

Th. за  $\text{rk}(\varphi)$  &  $d(\varphi)$

$$\text{rk}(\varphi) + d(\varphi) = n = \dim M_{n \times 1}(F) \Leftrightarrow \text{rk} A + \dim S_0 = n$$

Th. за размерността на пр-вото от рмш.  $S_0$  на хом. мн. с ма с матрица  $A$ .

Матрица на линейно изображение на  $n$ -мерни пространства. Действия с линейни изображения. Произведение на матрици. Умножение на детерминанти.

Def: Нека  $\varphi: U \rightarrow V$  е линейно изображение,  $e = (e_1, \dots, e_n)$  е базис на  $U$ ,  $f = (f_1, \dots, f_m)$  е базис на  $V$ . Тогава матрицата:

$$A = \begin{matrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{matrix} \begin{pmatrix} | & & | & & | \\ \varphi(e_1) & \dots & \varphi(e_j) & \dots & \varphi(e_n) \\ | & & | & & | \end{pmatrix}, \begin{matrix} \text{съставена по} \\ \text{стъбове от коор-} \\ \text{динатите на} \\ \varphi(e) = (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) \\ \text{срещно базиса} \end{matrix}$$

$f$  на  $V$  е нарича матрица на  $\varphi$  срещно базиса  $e$  на  $U$  и базиса  $f$  на  $V$ . Матрицата  $A$  на  $\varphi$  срещно  $e$  и  $f$  определя еднозначно

У, защото образите на базиса дават еднозначно У. Всяка матрица  $A \in M_{m \times n}(F)$  е матрица на линейно изображение  $F^n \rightarrow F^m$  спрямо  $n$  и  $m$  какви базиси.

Примери: 1)  $\mathcal{O}: U \rightarrow V$ ,  $\mathcal{O}(u) = 0_V$  за  $\forall u \in U$  е линейно, защото  $\mathcal{O}(\alpha u + \beta u') = 0_V = \alpha 0_V + \beta 0_V = \alpha \mathcal{O}(u) + \beta \mathcal{O}(u')$ . Матрицата на  $\mathcal{O}$  е  $0_{m \times n}$  спрямо произволни базиси на  $U$  и  $V$ .

2) Диференцирането  $\frac{d}{dx} : \mathbb{R}^{(n+1)}[x] = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid \deg f \leq n\} \rightarrow \mathbb{R}^{(n)}[x]$  е линейно изображение, защото  $\frac{d}{dx}(\alpha f + \beta g) = \frac{d}{dx}(\alpha f) + \frac{d}{dx}(\beta g) = \alpha \frac{d}{dx}f + \beta \frac{d}{dx}g$  за  $f, g \in \mathbb{R}^{(n+1)}[x]$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

Матрицата на  $\frac{d}{dx}$  спрямо базиса  $1, x, \frac{x^2}{2!}, \dots, \frac{x^n}{n!}$  на  $\mathbb{R}^{(n+1)}[x]$  и базиса  $1, x, \frac{x^2}{2!}, \dots, \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$  на  $\mathbb{R}^{(n)}[x]$  е:

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} | & & | & & | & & | \end{matrix} \\ \begin{matrix} | \\ \vdots \\ \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \end{matrix} & \begin{pmatrix} \frac{d}{dx}(1) & \frac{d}{dx}(x) & \dots & \frac{d}{dx}(\frac{x^j}{j!}) & \dots & \frac{d}{dx}(\frac{x^n}{n!}) \\ | & | & & | & & | \end{pmatrix} \end{matrix} =$$

$$\left[ \frac{d}{dx} \left( \frac{x^j}{j!} \right) = \frac{j x^{j-1}}{j!} = \frac{x^{j-1}}{(j-1)!} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} E_n$$

Def: Ако  $\varphi: U \rightarrow U$  е линеен оператор и  $e = (e_1, e_n)$  е базис на  $U$ , то  $A = \begin{pmatrix} \varphi(e_1) & \varphi(e_2) & \dots & \varphi(e_n) \end{pmatrix}$  се

нарича матрицата на  $\varphi$  спрямо базиса  $e$  на  $U$ .

