

04.11.2014 Алгебра - I - лекция

Линейни системи. Хомогенни системи.

(1)
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = b_k \end{cases} \rightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}_{k \times n}$$

↑ матрица на с-мата (1)

$a_{ij}, b_i \in F$

$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} & b_k \end{array} \right)$ разширена матр. на с-мата (1)

Указваме, че една система е съвместима, ако има решение. ~~Обратно, ако не~~ Несъвместима, ако няма решение

$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in F^n$
ако
 $a_{s1}x_1 + \dots + a_{sn}x_n = b_s \quad (s = 1, \dots, k)$

Определена система - когато има единствено решение.

Неопределена с-ма - _____ повече от едно решение.

" (Кронекер-Капелли)

Th. (Фурье) Линейна с-ма, с матрица A и разширена матр. \bar{A} е съвместима $\Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A})$

З-во: _____

\Rightarrow Системата да има решение

$\Rightarrow \exists (x_1, \dots, x_n) : (x_1, \dots, x_n)$ е решение

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{k1} \end{pmatrix}}_{c_1} x_1 + \underbrace{\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{k2} \end{pmatrix}}_{c_2} x_2 + \dots + \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{kn} \end{pmatrix}}_{c_n} x_n = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}}_b$$

$$r(A) = r(c_1, \dots, c_n)$$

$$b \in l(c_1, \dots, c_n) = l(c_1, \dots, c_n, b)$$

$$\underline{r(c_1, \dots, c_n)}$$

$$r(c_1, \dots, c_n, b) = r(c_1, \dots, c_n)$$

$$\downarrow \quad \quad \downarrow$$

$$r(\bar{A}) = r(A)$$

$$\Leftarrow \text{Где } r(A) = r(\bar{A})$$

$$r(A) = \dim l(c_1, \dots, c_n)$$

$$r(\bar{A}) = \dim l(c_1, \dots, c_n, b)$$

$$\Rightarrow l(c_1, \dots, c_n) = l(c_1, \dots, c_n, b)$$

$$\Rightarrow b \in l(c_1, \dots, c_n)$$

$$\Rightarrow \exists b = \beta_1 c_1 + \dots + \beta_n c_n$$

$$\Rightarrow (\beta_1, \dots, \beta_n) \text{ е решение}$$

$$(2) \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n = 0 \end{cases}$$

(2) е гомогенна система ~~с нулев~~ (способи на свободните чл. е нулев)

Тв. 1 Решенията на ~~н~~ хомогенна система образуват подпр-во на F^n

Д-во: _____

U - множеството от решения на (2)

$$0 = (0, 0, \dots, 0) \in U$$

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \beta = (\beta_1, \dots, \beta_m) \in U$$

$$\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_m)$$

$$\begin{aligned} a_{s1}(\alpha_1 + \beta_1) + a_{s2}(\alpha_2 + \beta_2) + \dots + a_{sn}(\alpha_n + \beta_m) &= \\ &= (a_{s1}\alpha_1 + a_{s2}\alpha_2 + \dots + a_{sn}\alpha_n) + (a_{s1}\beta_1 + a_{s2}\beta_2 + \dots \\ &\dots + a_{sn}\beta_m) = 0 + 0 = 0 \\ \Rightarrow \alpha + \beta &\in U \end{aligned}$$

$$\lambda \alpha = (\lambda \alpha_1, \lambda \alpha_2, \dots, \lambda \alpha_n)$$

$$~~a_{s1}~~ a_{s1} \lambda \alpha_1 + \dots + a_{sn} \lambda \alpha_n = 0$$

$$\Rightarrow \lambda \alpha \in U$$

$\Rightarrow U$ е подпр-во

Тв. 2 Ако α, β са решения на нехомогенна с-ма ⁽¹⁾
 $\alpha - \beta$ е решение на съответната хомогенна система (2)

Д-во: _____

уравнение № 3

$$\begin{aligned} & a_{s1}(\alpha_1 - \beta_1) + \dots + a_{sn}(\alpha_n - \beta_n) = \\ & = \underbrace{(a_{s1}\alpha_1 + \dots + a_{sn}\alpha_n)}_{b_s} - \underbrace{(a_{s1}\beta_1 + \dots + a_{sn}\beta_n)}_{b_s} = \\ & = b_s - b_s = 0 \quad \text{Q.E.D.} \end{aligned}$$

Th. | Улска (1) е нехомогенна системна фиксирано на μ и $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ е едно решение на (1).

Улска всички решения на систем. хомогенна система са μ .

