Лекция 7

Матрица на линейно изображение. Действия с изображения и с матрици

1. Матрица на изображение

Разглеждаме V_1 и V_2 крайномерни линейни пространства над полето F и изображението $\varphi : V_1 \to V_2$, което е линейно. Нека $e_1, \dots, e_n$ е базис на пространството V_1 и $f_1, \dots, f_k$ - базис на V_2. Образите $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ са елементи от пространството V_2 и могат да се изразят спрямо базиса $f_1, \dots, f_k$:

$$\begin{aligned} &\varphi(e_1) = a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + \dots + a_{k1}f_k \\ &\varphi(e_2) = a_{12}f_1 + a_{22}f_2 + \dots + a_{k2}f_k \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\varphi(e_n) = a_{1n}f_1 + a_{2n}f_2 + \dots + a_{kn}f_k. \end{aligned}$$

Дефиниция 7.1. *Матрицата*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix},$$

в която по стълбове стоят координатите на образите $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ спрямо базиса $f_1, \dots, f_k$ се нарича матрица на линейното изображение φ спрямо базисите $e_1, \dots, e_n$ и $f_1, \dots, f_k$.

Броят на редовете на матрицата на изображението $\varphi : V_1 \to V_2$ е равен на размерността на пространството V_2, а броят на стълбовете е размерността на V_1. Матрицата на линейното изображение зависи от избраните базиси.

Твърдение 7.2. *Нека $\varphi : V_1 \to V_2$ и $\psi : V_1 \to V_2$ са линейни изображения, $e_1, \dots, e_n$ е базис на пространството V_1 и $f_1, \dots, f_k$ - базис на V_2. Изображенията φ и ψ съвпадат, точно когато матриците им спрямо тези базиси са равни.*

Доказателство. Нека линейните изображения $\varphi : V_1 \to V_2$ и $\psi : V_1 \to V_2$ имат спрямо фиксираните базиси една и съща матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$.

От дефиницията за матрица на линейно изображение получаваме:

$$\begin{matrix} \varphi(e_i) = a_{1i}f_1 + a_{2i}f_2 + \dots + a_{ki}f_k \\ \psi(e_i) = a_{1i}f_1 + a_{2i}f_2 + \dots + a_{ki}f_k \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \varphi(e_i) = \psi(e_i),\ i = 1, \dots, n.$$

От теорема 6.8 знаем, че съществува единствено линейно изображение за което $\varphi(e_i) = \psi(e_i)$, за всяко i, следователно $\varphi = \psi$. $\square$

Твърдение 7.3. *Нека V_1 и V_2 са линейни пространства над поле F с базиси съответно $e_1, \dots, e_n$ и $f_1, \dots, f_k$. Ако A е произволна матрица с k реда и n*

стълба и елементи от полето F (т.е. $A \in M_{k\times n}(F)$), тогава съществува линейно изображение $\varphi : V_1 \to V_2$, което има матрица A спрямо зададените базиси.

Доказателство. Нека $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$. Да разгледаме векторите $b_i = a_{1,i}f_1 + a_{2,i}f_2 + \dots + a_{ki}f_k$, за $i = 1, \dots, n$. От теорема 6.8 знаем, че съществува линейно изображение $\varphi : V_1 \to V_2$, за което $\varphi(e_i) = b_i$, за всяко i и това изображение има матрица A, спрямо зададените базиси. □

От твърдения 7.2 и 7.3 следва, че съществува взаимно еднозначно съответствие между множеството от всички линейни изображения $\varphi : V_1 \to V_2$ и множеството $M_{k\times n}(F)$ от всички матрици с k реда, n стълба и елементи от F.

2. Събиране и умножение с число на изображения

Дефиниция 7.4. *Нека V_1 и V_2 са линейни пространства над полето F, $\varphi : V_1 \to V_2$ и $\psi : V_1 \to V_2$ са линейни изображения. За произволен елемент x от пространството V_1 дефинираме $\sigma(x) = \varphi(x) + \psi(x)$. Така полученото изображение $\sigma : V_1 \to V_2$ се нарича сума на изображенията φ и ψ и се записва $\sigma = \varphi + \psi$ (изпълнено е, че $(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x)$).*

Дефиниция 7.5. *Нека V_1 и V_2 са линейни пространства над полето F, $\varphi : V_1 \to V_2$ е линейно изображение и λ е елемент от полето F. Изображението $\rho : V_1 \to V_2$, което за произволен елемент x от V_1 е определено по следния начин $\rho(x) = \lambda\varphi(x)$, се нарича произведение на λ по изображенето φ и се бележи $\rho = \lambda.\varphi$. Изпълнено е, че $(\lambda.\varphi)(x) = \lambda.\varphi(x)$.*

