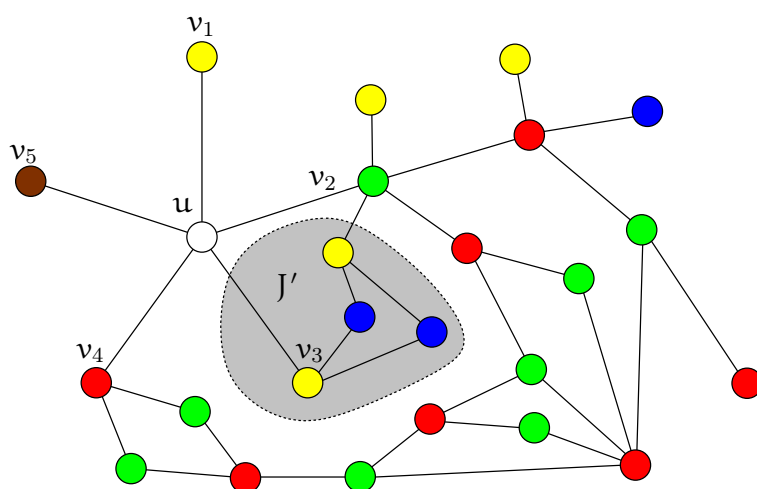
Да допуснем, че хипотетичният път q има поне един общ връх с s . Върховете на q са оцветени в жълто и синьо. Върховете на s са оцветени в три цвята: зелен, червен и бял (това е цветът на u в момента, u още не е оцветен в нито един от петте цвята, така че можем да считаме, че е оцветен в някакъв шести временен цвят, примерно бял). Получаваме противоречие – общият връх трябва да е от една страна син или жълт, а от друга, зелен, червен или бял.



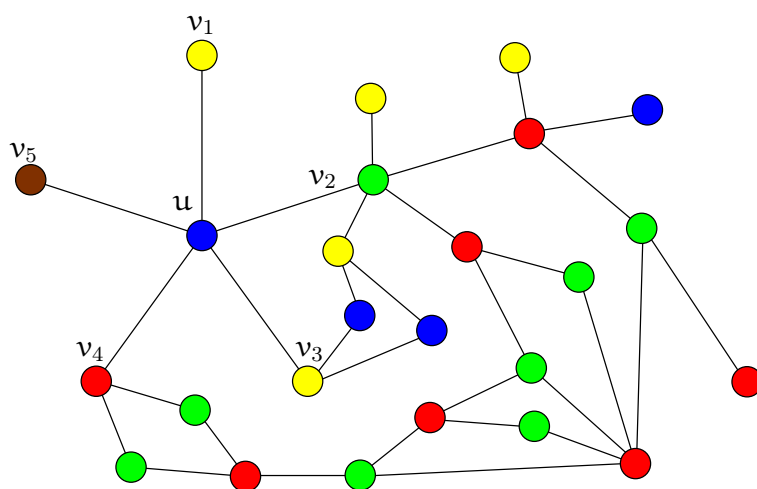
Доказахме, че при текущите допускания не съществува алтерниращ жълто-син път между v_1 и v_3 . Нека J е подграфът на G , индуциран от жълтите и сините върхове. Щом в G няма алтерниращ жълто-син път между v_1 и v_3 , то v_1 и v_3 са в различни свързани компоненти на J . Нека v_3 се намира в свързаната компонента J' на J :



Извършваме смяна на цветовете жълто в синьо и синьо в жълто върху J' , оставяйки другите върхове на G в същите цветове като преди.



По начин напълно аналогичен на **Случай I** доказваме, че след тази смяна на цветовете не може да получим ребро, чиито два края са оцветени в един и същи цвят. Но тогава връх v_3 се оказва жълт. По този начин си “освобождаваме” синия цвят и оцветяваме u в синьо.



□

- 2.11 Хамилтонови пътища и цикли.
- 2.12 Ойлерови пътища и цикли.
- 2.13 Съчетания в графи.
- 2.14 Дървета.
- 2.15 Интервални графи и k -дървета.
- 2.16 k -свързаност в графи.
- 2.17 Вписване на графи в повърхности от по-висок род.

Глава 3

Други видове графи

3.1 Графи с примки.

3.2 Ориентирани графи.

3.3 Мултиграфи.