Тогава всички решения на нехомогенната (1) са от вида $\{ \alpha + \delta \mid \delta \in \mu \}$

До-во: _____

β - решение на (1) $\xRightarrow{\text{Тб.2}}$ $\beta - \alpha$ е реш. на μ

$$\Rightarrow \exists \delta \in \mu : \beta - \alpha = \delta \quad ; \quad \beta = \alpha + \delta$$

$$\Rightarrow \beta \in \{ \alpha + \delta \mid \delta \in \mu \}$$

Улска $\gamma \in \{ \alpha + \delta \mid \delta \in \mu \} \quad \gamma = \alpha + \delta'$

$$a_{s1}(\alpha_1 + \delta'_1) + \dots + a_{sn}(\alpha_n + \delta'_n) =$$

$$= \underbrace{(a_{s1}\alpha_1 + \dots + a_{sn}\alpha_n)}_{b_s} + \underbrace{(a_{s1}\delta'_1 + \dots + a_{sn}\delta'_n)}_{0} = b_s$$

реш. на нехомогенната с-ма

реш. на хомогенната с-ма

~~Следствие~~

Сл. ~~Утема~~ Ако α е решение на (1) нехомогенната с-ма и $\beta^{(1)}, \dots, \beta^{(t)}$ са базис на подпространството M рещ. на хомогенната.

Всички решения на нехомогенната са $\alpha + \beta$ ~~$\beta^{(1)}$~~ β .

$\alpha + \rho_1 \beta^{(1)} + \rho_2 \beta^{(2)} + \dots + \rho_t \beta^{(t)}$, където $\rho_1, \dots, \rho_t \in F$
параметри

Фундаментална система от решения на една хомогенна система е базис на подпространството от решения на хомогенната система.

Th. Нека ~~нека~~ хомогенна система (2) $\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n = 0 \end{cases}$ има матрица A .

Размерността на решението α на (2) е $\dim \alpha = \cancel{n} \text{ ~~не~~ } n - \kappa(A)$, n - броят на неизвестните

З-во:

Нека $\kappa = \kappa(A)$

Сл. има κ ЛНЗ уравнения и \neq друго уравнение е тяхна линейна комбинация.

Считаме, че първите κ уравнения са ЛНЗ.

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0$$

$$a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = 0$$

Има r ЛНЗ стълба, т.е. първите r стълба са ЛНЗ

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1,r+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{r,r+1} & \dots & a_{rn} \\ \hline a_{r+1,1} & \dots & a_{r+1,r} & a_{r+1,r+1} & \dots & a_{r+1,n} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mr} & a_{m,r+1} & \dots & a_{mn} \end{array} \right) \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} r \\ \\ \\ \\ \end{array} = A$$

Матрицата A_0 е квадратна $r \times r$ матрица, която има ранг r , т.е. матрицата е неособена. А Редовете и стълбовете на A_0 са ЛНЗ и има последователност от ~~еквивал.~~ ~~еквивал.~~ преобр: по редове, които до r привеждат до единичната матрица

$$A \xrightarrow[\text{преобр. по редове}]{\substack{\text{екв. преобр.} \\ \text{по редове}}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 & a'_{1,r+1} & \dots & a'_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a'_{2,r+1} & \dots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & a'_{r,r+1} & \dots & a'_{rn} \\ \hline a_{r+1,1} & \dots & a_{r+1,r} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ a_{m1} & \dots & a_{mr} & 0 & \dots & 0 \end{array} \right)$$

$(2) \rightsquigarrow$

$$(2)' \begin{cases} x_1 + a'_{1,r+1} + \dots + a'_{1n} x_n = 0 \\ x_2 + a'_{2,r+1} + \dots + a'_{2n} x_n = 0 \\ \vdots \\ x_r + a'_{r,r+1} + \dots + a'_{rn} x_n = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l}
 \begin{matrix} x_1 & x_2 & \dots & x_r & x_{r+1} & x_{r+2}, \dots, x_n \end{matrix} \\
 \begin{pmatrix} -a'_{1,r+1}, -a'_{2,r+1}, \dots, -a'_{r,r+1}, 1, 0, \dots, 0 \end{pmatrix} = \beta^{(1)} \quad | \cdot x_{r+1} \\
 \begin{pmatrix} -a'_{1,r+2}, -a'_{2,r+2}, \dots, -a'_{r,r+2}, 0, 1, 0, \dots, 0 \end{pmatrix} = \beta^{(2)} \quad | \cdot x_{r+2} \\
 \vdots \\
 \begin{pmatrix} -a'_{1n}, -a'_{2n}, \dots, -a'_{rn}, 0, 0, \dots, 0, 1 \end{pmatrix} = \beta^{(n-r)} \quad | \cdot x_n
 \end{array}$$