$A$  възстановява еднозначно  $\varphi$  и за  $\forall A \in M_{n \times n}(F)$

Замислен оператор  $\varphi: F^n \rightarrow F^n$  с матрица  $A$  спрямо някакъв базис на  $U$ .

Пример:  $\text{Id}: U \rightarrow U$ ,  $\text{Id}(u) = u$  за  $\forall u \in U$  е

линейно, защото  $\alpha \text{Id}(u) + \beta \text{Id}(u') = \alpha u + \beta u' = \text{Id}(\alpha u + \beta u')$  за  $\forall u, u' \in U$ ,  $\forall \alpha, \beta \in F$ .

Матрицата на  $\text{Id}$  спрямо произволен базис

$e = (e_1, \dots, e_n)$  на  $M$  е:

$$A = \begin{matrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{matrix} \begin{pmatrix} | & & | & & | \\ \text{Id}(e_1) & \dots & \text{Id}(e_j) & \dots & \text{Id}(e_n) \\ | & & | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ 0 & 0 & & 1 & \\ 0 & 0 & & 0 & \ddots \end{pmatrix} = E_n.$$

Def: Ако  $\varphi: M \rightarrow V$  и  $\psi: M \rightarrow V$  са линейни изображения,  $\lambda \in F$ , то  $\varphi + \psi: M \rightarrow V$ ,  $(\varphi + \psi)(u) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(u) + \psi(u)$ ,  $\forall u \in M$  се нарича сума на  $\varphi$  и  $\psi$ , а  $\lambda\varphi: M \rightarrow V$ ,  $(\lambda\varphi)(u) := \lambda\varphi(u)$  се нарича произведение на  $\varphi$  с  $\lambda$ .

Лема: Ако  $\varphi, \psi: M \rightarrow V$  са линейни изображения,  $\lambda \in F$ , то  $\varphi + \psi: M \rightarrow V$  и  $\lambda\varphi: M \rightarrow V$  са линейни изображения. ~~##~~

Док-во:

За  $\forall u, u' \in M$ ,  $\forall \alpha, \beta \in F$  имаме

$$(\varphi + \psi)(\alpha u + \beta u') \stackrel{\text{def } \varphi + \psi}{=} \varphi(\alpha u + \beta u') + \psi(\alpha u + \beta u') =$$

$$\begin{matrix} \varphi, \psi \text{ са} \\ \text{линейни} \end{matrix} \alpha \varphi(u) + \beta \varphi(u') + \alpha \psi(u) + \beta \psi(u') =$$

$$= \alpha(\varphi(u) + \psi(u)) + \beta(\varphi(u') + \psi(u')) \stackrel{\text{def } \varphi + \psi}{=} \alpha(\varphi + \psi)(u) + \beta(\varphi + \psi)(u') \text{ и } (\lambda\varphi)(\alpha u + \beta u') \stackrel{\text{def } \lambda\varphi}{=} \lambda\varphi(\alpha u + \beta u') \stackrel{\varphi \text{ е л. из.}}{=} \lambda(\alpha\varphi(u) + \beta\varphi(u'))$$

$$\begin{aligned}
 = \lambda(\alpha\psi) &= \lambda(\alpha\psi(u) + \beta\psi(u')) = (\lambda\alpha)\psi(u) + (\lambda\beta)\psi(u') = \\
 &= \lambda(\alpha\lambda)\psi(u) + (\beta\lambda)\psi(u') = \alpha[\lambda\psi(u)] + \beta[\lambda\psi(u')] = \\
 &= \lambda(\alpha\psi)(u) + \beta(\lambda\psi)(u'). \quad \text{Q.E.D.}
 \end{aligned}$$

(16.) Множество  $\text{Hom}(U, V)$  на линейните изображения  $U \rightarrow V$  е линейно пространство относительно определените по-горе събиране и умножение с  $\lambda \in F$ .

