Лекция 1

Ранг на система вектори и ранг на матрица

1. Ранг на система вектори

Нека V е линейно пространство над поле F.

Дефиниция 1.1. *Нека $a_1, \dots, a_s$ са елементи на пространството V.* **Ранг на системата** *$\{a_1, \dots, a_s\}$ се нарича размерността на линейната обвивка на $a_1, \dots, a_s$, т.е. $r(a_1, \dots, a_s) = \dim(l(a_1, \dots, a_s))$.*

Дефиниция 1.2. *Ще казваме, че подсистемата $B = \{a_{i_1}, \dots, a_{i_r}\}$ е* **максимална линейно независима подсистема** *(МЛНП) на системата от вектори $A = \{a_1, \dots, a_s\}$, когато B е такава линейно независима подсистема, за която всеки елемент от A е линейна комбинация на елементите от B.*

Твърдение 1.3. *Ако системата $A = \{a_1, \dots, a_s\}$ съдържа поне един ненулев елемент, тогава A има максимална линейно независима подсистема.*

Твърдение 1.4. *Рангът на ненулевата система $A = \{a_1, \dots, a_s\}$ е равен на r тогава и само тогава когато системата A има максимално линейно независима подсистема, която съдържа r вектора.*

Доказателство. Ако $r(a_1, \dots, a_s) = r$, то линейната обвивка $U = l(a_1, \dots, a_s)$ има размерност r и нека $E = \{e_1, \dots, e_r\}$ е базис на U. Нека B е максимално линейно независима подсистема на A. Всеки вектор от B принадлежи на линейната обвивка U и следователно е линейна комбинация на векторите от базиса. Векторите от A, които пораждат пространството U, са линейни комбинации на векторите от B следователно $U = l(B)$. Системите B и E са линейно независими и от Основната Лема получаваме, че те съдържат по равен брой елементи. $\square$

Твърдение 1.5. *Ако всеки вектор от система $B = \{b_1, \dots, b_k\}$ е линейна комбинация от векторите на системата $A = \{a_1, \dots, a_s\}$, тогава $r(B) \leq r(A)$.*

Доказателството следва непосредствено от факта, че $l(B) \subseteq l(A)$.

Дефиниция 1.6. *Системите $A = \{a_1, \dots, a_s\}$ и $B = \{b_1, \dots, b_k\}$ се наричат линейно еквивалентни ако всеки вектор от A е линейна комбинация от векторите от B и всеки вектор от B е линейна комбинация на векторите от A. (т.е. $A \subset l(B)$ и $B \subset l(A)$)*

Следствие 1.7. *Ако системите $A = \{a_1, \dots, a_s\}$ и $B = \{b_1, \dots, b_k\}$ са линейно еквивалентни, тогава $r(A) = r(B)$.*

2. Ранг на матрица

Нека $A \in M_{n\times k}(F)$ и нека $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix}$. Нека да бележим редовете на A по следния начин:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1k}), \\ \mathbf{r}_2 &= (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2k}), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathbf{r}_n &= (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nk}). \end{aligned}$$

Редовете $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n$ са k-мерни вектори от F^k.
Нека стълбовете на матрицата A бележим със $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k$, и те са вектор стълбове с дължина n:

$$\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \ \mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \dots, \ \mathbf{c}_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \dots \\ a_{nk} \end{pmatrix}.$$

Дефиниция 1.8. *Елементарни преобразувания по редове на матрица се наричат следните преобразувания:*
(1) размяна местата на два реда на матрицата;
(2) умножаване на ред от матрицата по елемент от полето, различен от 0;
(3) към елементите на един ред поелементно прибавяне на елементите на друг ред, умножени по фиксиран елемент от полето.

