Лекция 5

Развитие на детерминанта по ред и по стълб. Формули на Крамер. Минор на матрица

1. Адюнгирано количество и развитие на детерминанта

Дефиниция 5.1. *Нека* $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$ *е детерминанта от ред* n. *Поддетерминанта* Δ_{ji} *на* Δ *наричаме детерминантата от ред* $n-1$, *която се получава когато от* Δ *отстраним елементите, които са на* i*-тия стълб и на* j*-тия ред.*

$$\Delta_{ji} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,i-1} & a_{1,i+1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j-1,1} & \dots & a_{j-1,i-1} & a_{j-1,i+1} & \dots & a_{j-1,n} \\ a_{j+1,1} & \dots & a_{j+1,i-1} & a_{j+1,i+1} & \dots & a_{j+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,i-1} & a_{n,i+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Лема 5.2.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots a_{2n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \dots a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & \dots\ 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{nn} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots a_{2n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \dots a_{n-1n-1} \end{vmatrix} = a_{nn}\Delta_{nn}.$$

Доказателство. Нека да отбележим, че при горните условия, ако $i_n \neq n$, то $a_{ni_n} = 0$. Тогава

$$\det A = \sum_{i_1,\dots,i_n \in S_n} a_{1i_1} \dots a_{ni_n} (-1)^{[i_1,\dots,i_n]} =$$
$$= \sum_{i_1,\dots,i_{n-1} \in S_{n-1}} a_{1i_1} \dots a_{n-1i_{n-1}} a_{nn} (-1)^{[i_1,\dots,i_{n-1},n]} =$$
$$= a_{nn} \sum_{i_1,\dots,i_{n-1} \in S_{n-1}} a_{1i_1} \dots a_{n-1i_{n-1}} (-1)^{[i_1,\dots,i_{n-1}]} = a_{nn}\Delta_{nn}. \qquad \square$$

Лема 5.3.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i-1} & a_{1i} & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j-1,1} & \dots & a_{j-1,i-1} & a_{j-1,i} & a_{j-1,i+1} & \dots & a_{j-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{ji} & 0 & \dots & 0 \\ a_{j+1,1} & \dots & a_{j+1,i-1} & a_{j+1,i} & a_{j+1,i+1} & \dots & a_{j+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,i-1} & a_{n,i} & a_{n,i+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} a_{ji}\Delta_{ji}.$$

Доказателство. Първо разместваме редовете на детерминантата, така че j-тия ред да отиде на последно място, а после разместваме стълбовете, така че i-тия стълб да стане последен. По този начин получаваме:

$$\det A = \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n) = (-1)^{n-j} \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_{j+1}, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{a}_j) =$$

$$= (-1)^{n-j} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i-1} & a_{1i} & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j-1,1} & \dots & a_{j-1,i-1} & a_{j-1,i} & a_{j-1,i+1} & \dots & a_{j-1,n} \\ a_{j+1,1} & \dots & a_{j+1,i-1} & a_{j+1,i} & a_{j+1,i+1} & \dots & a_{j+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,i-1} & a_{n,i} & a_{n,i+1} & \dots & a_{nn} \\ 0 & \dots & 0 & a_{ji} & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{(n-i)+(n-j)} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,i-1} & a_{1,i+1} & \dots & a_{1,n} & a_{1,i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j-1,1} & \dots & a_{j-1,i-1} & a_{j-1,i+1} & \dots & a_{j-1,n} & a_{j-1,i} \\ a_{j+1,1} & \dots & a_{j+1,i-1} & a_{j+1,i+1} & \dots & a_{j+1,n} & a_{j+1,i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,i-1} & a_{n,i+1} & \dots & a_{n,n} & a_{n,i} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{ji} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{j+i} a_{ji} \Delta_{ji}. \qquad \square$$

Дефиниция 5.4. *Адюнгирано количество наричаме числото*

$$A_{ji} = (-1)^{j+i} \Delta_{ji}.$$

Теорема 5.5. *(развиване на детерминанта по j-ти ред)*

$$\det A = a_{j1} A_{j1} + a_{j2} A_{j2} + \dots + a_{jn} A_{jn}.$$

Доказателство. Имаме, че

$$\mathbf{a}_j = (a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jn}) = (a_{j1}, 0, \dots, 0) + (0, a_{j2}, \dots, 0) + \dots + (0, 0, \dots, a_{jn}).$$

