Лекция 3

Полилинейна и антисиметрична функция

1. Линейна функция и полилинейна функция

Дефиниция 3.1. *Нека V е линейно пространство над поле F. Казваме, че изображението $f : V \longrightarrow F$ е линейна функция, ако при всеки избор на* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in V$ *и* $\alpha, \beta \in F$ *е в сила равенството* $f(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha f(\mathbf{x}) + \beta f(\mathbf{y})$.

Линейните функции имат следните свойства:

а) Ако с $\mathbf{0}$ е отбелязан нулевия вектор от пространството V, тогава е изпълнено $f(\mathbf{0}) = 0$ (следва от $f(\mathbf{0}) = f(0.\mathbf{0}) = 0.f(\mathbf{0}) = 0$).

б) Ако $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ е базис на V, то

$$f(\alpha_1\mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_n\mathbf{e}_n) = \alpha_1 f(\mathbf{e}_1) + \dots + \alpha_n f(\mathbf{e}_n).$$

Дефиниция 3.2. *Казваме, че функцията на k променливи*

$$\varphi : \underbrace{V \times V \times \dots \times V}_{k} \longrightarrow F$$

е полилинейна, ако тя е линейна по всеки един от аргументите си. С други думи: за всяко $i = 1, \dots, k$ е изпълнено

$$\varphi(\mathbf{a}_1, \dots, \alpha\mathbf{a}'_i + \beta\mathbf{a}''_i, \dots, \mathbf{a}_n) = \alpha\varphi(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}'_i, \dots, \mathbf{a}_n) + \beta\varphi(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}''_i, \dots, \mathbf{a}_n).$$

Следствие 3.3. *Нека φ е полилинейна функция на k аргумента, $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ е базис на V, а $\mathbf{a}_i = \alpha_{i1}\mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_{in}\mathbf{e}_n$ за $i = 1, \dots, k$. Тогава*

$$\varphi(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k) = \sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n}\cdots\sum_{j_k=1}^{n} \alpha_{1j_1}\alpha_{2j_2}\dots\alpha_{kj_k}\varphi(\mathbf{e}_{j_1}, \mathbf{e}_{j_2}, \dots, \mathbf{e}_{j_k}).$$

Доказателство. Прилагаме линейността по всички аргументи:

$$\varphi(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k) = \varphi(\sum_{j_1=1}^{n}\alpha_{1j_1}\mathbf{e}_{j_1}, \sum_{j_2=1}^{n}\alpha_{2j_2}\mathbf{e}_{j_2}, \dots, \sum_{j_k=1}^{n}\alpha_{1j_k}\mathbf{e}_{j_k}) =$$
$$= \sum_{j_1=1}^{n}\alpha_{1j_1}\varphi(e_{j_1}, \sum_{j_2=1}^{n}\alpha_{1j_2}\mathbf{e}_{j_2}, \dots, \sum_{j_k=1}^{n}\alpha_{1j_k}\mathbf{e}_{j_k}) = \dots =$$
$$= \sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n}\cdots\sum_{j_k=1}^{n}\alpha_{1j_1}\alpha_{2j_2}\dots\alpha_{kj_k}\varphi(\mathbf{e}_{j_1}, \mathbf{e}_{j_2}, \dots, \mathbf{e}_{j_k}).$$ □

2. Антисиметрична функция

Дефиниция 3.4. *Нека V е линейно пространство над поле F. Казваме, че функцията на k аргумента $\varphi : V \times V \times \dots \times V \longrightarrow F$ е антисиметрична, ако за всяка двойка индекси i, j от $1, \dots, k$ е изпълнено:*

$$\varphi(\mathbf{a}_1, \dots, \underset{\underset{i}{\uparrow}}{\mathbf{a}_i}, \dots, \underset{\underset{j}{\uparrow}}{\mathbf{a}_j}, \dots, \mathbf{a}_k) = -\varphi(\mathbf{a}_1, \dots, \underset{\underset{i}{\uparrow}}{\mathbf{a}_j}, \dots, \underset{\underset{j}{\uparrow}}{\mathbf{a}_i}, \dots, \mathbf{a}_k).$$

Ясно е, че една функция е антисиметрична, когато тя си сменя знака при смяна местата на два от аргументите.