Теорема 1.9. *Ако матрицата B е получена от матрицата A чрез последователно прилагане на краен брой елементарни преобразувания по редове, тогава:*
1. рангът на системата вектор-редове на матрицата A е равен на ранга на системата вектор-редове на B.
2. рангът на системата вектор-стълбове на A е равен на ранга на системата вектор-стълбове на B

Доказателство. Ще докажем 1. и 2. поотделно.
1. Непосредствено се вижда, че след произволно елементарно преобразувание по редове, от матрицата A се получава матрица B, чиито редове са линейно еквивалентни на редовете A, следователно рангът на редовете на B съвпада с ранга на редовете на A.
2. Нека матрицата $B = (b_{ij})_{n\times k}$ е получена чрез последователност от елементарни преобразувания по редове от матрицата $A = (a_{ij})_{n\times k}$. Да бележим стълбовете на матрицата A с $c_1, \dots, c_k$ а стълбовете на матрицата B с $d_1, \dots, d_k$. Разглеждаме хомогенните системи линейни уравнения, имащи матрици съответно A и B:

$$(1) \left| \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1k}x_k = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2k}x_k = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nk}x_k = 0 \end{array} \right. \qquad (2) \left| \begin{array}{l} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1k}x_k = 0 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \dots + b_{2k}x_k = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \dots + b_{nk}x_k = 0 \end{array} \right.$$

Системата (2) се получава от (1) чрез последователност от следните преобразувания: размяна местата на уравненията, умножаване на двете страни на уравнение по елемент от полето, различен от 0 и прибавяне на едно уравнение към друго уравнение. Всяко едно от тези преобразувания привежда коя да е система линейни уравнения към система, която има същите решения като изходната, т.е. еквивалентна на нея. Следователно ако $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ е решение на система (1), то е изпълнено

$$\beta_1 c_1 + \beta_2 c_2 + \dots + \beta_k c_k = 0 \Leftrightarrow \beta_1 d_1 + \beta_2 d_2 + \dots + \beta_k d_k = 0.$$

Нека $C = \{c_{i_1}, \dots, c_{i_s}\}$ е подсистема от стълбовете на матрицата A и $D = \{d_{i_1}, \dots, d_{i_s}\}$ е съответната подсистемата от стълбове на матрицата B. Ако C е линейно зависима система, то тогава съществуват $\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \dots, \beta_{i_s} \in F$, не всичките равни на нула, такива че $\beta_{i_1} c_{i_1} + \beta_{i_2} c_{i_2} + \dots + \beta_{i_s} c_{i_s} = 0$. Следователно векторът $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, за който координатите $\beta_j = 0$, за всяко j различно от $i_1, \dots, i_s$ е решение на системата (1), откъдето получаваме че $\beta_{i_1} d_{i_1} + \beta_{i_2} d_{i_2} + \dots + \beta_{i_s} d_{i_s} = 0$. Получихме, че ако C е линейно зависима подсистема, тогава и D също е линейно зависима система. По аналогичен начин се получава и че ако D е линейно зависима система, тогава и C е също линейно зависима. Следователно една подсистема от стълбове на матрицата A е линейно зависима тогава и само тогава, когато съответната подсистема от стълбове на B също е линейно зависима. От това следва, че една максимална линейно независима подсистема от стълбове на матрицата A отива в максимално линейно независима подсистема от стълбове на матрицата B и рангът на стълбовете на A е равен на ранга на стълбовете на B. □

Следствие 1.10. *Ако матрицата B е получена от матрицата A чрез прилагане на краен брой елементарни преобразувания по стълбове, тогава: рангът на системата вектор-редове на матрицата A е равен на ранга на системата редове на B, рангът на системата вектор-стълбове на A е равен на ранга на системата вектор-стълбове на B.*

Доказателството следва непосредствено от горната теорема при транспониране на матриците.