Нека да положим

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= (a_{j1}, 0, \dots, 0) \\ \mathbf{x}_2 &= (0, a_{j2}, \dots, 0) \\ &\dots\dots\dots\dots \\ \mathbf{x}_n &= (0, 0, \dots, a_{jn}). \end{aligned}$$

Тогава от полилинейността получаваме

$$\begin{gathered} \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n) = \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{x}_1 + \dots + \mathbf{x}_n, \dots, \mathbf{a}_n) = \\ \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{a}_n) + \dots + \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{x}_n, \dots, \mathbf{a}_n) = \\ a_{j1} A_{j1} + \dots + a_{jn} A_{jn}. \end{gathered} \qquad \square$$

Като се приложи свойството, че при транспониране детерминантата не се променя, се получава следното:

Следствие 5.6. *(развиване на детерминанта по стълб)*

$$\det A = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \dots + a_{nj} A_{nj}.$$

Следващото следствие се получава, като формулите за развиване на детерминанти се приложат за детерминанта с два равни реда или с два равни стълба.

Следствие 5.7. *(фалшиво развиване на детерминанта) Ако $i \neq j$, то*

$$\begin{aligned} a_{1i} A_{1j} + a_{2i} A_{2j} + \dots + a_{ni} A_{nj} &= 0, \\ a_{i1} A_{j1} + a_{i2} A_{j2} + \dots + a_{in} A_{jn} &= 0. \end{aligned}$$

2. Формули на Крамер

Развитието на детерминанта по ред и по стълб показва как решението на една квадратна система линейни уравнения се изразява чрез коефициентите на системата. Нека е зададена система с n уравнения и n неизвестни

$$\left|\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right. .$$

Да разгледаме детерминантата Δ^i от ред $n+1$ в която първия ред съдържа коефициентите на i-то уравнение, а след това следват коефициентите на всички уравнения. Тази детерминанта има два равни реда - ред номер 1 съвпада с реда с номер $i+1$ и те съдържат коефициентите на уравнение i:

$$\Delta^i = 0 = \begin{vmatrix} a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,n} & b_i \\ a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,n} & b_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} & b_n \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|c} a_{i,1} & \dots & a_{i,n} & b_i \\ \hline & & & b_1 \\ & \Delta & & \vdots \\ & & & b_i \end{array}\right| .$$

Развиваме тази детерминанта по първи ред и получаваме

$$\Delta^i = 0 = a_{i1}A_{11} + a_{i2}A_{12} + \cdots + a_{in}A_{1n} + b_iA_{1,n+1},$$

където за k от 1 до n имаме

$$A_{1,k} = (-1)^{1+k} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,k-1} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2,n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \dots & a_{n,n} & b_n \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+k}(-1)^{n-k} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,k-1} & b_2 & a_{2,k+1} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = (-1)^{1+n}\Delta_k.$$

Следователно получихме:

$$(-1)^{1+n}\Delta_1 a_{i,1} + (-1)^{1+n}\Delta_2 a_{i,2} + \cdots + (-1)^{1+n}\Delta_2 a_{i,2} + (-1)^{2+n}\Delta\, b_i = 0.$$

Или което е еквивалентно:

$$a_{i,1}\Delta_1 + a_{i,2}\Delta_2 + \cdots + a_{i,2}\Delta_2 = b_i\Delta.$$

По този начин се получават :

Теорема 5.8 (формули на Крамер). *Нека е зададена система с n уравнения и n неизвестни*

$$\left|\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right.$$

Ако детерминантата $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}\dots a_{1n} \\ \dots\dots \\ a_{n1}\dots a_{nn} \end{vmatrix}$ *е различна от нула, тогава системата има единствено решение*

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ \dots\ ,\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

където

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,k-1} & b_2 & a_{2,k+1} & \dots & a_{2,n} \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

3. Минор на матрица и връзка с ранга на матрица

Дефиниция 5.9. *Нека* $A = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \dots\dots\dots \\ a_{k1} \dots a_{kn} \end{pmatrix}$ *е матрица от ред* $k \times n$. *Ако* $s \leqq \min\{k, n\}$ *и* $i_1, \dots, i_s$ *са номерата на* s *реда на матрицата* A, *а* $j_1, \dots, j_s$ *са номерата на* s *стълба на* A, *тогава минор от* s*-ти ред наричаме детерминантата от ред* s, *образувана от общите елементи на тези редове и стълбове*

$$\begin{vmatrix} a_{i_1,j_1} & a_{i_1,j_2} & \dots & a_{i_1,j_s} \\ a_{i_2,j_1} & a_{i_2,j_2} & \dots & a_{i_2,j_s} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{i_s,j_1} & a_{i_s,j_2} & \dots & a_{i_s,j_s} \end{vmatrix}.$$

Теорема 5.10. *Ако ненулевата матрица* A *има ненулев минор от ред* r *и всички минори от ред* $r+1$ *са равни на* 0, *тогава рангът на матрицата* A *е равен на* r.