Твърдение 3.5. *Нека φ е антисиметрична функция. Ако два от аргументите на φ са равни, то φ се анулира.*

Доказателство. Да разгледаме $\varphi(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$, където $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_j = \mathbf{b}$. Тогава

$$\varphi(\mathbf{a}_1, \dots, \underset{\overset{\uparrow}{i}}{\mathbf{b}}, \dots, \underset{\overset{\uparrow}{j}}{\mathbf{b}}, \dots, \mathbf{a}_k) = \varphi(\mathbf{a}_1, \dots, \underset{\overset{\uparrow}{i}}{\mathbf{a}_i}, \dots, \underset{\overset{\uparrow}{j}}{\mathbf{a}_j}, \dots, \mathbf{a}_k) =$$

$$= -\varphi(\mathbf{a}_1, \dots, \underset{\overset{\uparrow}{i}}{\mathbf{a}_j}, \dots, \underset{\overset{\uparrow}{j}}{\mathbf{a}_i}, \dots, \mathbf{a}_k) = -\varphi(\mathbf{a}_1, \dots, \underset{\overset{\uparrow}{i}}{\mathbf{b}}, \dots, \underset{\overset{\uparrow}{j}}{\mathbf{b}}, \dots, \mathbf{a}_k).$$

Тогава

$$2\varphi(\mathbf{a}_1, \dots, \underset{\overset{\uparrow}{i}}{\mathbf{b}}, \dots, \underset{\overset{\uparrow}{j}}{\mathbf{b}}, \dots, \mathbf{a}_k) = 0$$

и следователно

$$\varphi(\mathbf{a}_1, \dots, \underset{\overset{\uparrow}{i}}{\mathbf{b}}, \dots, \underset{\overset{\uparrow}{j}}{\mathbf{b}}, \dots, \mathbf{a}_k) = 0. \qquad \square$$

Твърдение 3.6. *Нека φ е полинейна функция. Тогава, ако φ се анулира винаги, когато два от аргументите ѝ са равни, то φ е антисиметрична.*

Доказателство.

$$0 = \varphi(\mathbf{a}_1, \dots, \underset{\overset{\uparrow}{i}}{\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j}, \dots, \underset{\overset{\uparrow}{j}}{\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j}, \dots, \mathbf{a}_k) =$$

$$= \varphi(\mathbf{a}_1, \dots, \underset{\overset{\uparrow}{i}}{\mathbf{a}_i}, \dots, \underset{\overset{\uparrow}{j}}{\mathbf{a}_j}, \dots, \mathbf{a}_k) + \varphi(\mathbf{a}_1, \dots, \underset{\overset{\uparrow}{i}}{\mathbf{a}_j}, \dots, \underset{\overset{\uparrow}{j}}{\mathbf{a}_j}, \dots, \mathbf{a}_k) +$$

$$+ \varphi(\mathbf{a}_1, \dots, \underset{\overset{\uparrow}{i}}{\mathbf{a}_j}, \dots, \underset{\overset{\uparrow}{j}}{\mathbf{a}_i}, \dots, \mathbf{a}_k) + \varphi(\mathbf{a}_1, \dots, \underset{\overset{\uparrow}{i}}{\mathbf{a}_i}, \dots, \underset{\overset{\uparrow}{j}}{\mathbf{a}_i}, \dots, \mathbf{a}_k) =$$

$$= \varphi(\mathbf{a}_1, \dots, \underset{\overset{\uparrow}{i}}{\mathbf{a}_j}, \dots, \underset{\overset{\uparrow}{j}}{\mathbf{a}_i}, \dots, \mathbf{a}_k) + \varphi(\mathbf{a}_1, \dots, \underset{\overset{\uparrow}{i}}{\mathbf{a}_i}, \dots, \underset{\overset{\uparrow}{j}}{\mathbf{a}_j}, \dots, \mathbf{a}_k)$$

Следователно $\varphi(\mathbf{a}_1, \dots, \underset{\overset{\uparrow}{i}}{\mathbf{a}_i}, \dots, \underset{\overset{\uparrow}{j}}{\mathbf{a}_j}, \dots, \mathbf{a}_k) = -\varphi(\mathbf{a}_1, \dots, \underset{\overset{\uparrow}{i}}{\mathbf{a}_j}, \dots, \underset{\overset{\uparrow}{j}}{\mathbf{a}_i}, \dots, \mathbf{a}_k)$. $\square$