Твърдение 7.6. *Нека V_1 и V_2 са линейни пространства над полето F, $\varphi : V_1 \to V_2$, $\psi : V_1 \to V_2$ са линейни изображения и $\lambda \in F$. Тогава $\varphi + \psi$ и $\lambda.\varphi$ са също линейни изображения.*

Доказателство.: Ако $\sigma = \varphi + \psi$, тогава е изпълнено:

$$\begin{aligned}\sigma(\alpha x + \beta y) &= \varphi(\alpha x + \beta y) + \psi(\alpha x + \beta y) = \\ &= \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y) + \alpha\psi(x) + \beta\psi(y) = \alpha\sigma(x) + \beta\sigma(y),\end{aligned}$$

откъдето виждаме, че $\sigma = \varphi + \psi$ е линейно изображение. Нека $\rho = \lambda.\varphi$, където $\lambda \in F$, тогава ρ е линейно изображение, защото:

$$\begin{aligned}\rho(\alpha x + \beta y) &= \lambda(\varphi(\alpha x + \beta y)) = \lambda(\alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y)) = \\ &= \alpha(\lambda\varphi(x)) + \beta(\lambda\varphi(y)) = \alpha\rho(x) + \beta\rho(y).\end{aligned}$$ □

Теорема 7.7. *Нека V_1 и V_2 са линейни пространства над полето F, $e_1, \dots, e_n$ е базис на пространството V_1, $f_1, \dots, f_k$ - базис на V_2 и $\varphi : V_1 \to V_2$ и $\psi : V_1 \to V_2$ са линейни изображения, които имат матрици спрямо дадените базиси съответно A и B. Спрямо зададените базиси матрицата на сумата $\varphi + \psi$ е $A + B$ и матрицата на $\lambda.\varphi$ е $\lambda.A$, където λ е произволен елемент от полето F.*

Доказателство.: От матрицата $A = (a_{ij})_{n\times k}$ на оператора φ получаваме, че

$$\varphi(e_j) = a_{1j}f_1 + a_{2j}f_2 + \dots + a_{kj}f_k, \quad j = 1, \dots, n,$$

аналогично от $B = (b_{ij})_{n\times k}$ следва

$$\psi(e_j) = b_{1j}f_1 + b_{2j}f_2 + \dots + b_{kj}f_k, \quad j = 1, \dots, n.$$

Тогава за произволен базисен вектор e_j, $j = 1, \dots, n$, получаваме:

$$(\varphi + \psi)e_j = \varphi(e_j) + \psi(e_j) = (a_{1j} + b_{1j})f_1 + (a_{2j} + b_{2j})f_2 + \dots + (a_{kj} + b_{kj})f_k.$$

Следователно елементите на $C = (c_{ij})_{n\times k}$, матрицата на изображението $\varphi + \psi$, са сума на съответните елементи от матриците на φ и ψ и $C = A + B$. Аналогично, за всеки базисен елемент e_j е изпълнено равенството:

$$\lambda.\varphi(e_j) = \lambda(a_{1j}f_1 + a_{2j}f_2 + \cdots + a_{kj}f_k) = \lambda a_{1j}f_1 + \lambda a_{2j}f_2 + \cdots + \lambda a_{kj}f_k,$$

откъдето получаваме, че матрицата на изображението $\lambda.\varphi$ е $\lambda.A$. □

Твърдение 7.8. *Нека V_1 и V_2 са линейни пространства над полето F. Множеството от всички линейни изображения*

$$\mathrm{Hom}(V_1, V_2) = \{\varphi : V_1 \to V_2 \mid \varphi \text{ е линейно изображение}\}$$

с операциите събиране на изображения и умножение на изображение с елемент от F е линейно пространство над полето F.

Доказателство. Непосредствено се проверява, че множеството $\mathrm{Hom}(V_1, V_2)$, с така дефинираните операции, удовлетворява аксиомите за линейно пространство. Наистина, за произволен елемент x от пространството V_1, произволни изображения φ, ψ, ρ от $\mathrm{Hom}(V_1, V_2)$ и елементи λ, μ от полето F е изпълнено:

(1) $(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x) = \psi(x) + \varphi(x) = (\psi + \varphi)(x)$
$\Rightarrow\ \varphi + \psi = \psi + \varphi$;
(2) $((\varphi + \psi) + \rho)(x) = \varphi(x) + \psi(x) + \rho(x) = (\varphi + (\psi + \rho))(x)$
$\Rightarrow\ (\varphi + \psi) + \rho = \varphi + (\psi + \rho)$;
(3) Нека $\theta : V_1 \to V_2$ е нулевото изображение V_1 $\theta(x) = \mathbf{0}$. Ясно е, че за всеки вектор x от V_1 е изпълнено $(\varphi + \theta)(x) = \varphi(x) + \mathbf{0} = \varphi(x)$.
$\Rightarrow\ \varphi + \theta = \varphi$;
(4) От $\varphi(x) + (-1)\varphi(x) = \mathbf{0} = (\varphi + (-1).\varphi)(x)$
$\Rightarrow\ \varphi + (-1.\varphi) = (-1.\varphi) + \varphi = \theta$;
(5) Изпълнено е $1.\varphi = \varphi$;
(6) $(\lambda + \mu)\varphi(x) = \lambda.\varphi(x) + \mu.\varphi(x) = (\lambda.\varphi + \mu.\varphi)(x)$
$\Rightarrow\ (\lambda + \mu)\varphi = \lambda.\varphi + \mu.\varphi$;
(7) $\lambda(\varphi(x) + \psi(x)) = \lambda\varphi(x) + \lambda\psi(x)$
$\Rightarrow\ \lambda(\varphi + \psi) = \lambda\varphi + \lambda\psi$;
(8) $((\lambda\mu).\varphi)(x) = (\lambda\mu).(\varphi(x)) = \lambda(\mu.\varphi(x))$
$\Rightarrow\ (\lambda\mu)\varphi = \lambda(\mu\varphi)$. □

Теорема 7.9. *Нека V_1 и V_2 са крайномерни линейни пространства над полето F и $n = \dim V_1$, $k = \dim V_2$. Тогава $\mathrm{Hom}(V_1, V_2)$ - пространството от линейни изображения от V_1 във V_2 е изоморфно на $M_{k\times n}(F)$ - пространството от матрици с k реда и n стълба и елементи от полето F.*

Доказателство: Нека $e_1, \dots, e_n$ е базис в пространството V_1 и $f_1, \dots, f_k$ - базис на V_2. Да разгледаме изображението $\nu : \mathrm{Hom}(V_1, V_2) \to M_{k\times n}(F)$ което е определено по следния начин: ако φ е линейно изображение от $\mathrm{Hom}(V_1, V_2)$, тогава $\nu(\varphi) = A$, където A е матрицата на φ спрямо фиксираните базиси $e_1, \dots .e_n$ и $f_1, \dots, f_k$. От твърдения 7.2 и 7.3 имаме, че изображението ν е биективно. Нека φ и ψ са линейни изображения от $\mathrm{Hom}(V_1, V_2)$ и α и β са елементи от полето F. От доказаното в теорема 7.7 имаме

$$\nu(\alpha.\varphi + \beta.\psi) = \alpha.A + \beta.B = \alpha.\nu(\varphi) + \beta.\nu(\psi),$$

откъдето получаваме, че ν е линейно изображение. Следователно изображението $\nu : \mathrm{Hom}(V_1, V_2) \to M_{k\times n}(F)$ е изоморфизъм. □

3. Композиция на изображения

Дефиниция 7.10. *Нека V_1, V_2 и V_3 са линейни изпространства над поле F и нека $\varphi : V_1 \to V_2$ и $\psi : V_2 \to V_3$ са линейни изображения. Тогава изображението $\tau : V_1 \to V_3$, което се определя за всеки елемент x от V_1 по следния начин $\tau(x) = \psi(\varphi(x))$ се нарича композиция (или произведение) на изображенията ψ и φ. Композицията се записва $\tau = \psi.\varphi$ и се чете "τ е равно на ψ след φ".*

Твърдение 7.11. *Композицията на линейни изображения е линейно изображение.*

Доказателство.: Нека V_1, V_2 и V_3 са линейни изпространства над поле F и $\varphi : V_1 \to V_2$ и $\psi : V_2 \to V_3$ са линейни изображения. Ако $\tau = \psi.\varphi$, тогава за произволни елементи x и y от V_1 и произволни $\alpha, \beta \in F$ е изпълнено:

$$\begin{aligned}\tau(\alpha x + \beta y) = \psi(\varphi(\alpha x + \beta y)) = \psi(\alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y)) = \\ = \alpha\psi(\varphi(x)) + \beta\psi(\varphi(y)) = \alpha\tau(x) + \beta\tau(y).\end{aligned}$$

Следователно $\tau = \psi.\varphi$ е линейно изображение. □

Теорема 7.12. *Нека V_1, V_2 V_3 и V_4 са линейни пространства над поле F. Тогава са в сила следните свойства:*

