Лекция 8

Обратими оператори и обратими матрици. Умножение на детерминанти

1. Обратим оператор

Дефиниция 8.1. *Нека V е линейно пространство. Всяко линейно изображение $\varphi : V \to V$ се нарича линеен оператор на пространството V. Тъждествен оператор (идентитет) се нарича този оператор $\varepsilon : V \to V$, за който $\varepsilon(a) = a$ за всеки елемент a от пространството V.*

Ясно е, че за произволен оператор $\varphi : V \to V$ е изпълнено: $\varphi.\varepsilon = \varepsilon.\varphi = \varphi$.

Дефиниция 8.2. *Линейният оператор $\varphi : V \to V$ се нарича обратим, ако съществува линеен оператор $\psi : V \to V$, такъв че $\varphi.\psi = \psi.\varphi = \varepsilon$*

Твърдение 8.3. *Ако оператора φ е обратим, тогава съществува единствен оператор ψ, за който е изпълнено $\varphi.\psi = \psi.\varphi = \varepsilon$*

Доказателство. Нека линейните оператори ψ_1 и ψ_2 изпълняват равенствата $\varphi.\psi_1 = \psi_1.\varphi = \varepsilon$ и $\varphi.\psi_2 = \psi_2.\varphi = \varepsilon$, тогава:

$$\psi_1 = \psi_1.\varepsilon = \psi_1.(\varphi.\psi_2) = (\psi_1.\varphi).\psi_2 = \varepsilon.\psi_2 = \psi_2.$$

Следователно $\psi_1 = \psi_2$. □

Дефиниция 8.4. *Ако $\varphi : V \to V$ е обратим оператор, тогава единствения оператор ψ, който изпълнява равенството $\varphi.\psi = \psi.\varphi = \varepsilon$ се нарича обратен на φ и се бележи с φ^{-1}.*

Твърдение 8.5. *Нека V е линейно пространство над поле F и $\varphi : V \to V$ е обратим линеен оператор. Тогава:*

1) обратният оператор φ^{-1} също е обратим и $(\varphi^{-1})^{-1} = \varphi$;

2) ако $\alpha \neq 0$ е елемент от полето F, тогава $(\alpha\varphi)^{-1} = \alpha^{-1}\varphi^{-1}$;

3) ако операторът $\tau : V \to V$ е обратим, тогава $\varphi.\tau$ също е обратим и $(\varphi.\tau)^{-1} = \tau^{-1}.\varphi^{-1}$.

Доказателство.

1) Непосредствено от равенството $\varphi.\varphi^{-1} = \varphi^{-1}.\varphi = \varepsilon$ получаваме $(\varphi^{-1})^{-1} = \varphi$.

2) От свойствата на умножение на оператор с елемент от полето F следва:

$$(\alpha\varphi).(\alpha^{-1}\varphi^{-1}) = (\alpha.\alpha^{-1})(\varphi.\varphi^{-1}) = 1.\varepsilon = (\alpha^{-1}\varphi^{-1})(\alpha\varphi).$$

Така получаваме, че $(\alpha\varphi)^{-1} = \alpha^{-1}\varphi^{-1}$.

3) От асоциативността на произведението на оператори получаваме:

$$\begin{array}{l} (\varphi.\tau).(\tau^{-1}.\varphi^{-1}) = \varphi.(\tau^{-1}.\tau).\varphi^{-1} = \varphi.\varepsilon.\varphi^{-1} = \varepsilon \\ (\tau^{-1}.\varphi^{-1}).(\varphi.\tau) = \tau^{-1}.(\varphi^{-1}.\varphi).\tau = \tau^{-1}.\varepsilon.\tau = \varepsilon \end{array} \quad \Rightarrow \quad (\varphi.\tau)^{-1} = \tau^{-1}.\varphi^{-1}.$$

□

Теорема 8.6. *Линейният оператор $\varphi : V \to V$ е обратим тогава и само тогава, когато е биективно изображение (т.е. когато е изоморфизъм).*

Доказателство. Нека φ е обратим оператор, и x_1 и x_2 са различни елементи от пространството V, тогава:

$$\begin{array}{l} x_1 = \varphi^{-1}(\varphi(x_1)) \\ x_2 = \varphi^{-1}(\varphi(x_2)) \end{array} \quad \Rightarrow \quad x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow \varphi(x_1) \neq \varphi(x_2).$$

Следователно изображението φ е "инекция". Нека x е произволен елемент от V, тогава $x = \varphi(\varphi^{-1}(x))$, откъдето имаме $x \in \mathrm{Im}\,(\varphi)$. Следователно изображението φ е "върху" и така получаваме, че φ е биекция.
Нека линейният оператор φ е биективно изображение. Тогава за всеки елемент $x \in V$ съществува единствен елемент $a \in V$, такъв че $x = \varphi(a)$. Разглеждаме изображението $\rho : V \to V$, за което $\rho(x) = a$, когато $x = \varphi(a)$. Ако α и β са елементи от полето F и $x, y \in V$, тогава:

$$\begin{array}{l} x = \varphi(a) \\ y = \varphi(b) \end{array} \;\Rightarrow\; \alpha x + \beta y = \varphi(\alpha a + \beta b) \;\Rightarrow\; \rho(\alpha x + \beta y) = \alpha a + \beta b = \alpha\rho(x) + \beta\rho(y).$$

