Лекция 6

Линейни изображения. Изоморфизъм на линейни пространства. Ранг и дефект

1. Линейни изображения - определение, примери и свойства

Дефиниция 6.1. *Нека V_1 и V_2 са линейни пространства над едно и също поле F. Изображението $\varphi : V_1 \to V_2$ се нарича линейно изображение, ако за произволни елементи a и b от пространството V_1 и за произволни елементи λ и μ от полето F е изпълнено: $\varphi(\lambda.a + \mu.b) = \lambda.\varphi(a) + \mu.\varphi(b)$.*

Ако пространствата V_1 и V_2 съвпадат, то линейното изображение $\varphi : V_1 \to V_1$ се нарича линеен оператор на пространството V_1.

Примери на линейни изображения:

Пример 6.2. *Нека V е произволно линейно пространство и $\theta : V \to V$ е нулевото изображение $\theta(a) = \mathbf{0}$ за всеки вектор a от V. Непосредствено се вижда, че θ е линейно изображение.*

Пример 6.3. *Тъждественото изображение $\varepsilon : V \to V$, при което всеки елемент a от линейното пространство отива в себе си, $\varepsilon(a) = a$, е линейно изображение. Когато V_1 е подпространство на пространството V, тогава влагането $\upsilon : V_1 \to V$, където $\upsilon(x) = x \in V$ за всеки елемент $x \in V_1$, също е линейно изображение.*

Пример 6.4. *Нека V е крайномерно линейно пространство с размерност $\dim V = n$ и $e_1, e_1, \ldots, e_n$ е базис на V. Разглеждаме изображението $\xi : V \to F^n$, при което на всеки елемент от V съпоставяме вектора от координатите му в дадения базис, т.е. ако $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$, то $\xi(x) = (x_1, \ldots, x_n)$. От свойствата на координатите на векторите при фиксиран базис следва, че ξ е линейно изображение.*

Пример 6.5. *Нека $n > k$. Изображението $\varphi : F^n \to F^k$, за което*

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_k),$$

се нарича проекция и е линейно изображение.

Пример 6.6. *Нека V е линейно пространство над полето F и $f : V \to F$ е линейна функция. Ако разгледаме полето F като едномерно линейно пространство над себе си, виждаме че функцията f е линейно изображение.*

Пример 6.7. *Нека е зададена система линейни уравнения:*

$$\left|\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dotfill \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0 \end{array}\right. .$$

Дефинираме изображение $\varphi : F^n \to F^s$ по следния начин:

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_s),$$

където y_i е стойността, която се получава при заместване в i-тото уравнение на системата, т.е. $y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n$. За всяко $i = 1, \ldots, s$ е изпълнено:

$$a_{i1}(\lambda x_1' + \mu x_1'') + \cdots + a_{in}(\lambda x_n' + \mu x_n'') = \lambda(a_{i1}x_1' + \cdots + a_{in}' x_n) + \mu(a_{i1}x_1'' + \cdots + a_{in}'' x_n).$$

По този начин получаваме, че дефинираното изображение е линейно.

Непосредствено от определението се получават следните свойства на едно линейно изображение $\varphi : V_1 \to V_2$:

Свойство 1: $\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, защото $\varphi(\mathbf{0}) = \varphi(0.\mathbf{0}) = 0.\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$;

Свойство 2: $\varphi(-a) = -\varphi(a)$;

Свойство 3: $\varphi(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k) = \lambda_1\varphi(a_1) + \cdots + \lambda_k\varphi(a_k)$;

Свойство 4: Ако $a_1, \ldots, a_k$ са линейно зависими вектори от пространството V_1, тогава $\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_k)$ също са линейно зависими. Следва от факта, че ако $\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k = \mathbf{0}$ и $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \neq (0, \ldots, 0)$, то тогава получаваме следната линейна комбинация: $\lambda_1\varphi(a_1) + \cdots + \lambda_k\varphi(a_k) = \mathbf{0}$.

Теорема 6.8. *Нека V_1 и V_2 са линейни пространства над полето F и $e_1, \ldots, e_n$ е базис на пространството V_1, а $b_1, \ldots, b_n$ са произволни вектори от пространството V_2. Тогава съществува единствено линейно изображение $\varphi : V_1 \to V_2$, за което $\varphi(e_i) = b_i$ за $i = 1, \ldots, n$.*

Доказателство. *Единственост:* Нека за изображенията $\varphi : V_1 \to V_2$ и $\psi : V_1 \to V_2$ е изпълнено $\varphi(e_i) = \psi(e_i) = b_i$, за всеки базисен вектор e_i. Тогава за произволен елемент $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n$ от пространството V_1 имаме:

$$\begin{array}{l} \varphi(x) = x_1\varphi(e_1) + \cdots + x_n\varphi(e_n) = x_1b_1 + \cdots + x_nb_n \\ \psi(x) = x_1\psi(e_1) + \cdots + x_n\psi(e_n) = x_1b_1 + \cdots + x_nb_n \end{array} \Rightarrow \varphi(x) = \psi(x).$$