3.4 Тегловни графи

3.5 Потоци в графи

Библиография

- [1] K. Appel and W. Haken. “Every planar map is four colorable. Part I: Discharging”. In: *Illinois J. Math.* 21.3 (Sept. 1977). Копие на статията е достъпно онлайн на <http://projecteuclid.org/euclid.ijm/1256049011>, pp. 429–490. URL: <http://projecteuclid.org/euclid.ijm/1256049011>.
- [2] K. Appel, W. Haken, and J. Koch. “Every planar map is four colorable. Part II: Reducibility”. In: *Illinois J. Math.* 21.3 (Sept. 1977). Копие на статията е достъпно онлайн на <http://projecteuclid.org/euclid.ijm/1256049012>, pp. 491–567. URL: <http://projecteuclid.org/euclid.ijm/1256049012>.
- [3] J.A. Baglivo and J.E. Graver. *Incidence and Symmetry in Design and Architecture*. Cambridge Urban and Architectural Studies. Cambridge University Press, 1983. ISBN: 9780521297844. URL: <https://books.google.bg/books?id=35phQgAACAAJ>.
- [4] W.W.R. Ball and H.S.M. Coxeter. *Mathematical Recreations and Essays*. Dover Recreational Math Series. Копие на книгата е достъпно онлайн на <http://www.gutenberg.org/files/26839/26839-pdf.pdf>. Dover Publications, 1987. ISBN: 9780486253572.
- [5] Claude Berge. “Some classes of perfect graphs”. In: *Graph theory and theoretical physics*. Ed. by Frank Harary. 1963, Paris: Academic press, 1967, pp. 155–165. URL: <http://opac.inria.fr/record=b1078146>.
- [6] N. Biggs, E. K. Lloyd, and R. J. Wilson. *Graph Theory, 1736-1936*. New York, NY, USA: Clarendon Press, 1986. ISBN: 0198539169.
- [7] Thomas H. Cormen et al. *Introduction to Algorithms, Third Edition*. 3rd. The MIT Press, 2009. ISBN: 0262033844, 9780262033848.
- [8] Leonhard Euler. “Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita”. In: *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* 4 (1758). Достъпна онлайн на <http://eulerarchive.maa.org/pages/E053.html>, pp. 140–160.
- [9] Leonhard Euler. “Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis”. In: *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* 8 (1736). Достъпна онлайн на <http://eulerarchive.maa.org/pages/E053.html>, pp. 128–140.
- [10] A. Gibbons. *Algorithmic Graph Theory*. Cambridge University Press, 1985. ISBN: 9780521288811.
- [11] Irina Gribkovskaia, Øyvind Halskau, and Gilbert Laporte. “The bridges of Königsberg - A historical perspective.” In: *Networks* 49.3 (Nov. 27, 2007). Достъпна онлайн на <http://lange.himolde.no/lo-kurs/lo904/Laporte/BridgesPaper.pdf>, pp. 199–203. URL: <http://dblp.uni-trier.de/db/journals/networks/networks49.html#SrHL07>.
- [12] Frank Harary, ed. *Graph theory and theoretical physics*. 1963, Paris: Academic press, 1967. URL: <http://opac.inria.fr/record=b1078146>.

- [13] D.A. Holton and J. Sheehan. *The Petersen Graph*. Australian Mathematical Society Lecture Series. Cambridge University Press, 1993. ISBN: 9780521435949.
- [14] Z. Michalewicz and D.B. Fogel. *How to Solve It: Modern Heuristics*. Springer Berlin Heidelberg, 2004. ISBN: 9783540224945.
- [15] Nikos Paragios, Yunmei Chen, and Olivier D. Faugeras, eds. *Handbook of Mathematical Models in Computer Vision*. Копие на пета глава от книгата *Graph Cuts in Vision and Graphics: Theories and Applications* е свободно достъпно онлайн на luthuli.cs.uiuc.edu/~daf/courses/Optimization/Combinatorialpapers/Nikos-Yuri-Olga.pdf. Springer, 2006. ISBN: 9780387263717. DOI: [10.1007/0-387-28831-7](https://doi.org/10.1007/0-387-28831-7). URL: <http://dx.doi.org/10.1007/0-387-28831-7>.
- [16] Вадим Визинг. “Об оценке хроматического класса p -графа”. In: *сб. Дискретный анализ. – Новосибирск: Институт математики СО АН СССР* (1964), pp. 25–30.
- [17] Красимир Манев. *Увод в Дискретната Математика*. пето издание. ЕТ КЛМН – Красимир Манев, 2012.