1) $\psi.(\varphi_1 + \varphi_2) = \psi.\varphi_1 + \psi.\varphi_2$ за произволни линейни изображения $\varphi_1 : V_1 \to V_2$, $\varphi_2 : V_1 \to V_2$ и $\psi : V_2 \to V_3$;

2) $(\psi_1 + \psi_2).\varphi = \psi_1.\varphi + \psi_2.\varphi$ за произволни линейни изображения $\varphi : V_1 \to V_2$, $\psi_1 : V_2 \to V_3$ и $\psi_2 : V_2 \to V_3$;

3) $\alpha(\psi.\varphi) = (\alpha\psi).\varphi = \psi.(\alpha\varphi)$, където $\alpha \in F$ и $\varphi : V_1 \to V_2$ и $\psi : V_2 \to V_3$ са произволни линейни изображения;

4) $(\rho.\psi).\varphi = \rho.(\psi.\varphi)$ за произволни линейни изображения $\varphi : V_1 \to V_2$, $\psi : V_2 \to V_3$ и $\rho : V_3 \to V_4$.

Доказателство. За всяко равенство проверяваме, че за произволен елемент x от V_1 изображенията отляво и отдясно на равенството дават един и същи образ.

1) $(\psi.(\varphi_1+\varphi_2))(x) = \psi((\varphi_1+\varphi_2)(x)) = \psi(\varphi_1(x)+\varphi_2(x)) = \psi(\varphi_1(x))+\psi(\varphi_2(x)) = \psi.\varphi_1(x) + \psi.\varphi_2(x) \;\Rightarrow\; \psi.(\varphi_1 + \varphi_2) = \psi.\varphi_1 + \psi.\varphi_2$;

2) $(\psi_1+\psi_2).\varphi(x) = (\psi_1+\psi_2)(\varphi(x)) = \psi_1(\varphi(x))+\psi_2(\varphi(x)) = \psi_1.\varphi(x)+\psi_2.\varphi(x) = (\psi_1.\varphi + \psi_2.\varphi)(x) \;\Rightarrow\; (\psi_1 + \psi_2).\varphi = \psi_1.\varphi + \psi_2.\varphi$;

3) $\alpha.(\psi.\varphi)(x) = \alpha.\psi(\varphi(x)) = (\alpha\psi)(\varphi(x)) = \psi(\alpha\varphi)(x)$
$\Rightarrow\; \alpha(\psi.\varphi) = (\alpha\psi).\varphi = \psi.(\alpha\varphi)$;

4) $((\rho.\psi).\varphi)(x) = (\rho.\psi)(\varphi(x)) = \rho(\psi(\varphi(x))) = \rho((\psi.\varphi)(x)) = (\rho.(\psi.\varphi))(x)$
$\Rightarrow\; (\rho.\psi).\varphi = \rho.(\psi.\varphi)$. □

4. Умножение на матрици

Нека V_1, V_2 и V_3 са крайномерни линейни изпространства над поле F и нека $\varphi : V_1 \to V_2$ и $\psi : V_2 \to V_3$ са линейни изображения. Нека $e_1, \dots, e_n$ е базис на пространгството V_1, $f_1, \dots, f_k$ е базис на пространството V_2 и $g_1, \dots, g_s$ е базис на пространството V_3. Ако матриците на φ и ψ спрямо тези базиси са съответно $B = (b_{ij})_{k\times n}$ и $A = (a_{ij})_{s\times k}$, тогава:

$$\begin{array}{ll}\varphi(e_1) = b_{11}f_1 + b_{21}f_2 + \dots + b_{k1}f_k & \psi(f_1) = a_{11}g_1 + a_{21}g_2 + \dots + a_{s1}g_s \\ \varphi(e_2) = b_{12}f_1 + b_{22}f_2 + \dots + b_{k2}f_k & \psi(f_2) = a_{12}g_1 + a_{22}g_2 + \dots + a_{s2}g_s \\ \dotfill & \dotfill \\ \varphi(e_n) = b_{1n}f_1 + b_{2n}f_2 + \dots + b_{kn}f_k & \psi(f_k) = a_{1k}g_1 + a_{2k}g_2 + \dots + a_{sk}g_s\end{array}$$