Следствие 3.7. *Нека V е n-мерно линейно пространство с базис $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ и φ е полилинейна и антисиметрична функция на n аргумента. Ако $\mathbf{a}_i = \alpha_{i1}\mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_{in}\mathbf{e}_n$ за $i = 1, \dots, n$, тогава*

$$\varphi(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) = \sum_{j_1, \dots, j_n \in S_n} \alpha_{1j_1}\alpha_{2j_2}\dots\alpha_{nj_n}\varphi(\mathbf{e}_{j_1}, \mathbf{e}_{j_2}, \dots, \mathbf{e}_{j_n}).$$

където S_n е множеството на всички пермутации на числата $1, \dots, n$.

Доказателство. Функцията φ е полилинейна и за нея прилагаме следствие 3.3 и получаваме

$$\varphi(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) = \sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n}\cdots\sum_{j_n=1}^{n} \alpha_{1j_1}\alpha_{2j_2}\dots\alpha_{nj_n}\varphi(\mathbf{e}_{j_1}, \mathbf{e}_{j_2}, \dots, \mathbf{e}_{j_n}).$$

Ако за някое събираемо е изпълнено, че $j_s = j_t$, когато $s \neq t$, то тогава $\varphi(\mathbf{e}_{j_1}, \mathbf{e}_{j_2}, \dots \mathbf{e}_{j_n})$ има два равни аргумента и приема стойност 0. Следователно ненулеви са само събираемите, за които $j_1, j_2, \dots, j_n$ са различни числа, т.е. когато са пермутация на числата $1, \dots, n$. От това получаваме

$$\varphi(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) = \sum_{j_1, \dots, j_n \in S_n} \alpha_{1j_1}\alpha_{2j_2}\dots\alpha_{nj_n}\varphi(\mathbf{e}_{j_1}, \mathbf{e}_{j_2}, \dots, \mathbf{e}_{j_n}). \qquad \square$$

3. Инверсии в пермутация и антисиметрична функция

Дефиниция 3.8. *Нека $i_1, i_2, \ldots, i_k$ е пермутация на числата $1, 2, \ldots, k$. Казваме, че числата i_p и i_q от пермутацията са в инверсия когато $i_p - i_q$ и $p-q$ са числа с различни знаци, т.е. когато по-голямо число стои по-напред в пермутацията от по-малко число. Броят на инверсиите в пермутацията $i_1, i_2, \ldots, i_k$ ще бележим с $[i_1, i_2, \ldots, i_k]$.*

Дефиниция 3.9. *Пермутацията $i_1, i_2, \ldots, i_k$ на числата $1, 2, \ldots, k$ се нарича четна, ако броят на инверсиите $[i_1, i_2, \ldots, i_k]$ е четно число. Ако броят на инверсиите е нечетно число, тогава пермутацията се нарича нечетна.*

Пермутациите имат следните свойства:

`Свойство 1:` Пермутацията $1, 2, \ldots, n$ е четна.

`Свойство 2:` Ако разменим местата на два съседни елемента в една пермутация, то тя си сменя четността.

`Свойство 3:` Ако разменим местата на два произволни елемента в една пермутация, то тя си променя четността.

`Свойство 4:` Когато n>1 половината от всички пермутации са четни и половината са нечетни.

Теорема 3.10. *Нека φ е антисиметрична функция на k аргумента и $i_1, i_2, \ldots, i_k$ е пермутация на числата $1, 2, \ldots, k$. Тогава*

$$\varphi(\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, \ldots, \mathbf{a}_{i_k}) = (-1)^{[i_1, i_2, \ldots, i_k]}.\varphi(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k).$$

Доказателство. Ще докажем твърдението с индукция по k.
При $k = 1$ твърдението е тривиално.
Нека твърдението е в сила за произволна функция на $k-1$ аргумента и да разгледаме $i_1, i_2, \ldots, i_k$ пермутация на числата $1, 2, \ldots, k$.

