Лекция 4

Детерминанта - определение и основни свойства

1. Определение за детерминанти

Нека $A \in M_{n\times n}(F)$ и

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Редовете на матрицата A са n-мерни вектори от F^n и да ги отбележим по следния начин:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}) \\ \mathbf{a}_2 &= (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathbf{a}_n &= (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn}). \end{aligned}$$

Стандартният базис на пространството F^n

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (1, 0, \dots, 0) \\ \mathbf{e}_2 &= (0, 1, \dots, 0) \\ &\dots\dots\dots \\ \mathbf{e}_n &= (0, 0, \dots, 1) \end{aligned}$$

представлява редовете на единичната матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Дефиниция 4.1. *Нека A е квадратна матрица от ред n и $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ са редовете ѝ. Ако $\varphi : F^n \times F^n \times \dots \times F^n \longrightarrow F$ е полилинейна и антисиметрична функция на n аргумента, за която $\varphi(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = 1$, тогава детерминанта на матрицата A, наричаме елемента $\varphi(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$. Детерминантата на матрица A ще означаваме с $|A|$, $\det A$ или $\det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$.*

Следователно детерминанта е изображението, което на всяка квадратна матрица съпоставя елемент от полето F, и което е полилинейна и антисиметрична функция на редовете на матрицата, даващо 1 за единичната матрица.

Теорема 4.2. **(коректност на дефиницията)** *Всяка квадратна матрица $A \in M_{n\times n}(F)$ има единствена детерминанта.*

Доказателство. *Единственост:* Нека φ' и φ'' са две полилинейни, антисиметрични функции на n аргумента от $F^n \times \dots \times F^n$ в F, такива че

$$\varphi'(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = \varphi''(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = 1.$$

Да докажем, че

$$\varphi'(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) = \varphi''(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$$

за произволни $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \in F^n$. Наистина, нека

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}) \\ \mathbf{a}_2 &= (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{a}_n &= (a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nn}). \end{aligned}$$

Тогава от Следствие 3.11 получаваме, че

$$\varphi'(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) = \varphi'(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots \mathbf{e}_n). \sum_{j_1, \ldots, j_n \in S_n} (-1)^{[j_1, \ldots, j_n]} \alpha_{1j_1} \alpha_{2j_2} \ldots \alpha_{nj_n},$$

$$\varphi''(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) = \varphi''(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots \mathbf{e}_n). \sum_{j_1, \ldots, j_n \in S_n} (-1)^{[j_1, \ldots, j_n]} \alpha_{1j_1} \alpha_{2j_2} \ldots \alpha_{nj_n}.$$

Тъй като $\varphi'(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) = \varphi''(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) = 1$, то $\varphi'(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) = \varphi''(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$.

Съществуване: Нека дефинираме функцията f на редовете $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$, чрез

$$f(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) = \sum_{i_1, \ldots, i_n \in S_n} (-1)^{[i_1, \ldots, i_n]}.a_{1i_1} \ldots a_{ni_n},$$

където S_n е множеството на всички пермутации на числата $1, \ldots, n$.
Така получаваме, че $f(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) = 1$, тъй като $e_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Нека сега $\mathbf{a}_k = \lambda \mathbf{a}'_k + \mu \mathbf{a}''_k$. Тогава за $f(A)$ имаме:

$$\begin{gathered} f(A) = f(\mathbf{a}_1, \ldots, \lambda \mathbf{a}'_k + \mu \mathbf{a}''_k, \ldots, \mathbf{a}_n) = \\ \sum_{i_1, \ldots, i_n \in S_n} (-1)^{[i_1, \ldots, i_n]}.a_{1i_1} \ldots (\lambda a'_{ki_k} + \mu a''_{ki_k}) \ldots a_{ni_n} = \\ \lambda \sum (-1)^{[i_1, \ldots, i_n]}.a_{1i_1} \ldots a'_{ki_k} \ldots a_{ni_n} + \mu \sum (-1)^{[i_1, \ldots, i_n]}.a_{1i_1} \ldots a''_{ki_k} \ldots a_{ni_n} = \\ \lambda f(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}'_k, \ldots, \mathbf{a}_n) + \mu f(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}''_k, \ldots, \mathbf{a}_n) \end{gathered}$$