Док-во: \_\_\_\_\_

Всяка от аксиомите за линейно пр-во за  $\text{Hom}(U, V)$  е от вида  $\Phi_1 = \Phi_2$  за линейни изображения  $\Phi_1, \Phi_2; U \rightarrow V$ .

$\Phi_1 = \Phi_2 \Leftrightarrow \Phi_1(u) = \Phi_2(u)$  за  $\forall u \in U$ . Така че аксиомите в  $\text{Hom}(U, V)$  следват от аксиомите във  $V$  след устойчивостта на двете страни в  $u \in U$ .

$$\begin{aligned}
 [(\psi + \varphi) + \theta](u) &= (\psi + \varphi)(u) + \theta(u) = [\psi(u) + \varphi(u)] + \\
 + \theta(u) &\stackrel{\text{асоц. на } \oplus}{=} \psi(u) + [\varphi(u) + \theta(u)] = \psi(u) + (\varphi + \theta)(u) = \\
 &= [\psi + (\varphi + \theta)](u) \text{ за } \forall u \in U \Rightarrow (\psi + \varphi) + \theta = \psi + (\varphi + \theta).
 \end{aligned}$$

Нулевият вектор на  $\text{Hom}(U, V)$  е  $0: U \rightarrow V$ ,  
 $0(u) = 0_V$  за  $\forall u \in U$ .

Противоположното на линейно изображение  
 $\varphi: U \rightarrow V$  е  $-\varphi = (-1)\varphi: U \rightarrow V$ . Проверка на  
останалите 7 аксиоми.

Нека  $\varphi: U \rightarrow V$  е линейно изображение с  
 матрица  $A \in M_{m \times n}(F)$  спрямо базис  $e = (e_1, \dots, e_n)$   
 на  $U$  и базис  $f = (f_1, \dots, f_m)$  на  $V$ , а  $\psi: U \rightarrow V$  е  
 линейно изображение с матрица  $B \in M_{m \times n}(F)$   
 спрямо базисите  $e$  и  $f$ . Определяме  $A+B$   
 по такъв начин, че да е матрицата на  
 $\varphi + \psi: U \rightarrow V$  спрямо базисите  $e$  и  $f$ .

С други думи, ~~\*~~ за  $\forall 1 \leq j \leq n$  искаме  $j$ -тият  
 стълб на  $A+B$  да се състои от координатите

$$\begin{aligned} \text{на } (\varphi + \psi)(e_j) &= \varphi(e_j) + \psi(e_j) = \sum_{s=1}^m A_{sj} f_s + \sum_{s=1}^m B_{sj} f_s = \\ &= \sum_{s=1}^m (A_{sj} + B_{sj}) f_s \text{ спрямо базиса } f = (f_1, \dots, f_m) \text{ на } \end{aligned}$$

$V$ . Това означава, че  $(A+B)_{sj} f_s = A_{sj} f_s + B_{sj} f_s$  за  $\forall 1 \leq s \leq m$ ,

$\forall 1 \leq j \leq n$  или  $A+B \in M_{m \times n}(F)$  е матрицата

$(A+B)y = Ay + By$ . За  $\lambda \in F$  определяме  $\lambda A$  така, че да е матрицата  ~~$A+B$~~  на  $\lambda\varphi: U \rightarrow V$  спрямо базисите  $e$  и  $f$ . Това означава, че за  $\forall 1 \leq j \leq n$ ,  $j$ -тият стълб на  $\lambda A$  се състои от координатите на  $(\lambda\varphi)(e_j) = \lambda\varphi(e_j) = \lambda\left(\sum_{s=1}^m A_{sj}f_s\right) = \sum_{s=1}^m (\lambda A_{sj})f_s$  спрямо базиса  $f = (f_1, \dots, f_m)$  на  $V$ .

Опитук, за  $\forall 1 \leq s \leq m$  имаме  $(\lambda A)_{sj} = \lambda A_{sj}$  или умножението на матрица с число  $\lambda \in F$  трябва да е покомпонентно.