Доказателство. Нека ненулевият минор от ред r е

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{i_1,j_1} & a_{i_1,j_2} & \dots & a_{i_1,j_r} \\ a_{i_2,j_1} & a_{i_2,j_2} & \dots & a_{i_2,j_r} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{i_r,j_1} & a_{i_r,j_2} & \dots & a_{i_r,j_r} \end{vmatrix}.$$

Тогава стълбовете $b_{j_1}, b_{j_2}, \dots, b_{j_r}$ на матрицата A са линейно независими, защото $\Delta \neq 0$. Нека s е номер на произволен ред и t е номер на произволен стълб на матрицата A. Нека $\Delta^{s,t}$ е следната детерминанта:

$$\Delta^{s,t} = \begin{vmatrix} a_{s,j_1} & a_{s,j_2} & \dots & a_{s,j_r} & a_{s,t} \\ a_{i_1,j_1} & a_{i_1,j_2} & \dots & a_{i_1,j_r} & a_{i_1,t} \\ a_{i_2,j_1} & a_{i_2,j_2} & \dots & a_{i_2,j_r} & a_{i_2,t} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ a_{i_r,j_1} & a_{i_r,j_2} & \dots & a_{i_r,j_r} & a_{i_r,t} \end{vmatrix}.$$

Когато $s \notin \{i_1, i_2, \dots, i_r\}$ и $t \notin \{j_1, j_2, \dots, j_r\}$ детерминантата $\Delta^{s,t} = 0$, защото е минор от ред $r+1$ на матрицата A, в противен случай $\Delta^{s,t} = 0$, защото има два равни реда или равни стълба. Развиваме $\Delta^{s,t}$ по първия ред:

$$\Delta^{s,t} = 0 = a_{s,j_1}A_{11} + a_{s,j_2}A_{12} + \dots + a_{s,j_r}A_{1r} + a_{s,t}A_{1,r+1}.$$

Адюнгираните количества $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1r}, A_{1,r+1}$ не зависят от индекса s, а само от номерата $i_1, i_2, \dots, i_r, j_1, \dots, j_r, t$. Затова, горното равенство е изпълнено при произволен избор на номера на реда s.

$$\begin{array}{l} \Delta^{1,t} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{1,j_1}A_{11} + a_{1,j_2}A_{12} + \dots + a_{1,j_r}A_{1r} + a_{1,t}A_{1,r+1} = 0 \\ \dotfill \\ \Delta^{k,t} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{k,j_1}A_{11} + a_{k,j_2}A_{12} + \dots + a_{k,j_r}A_{1r} + a_{k,t}A_{1,r+1} = 0 \end{array}$$

Тези равенства задават линейна комбинация на стълбове на матрицата A:

$$A_{11} \cdot \begin{pmatrix} a_{1,j_1} \\ a_{2,j_1} \\ \dots \\ a_{k,j_1} \end{pmatrix} + A_{12} \cdot \begin{pmatrix} a_{1,j_2} \\ a_{2,j_2} \\ \dots \\ a_{k,j_2} \end{pmatrix} + \dots + A_{1r} \cdot \begin{pmatrix} a_{1,j_r} \\ a_{2,j_r} \\ \dots \\ a_{k,j_r} \end{pmatrix} + A_{1,r+1} \cdot \begin{pmatrix} a_{1,t} \\ a_{2,t} \\ \dots \\ a_{k,t} \end{pmatrix} = 0.$$

Коефициентът $A_{1,r+1} = (-1)^{r+2}\Delta \neq 0$, следователно стълбът b_t е линейна комбинация на стълбовете $b_{j_1}, b_{j_2}, \ldots, b_{j_r}$, които са линейно независими. Тъй като индексът t е произволен, то всеки стълб на матрицата A е линейна комбинация на стълбовете $b_{j_1}, b_{j_2}, \ldots, b_{j_r}$, откъдето следва, че $r(A) = r$. $\square$