и следователно f е полилинейна функция. Остава да покажем, че f е антисиметрична. Нека редовете a_t и a_k са равни и са равни на вектора $b = (b_1, b_2, ..., b_n)$

$$\begin{gathered} f(\mathbf{a}_1, \ldots, \underset{\substack{\uparrow \\ k}}{\mathbf{a}_t}, \ldots, \underset{\substack{\uparrow \\ t}}{\mathbf{a}_k}, \ldots, \mathbf{a}_n) = \\ \sum_{i_1, \ldots, i_n \in S_n} a_{1i_i} \ldots a_{ti_k} \ldots a_{ki_t} \ldots a_{ni_n} (-1)^{[i_1, \ldots, i_k, \ldots, i_t, \ldots, i_n]} = \\ \sum_{i_1, \ldots, i_n \in S_n} -a_{1i_1} \ldots a_{ti_k} \ldots a_{ki_t} \ldots a_{ni_n} (-1)^{[i_1, \ldots, i_t, \ldots, i_k, \ldots, i_n]} = \\ - \sum_{i_1, \ldots, i_n \in S_n} a_{1i_1} \ldots a_{ki_t} \ldots a_{ti_k} \ldots a_{ni_n} (-1)^{[i_1, \ldots, i_t, \ldots, i_k, \ldots, i_n]} = \\ - \sum_{j_1, \ldots, j_n \in S_n} a_{1j_1} \ldots a_{kj_k} \ldots a_{tj_t} \ldots a_{nj_n} (-1)^{[j_1, \ldots, j_n]} = \\ -f(\mathbf{a}_1, \ldots, \underset{\substack{\uparrow \\ k}}{\mathbf{a}_k}, \ldots, \underset{\substack{\uparrow \\ t}}{\mathbf{a}_t}, \ldots, \mathbf{a}_n), \end{gathered}$$

където $j_1 = i_1, \ldots, j_k = i_t, \ldots, j_t = i_k, \ldots, j_n = i_n$. Следователно f е антисиметрична функция и следователно f е детерминанта. □

Следствие 4.3.

$$\begin{vmatrix} a_{11} \, a_{12} \, \ldots a_{1n} \\ a_{21} \, a_{22} \, \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} a_{n2} \, \ldots a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1, \ldots, i_n \in S_n} (-1)^{[i_1, \ldots, i_n]} a_{1i_1} \ldots a_{ni_n},$$

където S_n е множеството на всички пермутации на числата $1, \ldots, n$.

СЛЕДСТВИЕ 4.4. *Ако матрицата A е в триъгълен вид, т.е.*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ или } A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

то $\det A = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$.

Доказателство Ако пермутацията $i_1, \dots, i_n \neq 1, \dots, n$, то тогава винаги съществува поне едно k, такова че $i_k < k$ и поне едно p с $i_p > p$. Тогава получаваме $\det A = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$ □

2. Транспониране на детерминанти

ТВЪРДЕНИЕ 4.5. *При транспониране детерминантата не се променя, т.е.* $\det A = \det A^t$.

Доказателство. Нека $\mathbf{b}_1 = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1})$, $\mathbf{b}_2 = (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{n2})$, ..., $\mathbf{b}_n = (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{nn})$ са стълбовете на матрицата A. Дефинираме функцията f като $f(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n) = \det A$. Тогава

$$f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) = \det E = 1$$

и следователно f е нормирана.

$$f(\mathbf{b}_1, \dots, \lambda\mathbf{b}'_k + \mu\mathbf{b}''_k, \dots, \mathbf{b}_n) = \sum_{i_1,\dots,i_n} a_{1i_1}\dots(\lambda a'_{tk} + \mu a''_{tk})\dots a_{ni_n}(-1)^{[i_1,\dots,i_n]} =$$

$$= \lambda \sum_{i_1,\dots,i_n} a_{1i_1}\dots a'_{tk}\dots a_{ni_n}(-1)^{[i_1,\dots,i_n]} + \mu \sum_{i_1,\dots,i_n} a_{1i_1}\dots a''_{tk}\dots a_{ni_n}(-1)^{[i_1,\dots,i_n]} =$$

$$= \lambda f(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}'_k, \dots, \mathbf{b}_n) + \mu f(\mathbf{b}_1, \dots, \mu\mathbf{b}''_k, \dots, \mathbf{b}_n)$$

и следователно f е полилинейна. Нека накрая да докажем, че f е антисиметрична. Наистина: нека $\mathbf{b}_k \neq \mathbf{b}_s$ за някое $k \neq s$. Нека $i_1, \dots, i_n$ е пермутация на числата $1, \dots, n$ и нека k стои на място l, а s на място t. Събираемото, което се получва при тази пермутация е

$$a_{1i_1}\dots a_{lk}\dots a_{ts}\dots a_{ni_n}(-1)^{[i_1,\dots,i_n]}.$$

Нека $j_1, \dots, j_n$ е пермутацията, която се получава, когато в $i_1, \dots, i_n$ сменим местата на k и s, т.е. k стои вече на място t, а s на място l. Съответното събираемо е

$$a_{1j_1}\dots a_{ls}\dots a_{tk}\dots a_{ni_n}(-1)^{[j_1,\dots,j_n]}.$$

Но $(-1)^{[j_1,\dots,j_n]} = -(-1)^{[i_1,\dots,i_n]}$, а $a_{ts} = a_{ls}$ и $a_{lk} = a_{tk}$ и следователно сумата на тези двете събираеми е нула. Така, тъй като цялата детерминанта се разделя на такива двойки събираеми, то цялата детерминанта е нула и следователно f е антисиметрична.