Получихме, че изображението $\rho : V \to V$ е линеен оператор. Изпълнено е $a = \rho(x) = \rho(\varphi(a))$ и $x = \varphi(a) = \varphi(\rho(x))$, следователно $\rho.\varphi = \varphi.\rho = \varepsilon$ и φ е обратим оператор. □

Теорема 8.7. *Нека V е крайномерно линейно пространство и $\varphi : V \to V$ е линеен оператор. Следните твърдения са еквивалентни:*

1) φ е обратим оператор;

2) $\mathrm{Ker}\,(\varphi) = \{\mathbf{0}\}$, т.е. дефектът на φ е равен на 0;

3) $\mathrm{Im}\,(\varphi) = V$, т.е. рангът на φ е равен на $\dim V$;

4) ако $e_1, \ldots, e_n$ е базис на V, тогава $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$ също е базис на V.

Доказателство.

1) $\Rightarrow$ 2) Ако φ е обратим оператор от теорема 8.6 имаме, че φ е биекция следователно $\varphi(x) = \mathbf{0} = \varphi(\mathbf{0}) \;\Leftrightarrow\; x = \mathbf{0}$ и ядрото на оператора $\mathrm{Ker}\,(\varphi) = \{\mathbf{0}\}$.

2) $\Leftrightarrow$ 3) От теоремата за ранга и дефекта имаме: $d(\varphi) = 0 \;\Leftrightarrow\; r(\varphi) = \dim V$, защото $r(\varphi) + d(\varphi) = \dim V$. Следователно $\mathrm{Ker}\,(\varphi) = \{\mathbf{0}\}$ тогава и само тогава, когато $\mathrm{Im}\,(\varphi) = V$.

3) $\Rightarrow$ 1) Изпълнено е образът $\mathrm{Im}\,(\varphi) = V$ и $\mathrm{Ker}\,(\varphi) = \mathbf{0}$, откъдето

$$\varphi(x) = \varphi(y) \;\Leftrightarrow\; \varphi(x - y) = \mathbf{0} \;\Leftrightarrow\; x - y = \mathbf{0}.$$

Така получаваме, че φ е биекция и следователно обратим оператор.

3) $\Leftrightarrow$ 4) Нека $e_1, \ldots, e_n$ е базис на V. Знаем, че $\mathrm{Im}\,(\varphi) = l(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n))$ следователно $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$ е базис на пространството V тогава и само тогава, когато $\mathrm{Im}\,(\varphi) = V$. □

2. Обратими матрици

Нека $\varphi : V \to V$ е линеен оператор и $e_1, e_2, \ldots, e_n$ е базис на пространството V. Тогава съществуват коефициенти a_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$, от полето F, такива че

$$\begin{array}{l} \varphi(e_1) = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \ldots + a_{n1}e_n \\ \varphi(e_2) = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \ldots + a_{n2}e_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi(e_n) = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \ldots + a_{nn}e_n. \end{array}$$

Квадратната матрицата

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

се нарича матрица на оператора φ спрямо базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$.
Матрицата на тъждествения оператор ε е

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

и се нарича единична матрица. За произволна матрица $A \in M_{n\times n}$ е изпълнено

$$A.E = E.A = A.$$

Дефиниция 8.8. *Квадратната матрица $A \in M_{n\times n}$ се нарича обратима, ако съществува матрица $B \in M_{n\times n}$, за която $A.B = B.A = E$.*

Аналогично на обратимите оператори получаваме, че ако матрицата A е обратима, тогава съществува единствена матрица B, за която е изпълнено

$$A.B = B.A = E.$$

Тази единствена матрица се нарича обратна на A и се бележи с A^{-1} и е изпълнено $A.A^{-1} = A^{-1}.A = E$.

Твърдение 8.9. *Нека V е линейно пространство с базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ и нека $\varphi : V \to V$ е линеен оператор с матрица A спрямо базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$. Операторът φ е обратим тогава и само тогава, когато неговата матрица A е обратима.*

Доказателство. От теорема 7.9 знаем, че пространството от матрици $M_{n\times n}(F)$ е изоморфно на пространството $\mathrm{Hom}(V, V)$ от всички линейни оператори на пространството V. Ако A и B са матрици в дадения базис на операторите φ и ψ, тогава от теорема 7.14 следва че:

$$A.B = B.A = E \quad \Leftrightarrow \quad \varphi.\psi = \psi.\varphi = \varepsilon. \qquad \square$$

Теорема 8.10. *Матрицата $A \in M_{n\times n}(F)$ е обратима тогава и само тогава, когато детерминантата ѝ е различна от 0. Ако $\det(A) \neq 0$, тогава е изпълнено*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & a_{n2} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

където $A_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$ е адюнгираното количество на елемента a_{ij}.