Следователно двете изображения съвпадат.
Съществуване: Задаваме изображение $\varphi : V_1 \to V_2$, което действа на произволен елемент $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n$ от пространството V_1 по следния начин:

$$\varphi(x) = \varphi(x_1e_1 + \cdots + x_ne_n) = x_1b_1 + \cdots + x_ne_n.$$

За него е изпълнено:

$$\begin{aligned} &\varphi(\lambda(x_1e_1 + \cdots + x_ne_n) + \mu(y_1e_1 + \cdots + y_ne_n)) = \\ &= \varphi((\lambda x_1 + \mu y_1)e_1 + \cdots + (\lambda x_n + \mu y_n)e_n) = \\ &= (\lambda x_1 + \mu y_1)b_1 + \cdots + (\lambda x_n + \mu y_n)b_n = \\ &= \lambda(x_1b_1 + \cdots + x_nb_n) + \mu(y_1b_1 + \cdots + y_nb_n) = \\ &= \lambda\varphi(x) + \mu\varphi(y). \end{aligned}$$

Получихме, че така дефинираното изображение е линейно и изпълнява условието на теоремата. □

2. Изоморфизъм на линейни пространства

Дефиниция 6.9. *Нека V_1 и V_2 са линейни пространства над полето F. Линейното изображение $\varphi : V_1 \to V_2$ се нарича изоморфизъм, ако е биективно изображение. Ако за линейните пространства V_1 и V_2 съществува изоморфизъм $\varphi : V_1 \to V_2$, тогава те се наричат изоморфни и се записва $V_1 \cong V_2$.*

Тъждественото преобразувание от пример 6.3 е изоморфизъм, също така е изоморфизъм и преобразуванието от пример 6.4, което на крайномерно пространство съпоставя вектора от координатите му при фиксиран базис.

Теорема 6.10. *Крайномерните пространства V_1 и V_2 над едно и също поле F са изоморфни тогава и само тогава, когато имат равни размерности.*

Доказателство. Нека $\dim V_1 = \dim V_2 = n$ и нека $e_1, \ldots, e_n$ и $g_1, \ldots, g_n$ са базиси съответно на V_1 и V_2. От теорема 6.8 знаем, че съществува линейно изображение $\varphi : V_1 \to V_2$, за което $\varphi(e_i) = g_i$ за $i = 1, \ldots, n$. Нека

$$z = \alpha_1 g_1 + \cdots + \alpha_n g_n$$

е произволен вектор от пространството V_2, тогава

$$z = \varphi(\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n)$$

и следователно изображението φ е "върху" (сюрекция). Ако

$$\varphi(b) = \varphi(\beta_1 e_1 + \cdots + \beta_n e_n) = \mathbf{0},$$

тогава имаме

$$\beta_1 g_1 + \cdots + \beta_n g_n = \mathbf{0},$$

следователно $(\beta_1, \ldots, \beta_n) = (0, \ldots, 0)$, и $b = \mathbf{0}$. Тогава

$$\varphi(x) - \varphi(y) = \mathbf{0} \Leftrightarrow x - y = \mathbf{0},$$

откъдето получаваме, че изображението φ е инекция и следователно φ е изоморфизъм.

Нека пространствата V_1 и V_2 са изоморфни и $\psi : V_1 \to V_2$ е изоморфизъм и $b_1 = \psi(e_1), \ldots, b_n = \psi(e_n)$, където $e_1, \ldots, e_n$ е базис на пространството V_1. Ако

$$\mathbf{0} = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n = \psi(\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n),$$

то от биективността на изображението ψ, за което $\mathbf{0} = \psi(\mathbf{0})$, получаваме, че

$$\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n = \mathbf{0}.$$

Следователно $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (0, \ldots, 0)$ и векторите $b_1, \ldots, b_n$ са линейно независими. Ако z е произволен елемент на V_2, тогава съществува вектор $x \in V_1$, такъв че $z = \psi(x)$ и

$$x = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n \;\Rightarrow\; z = \xi_1 \psi(e_1) + \cdots + \xi_n \psi(e_n) = \xi_1 b_1 + \cdots + \xi_n b_n.$$

Следователно $z \in l(b_1, \ldots, b_n)$ и $b_1, \ldots, b_n$ пораждат цялото пространство V_2. По този начин се получава, че $b_1, \ldots, b_n$ е базис на пространството V_2, следователно $\dim V_2 = n = \dim V_1$. □

3. Ядро и образ. Ранг и дефект на линейни изображения

Дефиниция 6.11. *Нека V_1 и V_2 са линейни пространства над полето F и $\varphi : V_1 \to V_2$ е линейно изображение. Множеството от всички елементи на пространството V_1, които φ преобразува в нулевия елемент на V_2 се нарича* **ядро** *на изображението φ и се бележи с*

$$\operatorname{Ker}(\varphi) = \{a \in V_1 \mid \varphi(a) = \mathbf{0}\}.$$

Дефиниция 6.12. *Множеството от образите на всички елементи на V_1 при действието на линейното изображение $\varphi : V_1 \to V_2$ се нарича образ на линейното изображение φ и се бележи с $\operatorname{Im}(\varphi) = \{\varphi(a) \mid a \in V_1\}$.*