- Ако числото k е на последно място, т.е. $i_k = k$, тогава k не учавства в инверсия и пермутаците $i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}$ и $i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}, k$ имат по равен брой инверсии. От индукционното предположение се получава:

$$\varphi(\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, \ldots, \mathbf{a}_{i_{k-1}}, \mathbf{a}_k) = (-1)^{[i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}]}.\varphi(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_k).$$

- Ако числото k не е на последно място, а е на j-то място, т.е. $i_j = k$ и $j < k$, тогава$\{i_1, \ldots, i_{j-1}, i_{j+1}, \ldots, i_k\} = \{1, \ldots, k-1\}$. В тази пермутация числото k е в инверсия с всички $k-j$ елемента $\{i_{j+1}, \ldots, i_k\}$, записани след него. Следователно е изпълнено

$$[i_1, \ldots, i_{j-1}, k, i_{j+1}, \ldots, i_k] = [i_1, \ldots, i_{j-1}, i_{j+1}, \ldots, i_k] + (k-j).$$

Тогава, за антисиметричната функция φ е изпълнено

$$\begin{gathered}\varphi(\mathbf{a}_{i_1}, \ldots, \mathbf{a}_{i_{j-1}}, \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{i_{j+1}}, \ldots, \mathbf{a}_{i_k}) = \\ = (-1).\varphi(\mathbf{a}_{i_1}, \ldots, \mathbf{a}_{i_{j-1}}, \mathbf{a}_{i_{j+1}}, \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{i_{j+2}}, \ldots, \mathbf{a}_{i_k}) = \ldots = \\ = (-1)^{k-j}\varphi(\mathbf{a}_{i_1}, \ldots, \mathbf{a}_{i_{j-1}}, \mathbf{a}_{i_{j+1}}, \mathbf{a}_{i_{j+2}}, \ldots, \mathbf{a}_{i_k}, \mathbf{a}_k).\end{gathered}$$

От вече доказаното, за пермутация с последен елемент k получаваме

$$\begin{gathered}\varphi(\mathbf{a}_{i_1}, \ldots, \mathbf{a}_{i_{j-1}}, \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{i_{j+1}}, \ldots, \mathbf{a}_{i_k}) = \\ = (-1)^{k-j}.(-1)^{[i_1, \ldots, i_{j-1}, i_{j+1}, \ldots, i_k]}.\varphi(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k) = \\ = (-1)^{[i_1, \ldots, i_k]}.\varphi(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k).\end{gathered}$$

□

Следствие 3.11. *Нека V е n-мерно линейно пространство с базис $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ и φ е полилинейна и антисиметрична функция на n аргумента. Ако*

$$\mathbf{a}_i = \alpha_{i1}\mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_{in}\mathbf{e}_n \quad \text{за } i = 1, \dots, n,$$

то тогава

$$\varphi(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) = \varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) \cdot \sum_{j_1,\dots,j_n \in S_n} (-1)^{[j_1,\dots,j_n]} \alpha_{1j_1}\alpha_{2j_2}\dots\alpha_{nj_n},$$

където S_n е множеството на всички пермутации на числата $1, \dots, n$.

Доказателство. Функцията φ е полилинейна и антисиметрична и за нея прилагаме следствие 3.7 и получаваме

$$\varphi(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) = \sum_{j_1,\dots,j_n \in S_n} \alpha_{1j_1}\alpha_{2j_2}\dots\alpha_{nj_n}\varphi(\mathbf{e}_{j_1}, \mathbf{e}_{j_2}, \dots, \mathbf{e}_{j_n}).$$

За $\varphi(\mathbf{e}_{j_1}, \mathbf{e}_{j_2}, \dots, \mathbf{e}_{j_n})$ прилагаме теорема 3.10 и получаваме

$$\varphi(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) = \sum_{j_1,\dots,j_n \in S_n} \alpha_{1j_1}\alpha_{2j_2}\dots\alpha_{nj_n} \cdot (-1)^{[j_1,\dots,j_n]}\varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) =$$

$$= \varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) \cdot \sum_{j_1,\dots,j_n \in S_n} (-1)^{[j_1,\dots,j_n]} \alpha_{1j_1}\alpha_{2j_2}\dots\alpha_{nj_n}\,. \qquad \square$$