Доказателство. Нека $A \in M_{n\times n}(F)$ е матрица. Тогава за n мерното векторно пространтство V съществува оператор φ, който спрямо базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$ има матрица A. Матрицата A е обратима тогава и само тогава, когато операторът φ е обратим, което е изпълнено точно когато стълбовете на матрицата са линейно независими (т.е. $r(\varphi) = r(A) = n$), тогава и само тогава когато $\det(A) \neq 0$.
Нека $\det(A) \neq 0$, и нека

$$B = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & a_{n2} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

където $A_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$ е адюнгираното количество на елемента a_{ij}. Нека $C = (c_{ij})_{n\times n} = A.B$. Тогава

$$c_{ij} = \frac{1}{\det(A)}(a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj}) = \frac{1}{\det(A)}(a_{i1}A_{j1} + \cdots + a_{in}A_{jn})$$

Когато $i = j$, от формулата за развиване на детерминанта по i-ти ред получаваме, че $c_{ii} = 1$, докато при $i \neq j$ имаме фалшиво развиване и $c_{ij} = 0$. Следователно $A.B = E$ и B е обратната матрица, защото

$$B = E.B = (A^{-1}.A).B = A^{-1}.(A.B) = A^{-1}. \qquad \square$$

3. Умножение на детерминанти

Теорема 8.11. *Нека* $\mathbf{e}_1 = (1,0,\ldots,0), \mathbf{e}_2 = (0,1,\ldots,0), \ldots, \mathbf{e}_n = (0,0,\ldots,1)$ *е стандартния базис на* n*-мерното векторно пространство* F^n *и* $\varphi : F^n \to F^n$ *е линеен оператор, който в този базис има матрица* $A \in M_{n\times n}(F)$. *За произволни вектори* $x_1, x_2, ..., x_n$ *от пространството* F^n *е изпълнено:*

$$\det(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_n)) = \det(A).\det(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Доказателство. Ако $\det A = 0$, то стълбовете на матрицата A са линейно зависими и $r(\varphi) = \dim(\mathrm{Im}(\varphi)) < n$. Следователно векторите $\varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_n)$, които принадлежат на $\mathrm{Im}\,\varphi$ са линейно зависими и

$$\det(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_n)) \;=\; 0.$$

Получихме, че ако $\det A = 0$, то твърдението е в сила.
Нека $\det A \neq 0$. Разглеждаме следната функция:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{\det(A)}.\det(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_n)).$$

Тя е полилинейна защото, ако $\alpha, \beta \in F$ и i е индекс от 1 до n, то е изпълнено:

$$f(x_1, \ldots, \alpha x_i' + \beta x_i'', \ldots, x_n)$$
$$= \frac{1}{\det(A)}.\det(\varphi(x_1), \ldots, \alpha\varphi(x_i') + \beta\varphi(x_i''), \ldots, \varphi(x_n))$$
$$= \frac{1}{\det(A)}[\alpha\det(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_i'), \ldots, \varphi(x_n)) + \beta\det(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_i''), \ldots, \varphi(x_n))]$$
$$= \alpha f(x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_n) + \beta f(x_1, \ldots, x_i'', \ldots, x_n).$$

Нека за $i \neq j$ е изпълнено $x_i = x_j = a$. Тогава $\det(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_n))$ има два равни реда и е равна на 0. В този случай имаме $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ и f се анулира винаги когато има два равни артумента. Изпълнено е

$$f(e_1, e_2, \ldots, e_n) = \frac{1}{\det(A)}.\det(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \ldots, \varphi(e_n)) = \frac{1}{\det(A)}.\det A^t = 1.$$

Получихме, че f е полилинейна и антисиметрична функция, която за единичната матрица приема стойност 1, следователно f е детерминанта на аргументите си, т.е.

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \det(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{\det(A)}.\det(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_n)).$$

$\square$

Теорема 8.12. *Нека* $A, B \in M_{n\times n}(F)$ *са квадратни матрици от ред* n. *Тогава*

$$\det(A.B) = \det(A).\det(B).$$

Доказателство. Нека $C = A.B$ и A, B, C са матрици на линейните оператори $\varphi : F^n \to F^n$, $\psi : F^n \to F^n$ и $\tau : F^n \to F^n$. От равенството $C = A.B$ следва, че $\tau = \varphi.\psi$. Прилагаме няколко пъти теорема 8.11 и получаваме:

$$\begin{gathered}\det(A.B) = \det(C) = \det(\tau(e_1), \tau(e_2), \dots, \tau(e_n)) = \\ = \det(\varphi(\psi(e_1)), \varphi(\psi(e_2)), \dots, \varphi(\psi(e_n))) = \\ = \det(A).\det(\psi(e_1), \psi(e_2), \dots, \psi(e_n)) = \\ = \det(A).\det(B).\det(e_1, e_2, \dots, e_n) = \det(A).\det(B).\end{gathered}$$ □

Следствие 8.13. *Ако матрицата $A \in M_{n\times n}(F)$ е обратима, тогава*

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$