(Тв.) Нека  $U$  и  $V$  са линейни пр-ва над  $F$  с  $\dim U = n$ ,  $\dim V = m$ . Тогава пространството  $\text{Hom}(U, V)$  на линейните изображения  $U \rightarrow V$  е изоморфно на пространството  $M_{m \times n}(F)$  относно покомпонентно определените събиране на матрици и умножение на матрица с число. По-точно, за произволен базис  $e = (e_1, \dots, e_n)$  на  $U$  и базис  $f = (f_1, \dots, f_m)$  на  $V$  съответстват

фактически от съотв.  $\varphi \in \text{Hom}(U, V) \rightarrow A_\varphi \in M_{m \times n}(F)$ , съпоставящо, на  $\varphi \in \text{Hom}(U, V)$  матрицата  $A_\varphi \in M_{m \times n}(F)$  на  $\varphi$  спрямо базисите  $e$  на  $U$  и  $f$  на  $V$  е

линейен изоморфизъм. В частност,  $M_{m \times n}(F)$  <sup>-12</sup>  
 образува линейно пространство над  $F$  относно  
 почленно събиране и умножение с  $\lambda \in F$ .

Док-во:

Спомогателно, че  $\varphi \mapsto A_\varphi$  е взаимно еднозначно  
 съответствие. Освен това,  $A$  е линейно,  
 защото  $A_{\alpha\varphi + \beta\psi} = A_{\alpha\varphi} + A_{\beta\psi} = \alpha A_\varphi + \beta A_\psi$  за  
 $\forall \varphi, \psi \in \text{Hom}(U, V), \forall \alpha, \beta \in F$ .

Def: Ако  $\varphi: U \rightarrow V$  и  $\psi: V \rightarrow W$  са линейни  
~~изображения~~ изображения, то  $\psi\varphi: U \rightarrow W$  ( $(\psi\varphi)(u) = \psi(\varphi(u))$ )  
 за  $\forall u \in U$  се нарича произведение на  $\varphi$  и  $\psi$ .

Лема: произведението  ~~$\psi\varphi$~~   $\psi\varphi: U \rightarrow W$  на  
 линейни изображения  $\varphi: U \rightarrow V$  и  $\psi: V \rightarrow W$  е  
 линейно изображение.

Док-во:

$$\begin{aligned} \psi(\psi\varphi)(\alpha u + \beta u') &\stackrel{\text{def } \psi\varphi}{=} \psi(\varphi(\alpha u + \beta u')) \stackrel{\varphi \text{ л.н.}}{=} \\ &= \varphi(\alpha \varphi(u) + \beta \varphi(u')) \stackrel{\psi \text{ л.н.}}{=} \alpha \psi(\varphi(u)) + \beta \psi(\varphi(u')) \stackrel{\text{def } \psi\varphi}{=} \\ &= \alpha (\psi\varphi)(u) + \beta (\psi\varphi)(u') \text{ за } \forall u, u' \in U, \forall \alpha, \beta \in F. \end{aligned}$$

Свойства на произведението на линейни изображения:

1) ~~я~~ Ассоциативност:  $\Theta(\Psi\Upsilon) = (\Theta\Psi)\Upsilon$  за  
лин. изобр.  $\Upsilon: U \rightarrow V, \Psi: V \rightarrow W, \Theta: W \rightarrow T$ .