Твърдение 6.13. *Ако $\varphi : V_1 \to V_2$ е линейно изображение, тогава ядрото $\operatorname{Ker}(\varphi)$ е линейно подпространство на V_1 и образът $\operatorname{Im}(\varphi)$ е линейно подпространство на V_2.*

Доказателство. Ако $a, b \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, тогава

$$\varphi(\lambda a + \mu b) = \lambda\varphi(a) + \mu\varphi(b) = \lambda.\mathbf{0} + \mu.\mathbf{0} = \mathbf{0},$$

следователно $\lambda a + \mu b \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ и $\mathrm{Ker}(\varphi)$ е подпространство на V_1.
Ако $x, y \in \mathrm{Im}(\varphi)$, то съществуват елементи $c, d \in V_1$ за които $x = \varphi(c)$ и $y = \varphi(d)$. От линейността на изображението φ получаваме

$$\lambda x + \mu y = \lambda\varphi(c) + \mu\varphi(d) = \varphi(\lambda c + \mu d).$$

Следователно $\lambda c + \mu d \in \mathrm{Im}(\varphi)$ и $\mathrm{Im}(\varphi)$ е подпространство на V_2. □

Дефиниция 6.14. *Размерността на образа на линейното изображение φ се нарича ранг на φ и се бележи с $r(\varphi) = \dim \mathrm{Im}(\varphi)$. Размерността на ядрото $\mathrm{Ker}(\varphi)$ се нарича дефект на φ и се означава с $d(\varphi) = \dim \mathrm{Ker}(\varphi)$.*

Теорема 6.15. **(за ранга и дефекта)** *Ако V_1 е крайномерно линейно пространство и $\varphi : V_1 \to V_2$ е линейно изображение, тогава*

$$r(\varphi) + d(\varphi) = \dim V_1.$$

Доказателство. Нека $d = d(\varphi)$ е дефекта на изображението φ и един базис на ядрото $\mathrm{Ker}(\varphi)$ да е $e_1, \dots, e_d$. Допълваме линейно независимите вектори $e_1, \dots, e_d$ до базис $e_1, \dots, e_d, e_{d+1}, \dots, e_n$ на пространството V_1. Разглеждаме подпространството $U = l(e_{d+1}, \dots, e_n)$. Ясно е, че $\dim U + \dim \mathrm{Ker}(\varphi) = \dim V$ и подпространствата U и $\mathrm{Ker}(\varphi)$ се пресичат само в нулевия вектор.
Дефинираме изображението $\psi : U \to \mathrm{Im}(\varphi)$ по следния начин $\psi(x) = \varphi(x)$, за всеки елемент $x \in U$. Изображението ψ е линейно, защото се получава от линейното изображение φ. Ако $a \in \mathrm{Im}(\varphi)$, тогава

$$a = \varphi(x) = \varphi(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_d e_d + \lambda_{d+1} e_{d+1} + \dots + \lambda_n e_n) = \varphi(y + z),$$

където $y = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_d e_d \in \mathrm{Ker}\,\varphi$ и $z = \lambda_{d+1} e_{d+1} + \dots + \lambda_n e_n \in U$. Тогава $a = \varphi(x) = \varphi(y) + \varphi(z) = \varphi(z) = \psi(z)$, следователно всеки вектор от $\mathrm{Im}(\varphi)$ е образ под действието на ψ на поне един вектор от подпространството U. Ако z_1 и z_2 са вектори от U за които е изпълнено $\psi(z_1) = \psi(z_2)$, тогава имаме $\psi(z_1 - z_2) = \varphi(z_1 - z_2) = \mathbf{0}$ следователно $z_1 - z_2$ е вектор и от ядрото на $\mathrm{Ker}(\varphi)$ и от $U \cap \mathrm{Ker}(\varphi) = \{\mathbf{0}\}$ следва, че $z_1 = z_2$. Получихме, че $\psi : U \to \mathrm{Im}(\varphi)$ е биективно линейно изоображение, следователно φ е изоморфизъм. От това получаваме $\dim U = \dim \mathrm{Im}(\varphi) = n - \dim \mathrm{Ker}(\varphi)$. □

Забележка 6.16. *Да разгледаме отново пример 6.7, при което изображението φ се дефинира от една линейна система с n неизвестни и s уравнения. Ядрото на изображението $\varphi : F^n \to F^s$ е подпространстовто от решения на хомогенната система. Линейното изображение φ може да се запише по следния начин:*

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{s1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{s2} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{sn} \end{pmatrix} =$$
$$= x_1 c_1 + x_2 c_2 + \dots + x_n c_n$$

Лесно се вижда, че $\mathrm{Im}(\varphi) = l(c_1, c_2, \dots, c_n)$, където $c_1, c_2, \dots, c_n$ са стълбовете на матрицата на системата. Следователно $r(\varphi) = r(A)$, където A е матрицата на системата и в този случай Теоремата за ранга и дефекта задава познатото равенство за размерността на решението на хомогенна система.