Теорема 1.11. *За произволна матрица A е изпълнено, че рангът на системата вектор-редове на матрицата A съвпада с ранга на системата вектор-стълбове на A.*

Доказателство. Нека матрицата е $A = (a_{ij})_{n \times k}$.
Ако матрицата A е нулевата, тогава и двата ранга са равни на 0.
Ако матрицата A е ненулева, тогава ще докажем твърдението с индукция по n - броя на редовете на матрицата A.
При $n = 1$ матрицата е един вектор-ред от вида $A = (a_{11}, \dots, a_{1k})$. Съществува поне един ненулев елемент в матрицата и затова рангът на едномерните вектор-стълбове на A е 1, колкото е и рангът на ненулевия вектор-ред, който е матрицата A, и твърдението е изпълнено за $n = 1$.
Нека твърдението е в сила за произволна ненулева матрица с $n-1$ реда. Разместваме (ако се налага) местата на редовете и на стълбовете на ненулевата матрица A за да получим матрица $A' = (a'_{ij})$, за която елемента a'_{11} е ненулев. След това разделяме първия ред на a'_{11} и прибавяме новополучения ред, умножен по $-a'_{i1}$ към i-тия ред за $i = 2, \dots, n$. Получаваме матрица от следния вид:

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & a''_{12} & \dots & a''_{1k} \\ 0 & a''_{22} & \dots & a''_{2k} \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & a''_{n2} & \dots & a''_{nk} \end{pmatrix}.$$

След това прибавяме първия стълб, умножен по $-a''_{1j}$, към j-тия стълб за $j = 2, \dots, k$. Получава се матрица от следния вид:

$$A''' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a'''_{22} & \dots & a'''_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a'''_{n2} & \dots & a'''_{nk} \end{pmatrix}.$$

Матрицата

$$A_1 = \begin{pmatrix} a'''_{22} & \dots & a'''_{2k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a'''_{n2} & \dots & a'''_{nk} \end{pmatrix}$$

има $n-1$ реда и $k-1$ стълба и по индукционно предположение за нея е в сила, че рангът на вектор-редовете е равен на ранга на вектор-стълбовете и нека този ранг е равен на r. Ясно е, че първият вектор-стълб на матрицата A''' не е от линейната обвивка на следващите $k-1$ стълба на тази матрица, които имат същият ранг както ранга на стълбовете на матрицата A_1, откъдето следва че рангът на системата вектор-редове на матрицата A_1 е $r+1$. По същия начин получаваме, че ранга на системата-вектор редове на A_1 е също $r+1$, откъдето се установява, че твърдението на теоремата е в сила. □

Дефиниция 1.12. *Ранг на матрица A се нарича рангът на системата вектор-редове на матрицата A, който е равен на системата вектор-стълбове. Ако матрицата A има ранг t ще го бележим чрез $r(A) = t$.*

Рангът на нулевата матрица е 0.

Следствие 1.13. *Ако A е $n \times k$ матрица, тогава за ранга на A е изпълнено $r(A) \leq min\{n, k\}$.*

Дефиниция 1.14. *Ако квадратната матрица A от ред n има ранг n тогава A се нарича* **неособена матрица**.

Следствие 1.15. *Ако квадратна матрица A е неособена, тогава само с елементарни преобразувания по редове тя може да се преобразува до единичната матрица.*

Доказателство. Индукция по броя n на редовете и стълбовете на A.
При $n = 1$ матрицата е от вида $A = (a)$, където $a \neq 0$ и като разделим единствения ред на елемента a получаваме $E_1 = (1)$ - единичната матрица от ред 1.
Да допуснем, че Следствие 1.15 е доказано за всички квадратни матрици от ред $n-1$, които имат ранг $n-1$. Нека A е квадратна матрица от ред n, която има ранг n. Следователно стълбовете на A са линейно независими и първият стълб е ненулев. Само с преобразувания по редове можем да стигнем до следната матрица:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a'_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{pmatrix}.$$

Квадратната подматрица

$$A_1 = \begin{pmatrix} a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a'_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{pmatrix}$$

е от ред $n-1$ и има линейно независими редове. Следователно $r(A_1) = n-1$. От индукционното предположение следва, че само с преобразования по редове може да се приведе матрицата A_1 до единичната матрица от ред $n-1$. Прилагайки тези преобразувания към матрицата A' ще получим следната матрица

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & a''_{12} & a''_{13} & \dots & a''_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \hdotsfor{5} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Ако умножим по подходящи множители последните $n-1$ реда на получената матрица и ги прибавим към първия ред ще се получи единичната матрица от ред n. $\square$