Така получаваме, че f е полилинейна, антисиметрична, нормирана функция и следователно функцията f на $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ е детерминантата на матрицата с редове $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$. Така окончателно получаваме, че $\det A^t = \det A$. □

СЛЕДСТВИЕ 4.6. *Всички свойства на детерминантата по редовете са валидни и за стълбовете.*

3. Основни свойства на детерминантите

Детерминантите имат следните свойства:

`Свойство 1:` Ако един ред на матрицата A е нулев то $\det A = 0$.

`Свойство 2:` Ако $\mathbf{a}_p = \mathbf{a}'_p + \mathbf{a}''_p$, то

$$\det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}'_p + \mathbf{a}''_p, \ldots, \mathbf{a}_n) = \det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}'_p, \ldots, \mathbf{a}_n) + \det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}''_p, \ldots, \mathbf{a}_n).$$

`Свойство 3:` Ако всички елементи на един ред са умножени по число λ, то λ може да се изнесе пред детерминантата:

$$\det(\mathbf{a}_1, \ldots, \lambda\mathbf{a}_p, \ldots, \mathbf{a}_n) = \lambda.\det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_p, \ldots, \mathbf{a}_n).$$

`Свойство 4:` Ако A има два еднакви реда, то $\det A = 0$.

`Свойство 5:` Ако разменим местата на два реда в A, то детерминантата си сменя знака:

$$\det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_p, \ldots, \mathbf{a}_q, \ldots, \mathbf{a}_n) = -\det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_q, \ldots, \mathbf{a}_p, \ldots, \mathbf{a}_n).$$

`Свойство 6:` Ако към един ред прибавим друг умножен по число, то детерминантата не се променя:

$$\det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_p + \lambda\mathbf{a}_q, \ldots, \mathbf{a}_q, \ldots, \mathbf{a}_n) = \det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_p, \ldots, \mathbf{a}_q, \ldots, \mathbf{a}_n).$$

`Свойство 7:` Ако редовете на A са линейно зависими, то $\det A = 0$.

Доказателство. Нека $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ са линейно зависими. Тогава за някое $1 \le k \le n$ $\mathbf{a}_k$ е линейна комбинация на останалите, т.е.,

$$\mathbf{a}_k = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \cdots + \lambda_{k-1}\mathbf{a}_{k-1} + \lambda_{k+1}\mathbf{a}_{k+1} + \cdots + \lambda_n\mathbf{a}_n.$$

Тогава за детерминантата на A получаваме, че

$$\begin{gathered}
\det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{k+1}, \ldots, \mathbf{a}_n) = \\
\lambda_1 \det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_{k+1}, \ldots, \mathbf{a}_n) + \cdots + \\
+\lambda_{k-1}\det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_{k+1}, \ldots, \mathbf{a}_n) + \\
+\lambda_{k+1}\det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{a}_{k+1}, \ldots, \mathbf{a}_n) + \cdots + \\
+\lambda_n\det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_n, \mathbf{a}_{k+1}, \ldots, \mathbf{a}_n) = \\
= 0 + \cdots + 0 + 0 + \cdots + 0 = 0.
\end{gathered}$$

□

Твърдение 4.7. $\det A \neq 0$, *точно тогава, когато редовете* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ *са линейно независими.*

Доказателство. Посоката от ляво на дясно е Свойство 7. Нека да докажем сега обратната посока. За целта нека $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ са линейно независими. Тогава те образуват базис на F^n. Нека тогава $\mathbf{e}_i = \lambda_{i1}\mathbf{a}_1 + \cdots + \lambda_{in}\mathbf{a}_n$ за $i = 1, \ldots, n$. Тогава

$$1 = \det(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) = \sum \lambda_{1j_1} \ldots \lambda_{nj_n} \det(\mathbf{a}_{j_1}, \ldots, \mathbf{a}_{j_n}) =$$

$$= \sum \lambda_{1j_1} \ldots \lambda_{nj_n} (-1)^{[j_1, \ldots, j_n]} \det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) = \det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n).\Delta,$$

където Δ е елемент от полето F. Така получаваме, че $\det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n).\Delta = 1$ и следователно $\det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) = \det A \neq 0$. □