Доказ-во:

$$\begin{aligned} \text{За } u \in U &\Rightarrow [\Theta(\Psi\Upsilon)](u) = \cancel{\Theta(\Psi(\Upsilon(u)))} = \Theta(\Psi\Upsilon(u)) = \Theta(\Psi(\Upsilon(u))) = (\Theta\Psi)(\Upsilon(u)) = \\ &= [(\Theta\Psi)\Upsilon](u). \end{aligned}$$

2) Дистрибутивни закони: ~~я~~

$$\Theta(\Upsilon + \Psi) = \Theta\Upsilon + \Theta\Psi \text{ за } \Upsilon, \Psi: U \rightarrow V, \Theta: V \rightarrow W.$$

$$(\Theta + \Psi)\Upsilon = \Theta\Upsilon + \Psi\Upsilon \text{ за } \Upsilon: U \rightarrow V, \Psi, \Theta: V \rightarrow W.$$

3)  $\lambda(\Psi\Upsilon) = (\lambda\Psi)\Upsilon$  за  $\lambda \in F$ . Да се докажеат 2) и 3)

Нека  $\Upsilon: U \rightarrow V$  е линейно изображение с матрица  $B \in M_{m \times n}(F)$  спрямо базиса  $e = (e_1, \dots, e_n)$  на  $U$  ~~и~~ и базиса  $f = (f_1, \dots, f_m)$  на  $V$ , а  $\Psi: V \rightarrow W$  е линейно изображение с матрица  $A \in M_{k \times m}(F)$  спрямо базиса  $f$  на  $V$  и базиса  $g = (g_1, \dots, g_k)$  на  $W$ . Искаме да определим  $AB$  така, че да е матрицата на  $\Psi\Upsilon: U \rightarrow W$  спрямо базиса  $e$  на  $U$  и

базиса  $g$  на  $W$ .

-14-

За  $\forall 1 \leq j \leq n$ ,  $j$ -тият столб на  $AB$  очевидно е и  $g$  се състои от координатите на  $(\Psi\varphi)(e_j) =$   
 $\stackrel{\text{def } \Psi\varphi}{=} \Psi(\varphi(e_j)) \stackrel{\text{def } \varphi}{=} \Psi\left(\sum_{s=1}^m B_{sj} f_s\right) \stackrel{\Psi \text{ л. л. н.}}{=} \sum_{s=1}^m B_{sj} \Psi(f_s) \stackrel{\text{def } A}{=} \sum_{s=1}^m B_{sj} \left(\sum_{t=1}^k A_{ts} g_t\right)$   
 $\stackrel{\text{свойство на матриците}}{=} \sum_{t=1}^k \left(\sum_{s=1}^m B_{sj} A_{ts}\right) g_t = \sum_{t=1}^k \left(\sum_{s=1}^m A_{ts} B_{sj}\right) g_t$   
 $\stackrel{\text{свойство на матриците}}{=} \sum_{t=1}^k \left(\sum_{s=1}^m A_{ts} B_{sj}\right) g_t$

Очевидно  $g$ . С други думи, за  $\forall 1 \leq j \leq n$ ,  $\forall 1 \leq t \leq k$ ,  
 и скане ред по столб

$$(AB)_{tj} = \sum_{s=1}^m A_{ts} B_{sj} = (A_{t1} \ A_{t2} \ \dots \ A_{ts} \ \dots \ A_{tm}) \begin{pmatrix} B_{1j} \\ B_{2j} \\ \vdots \\ B_{mj} \end{pmatrix}$$

Пример:  $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$E_{11}E_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_{2 \times 2}$$

съществуват ненулеви матрици с нулево произведение

$$E_{21}E_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq O_{2 \times 2} = E_{11}E_{21} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  произведението на матрици не е комутативно.

От св-вата на произведението на линейни изображения следват следните св-ва на произведението

на матрици:

1) Асоциативност  $(AB)C = A(BC)$  за  $A \in M_{m \times n}$ ,

$B \in M_{n \times k}$ ,  $C \in M_{k \times l}$ .

2) Дистрибутивни закони:

$(A+B)C = AC + BC$  за  $A, B \in M_{m \times n}$ ,  $C \in M_{n \times k}$  и

$A(B+C) = AB + AC$  за  $A \in M_{m \times n}$ ,  $B, C \in M_{n \times k}$ .

3)  $\lambda(AB) = (\lambda A)B$  за  $\lambda \in F$ ,  $A \in M_{m \times n}$ ,  $B \in M_{n \times k}$ .