Нека $\tau = \psi.\varphi$ и да пресметнем образите на базисните вектори $e_1, \dots, e_n$ и матрицата на τ спрямо базисите $e_1, \dots, e_n$ и $g_1, \dots, g_s$:

$$\begin{aligned} \tau(e_i) = \psi.\varphi(e_i) = \psi(b_{1i}f_1 + \dots + b_{ki}f_k) = b_{1i}\psi(f_1) + \dots + b_{ki}\psi(f_k) = \\ = b_{1i}(a_{11}g_1 + a_{21}g_2 + \dots + a_{s1}g_s) + \dots + b_{ki}(a_{1k}g_1 + a_{2k}g_2 + \dots + a_{sk}g_s) = \\ = \quad (a_{11}.b_{1i} + a_{12}.b_{2i} + \dots + a_{1k}.b_{ki})g_1 + \\ +(a_{21}.b_{1i} + a_{22}.b_{2i} + \dots + a_{2k}.b_{ki})g_2 + \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ +(a_{s1}.b_{1i} + a_{s2}.b_{2i} + \dots + a_{sk}.b_{ki})g_s. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Получените изрази са основа за дефиниране на операцията произведение на матрици:

Дефиниция 7.13. *Нека $A = (a_{ij})_{s\times k}$ и $B = (b_{ij})_{k\times n}$ са матрици с елементи от полето F. Матрицата $C = (c_{ij})_{s\times n} = A.B$ е произведение на матриците A и B, когато за произволни $i = 1, \dots, s$ и $j = 1, \dots, n$ е изпълнено:*

$$c_{ij} = a_{i1}.b_{1j} + a_{i2}.b_{2j} + \dots + a_{ik}.b_{kj}.$$

Ясно е, че за да може да се дефинира произведението $A.B$ трябва броят на стълбовете на матрицата A да е равен на броя на редовете на матрицата B. В такъв случай казваме, че елементът c_{ij} на матрицата $C = A.B$ се получава като умножим i-тия ред на матрицата A по j-тия стълб на матрицата B.
От равенство (7.1) получаваме, че е в сила следната теорема:

Теорема 7.14. *Матрицата C на композицията $\tau = \psi.\varphi$ на линейните изображения ψ (с матрица A) и φ (с матрица B) е равна на произведението на матриците $C = A.B$.*

От твърдение 7.3 знаем, че всяка матрица може да се разглежда като матрица на някакво подходящо линейно изображение и от теорема 7.12 се получават следните свойства на умножението на матрици.

Следствие 7.15. *Нека $A, A_1, A_2 \in M_{n\times k}(F)$, $B, B_1, B_2 \in M_{k\times s}(F)$, $C \in M_{s\times t}(F)$ и α е елемент от полето F. Тогава е изпълнено:*
1. $A.(B_1 + B_2) = A.B_1 + A.B_2$;
2. $(A_1 + A_2).B = A_1.B + A_2.B$;
3. $\alpha(A.B) = (\alpha A).B = A(\alpha.B)$;
4. $A.(B.C) = (A.B).C$.

Пример:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 8 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+5+0 & 3+40+14 \\ 6+0+0 & 9+0-28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 57 \\ 6 & -19 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 8 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+9 & 10+0 & -4+12 \\ 1+24 & 5+0 & -2+32 \\ 0-21 & 0+0 & 0-28 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 11 & 10 & 8 \\ 25 & 5 & 30 \\ -21 & 0 & -28 \end{pmatrix}$$

Забележка 7.16. *Умножението на матрици не е комутативно, т.е. $A.B \neq B.A$. Възможно е произведението $A.B$ да съществува, но матриците да не могат да се умножат в обратен ред, т.е. $B.A$ да не съществува.*

5. Матричен запис на линейно изображение

Нека $\varphi : V_1 \to V_2$ е линейно изображение, $e_1, \ldots, e_n$ и $f_1, \ldots, f_k$ са базиси на V_1 и V_2 съответно и матрицата на изображението φ спрямо тези базиси е

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kn} \end{pmatrix}.$$

Ако x е произволен вектор от пространството V_1 и $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$, където $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ е векторът от координатите на x спрямо дадения базис, тогава:

$$\begin{gathered} \varphi(x) = x_1\varphi(e_1) + x_2\varphi(e_2) + \cdots + x_n\varphi(e_n) = \\ = x_1(a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + \cdots + a_{k1}f_k) + \cdots + x_n(a_{1n}f_1 + a_{2n}f_2 + \cdots + a_{kn}f_k) = \\ = \quad (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n)f_1 + \\ +(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n)f_2 + \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ +(a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n)f_k. \end{gathered}$$

Това означава, че ако $\varphi(x) = y_1f_1 + y_2f_2 + \cdots + y_kf_k$, тогава е изпълнено

$$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n, \quad i = 1, \ldots, k.$$

и е в сила равенството:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ .. \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix} .$$