$\beta^{(1)}, \dots, \beta^{(n-r)}$ са решения ($\in U$) т.е. са ЛНЗ

$$L(\beta^{(1)}, \dots, \beta^{(n-r)}) \subset U$$

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in U$$

$\gamma = \alpha - \alpha_{r+1} \beta^{(1)} - \alpha_{r+2} \beta^{(2)} - \dots - \alpha_n \beta^{(n-r)}$ е решение

$$\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_r, 0, \dots, 0)$$

γ е реш-е на $(2)'$ $\Rightarrow \gamma = (0, 0, \dots, 0)$

$$\gamma = \alpha - \alpha_{r+1} \beta^{(1)} - \dots - \alpha_n \beta^{(n-r)} \Rightarrow \alpha = \alpha_{r+1} \beta^{(1)} + \dots + \alpha_n \beta^{(n-r)}$$

$$\Rightarrow \alpha \in \ell(\beta^{(1)}, \dots, \beta^{(n-r)})$$

$$\Rightarrow M \subset \ell(\beta^{(1)}, \dots, \beta^{(n-r)})$$

$$\Rightarrow M = \ell(\beta^{(1)}, \dots, \beta^{(n-r)})$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \beta^{(1)}, \dots, \beta^{(n-r)} - \text{базис на } M \\ \dim M = n-r(A) \end{array}}$$

Неизвестните x и y НЗ съедба са неизвестните, които могат да се изразят чрез останалите неизвестни (свободните неизвестни) задава ни се $n-r$ различни съ-ти, т.е. формират базис и намираме реш-я чрез тях.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rn}x_n = b_r \end{cases}$$

с матрица A и разшир. матрица \bar{A}
 (сл.) $r(A) \neq r(\bar{A})$ - несовместима

$$\text{сл.) } r(A) = r(\bar{A}) = r$$

2.1) $n=r$ - единствено р-е (определена)

$r < n$ - множеството от решения зависи от $n-r$ параметъра (неопределена)

~~Всяка линейна система задава подпространство~~
 * подпр-во има поне една система.

Th. Всяко подпространство U на F^n може да се представи като решение на линейна система с n - неизвестни.

Ж-во:

I сл. Ако $U = \{0\}$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ \vdots \\ x_n = 0 \end{cases}$$

II сл. $U \neq \{0\}$

v_1, v_2, \dots, v_k - базис на U

$$v_i = (v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{in})$$

примерно - $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = 0$
уравнение
линейно

на n -маща

$$(*) \begin{cases} a_1 v_{11} + a_2 v_{12} + \dots + a_n v_{1n} = 0 \\ a_1 v_{21} + a_2 v_{22} + \dots + a_n v_{2n} = 0 \\ \dots \\ a_1 v_{k1} + a_2 v_{k2} + \dots + a_n v_{kn} = 0 \end{cases}$$

взимаме
вектора v
за е-реш на
лр. урав.

$$B = (v_{ij})_{k \times n}, \quad r(B) = k$$

Решенията W на $(*)$ има $\dim W = n - k$

базис на W са $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \dots, \alpha^{(n-k)}$

$$\alpha^{(j)} = (\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \dots, \alpha_{jn})$$

$$d_{j1} b_{s1} + d_{j2} b_{s2} + \dots + d_{jn} b_{sn} = 0 \quad \begin{matrix} j=1, \dots, n-k \\ s=1, \dots, k \end{matrix} \quad -10-$$

$L^{(j)}$ - пер. на упр. с ~~no~~ N^0 с от (*)

$$d_{n-k,1}x_1 + d_{n-k,2}x_2 + \dots + d_{n-k,n}x_n = 0 \quad (4*)$$

v_1, v_2, \dots, v_k са решения на тази система.

Решението на $(**)$ е $\Gamma \Rightarrow b_1, \dots, b_k \in \Gamma$

$$l(b_1, \dots, b_k) C^T \Rightarrow U C^T$$

$$\dim M = k$$

$$\dim U = k$$
$$\dim T = n - \dim \langle \alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(n-k)} \rangle = n - (n-k) = k$$
$$\dim U = \dim T = k$$

$$\dim U = \dim T = k.$$

$$u \subset T \Rightarrow u = T$$

Заг. 4.8 б) $a_1 = (2, 3, 1, 2, 4)$

$$a_2 = (3, 4, 2, 3, -1)$$

$$a_3 = (6, 2, 1, -2, -4)$$

$$a_y = (1, 8, 3, 9, 11)$$

$$M = \ell(a_1, a_2, a_3, a_4)$$

зад. 4.8] Да се намери x и $u = U(x)$

6) $a_1 = (2, 3, 1, 2, 4)$ $U = U(a_1, a_2, a_3, a_4)$

$a_2 = (3, 4, 2, 3, -1)$

$a_3 = (6, 2, 1, -2, -4)$

$a_4 = (1, 8, 3, 9, 11)$

③ $b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 + b_5 x_5 = 0$ — това е първото уравнение

$2b_1 + 3b_2 + b_3 + 2b_4 + 4b_5 = 0$ — a_1

$3b_1 + 4b_2 + 2b_3 + 3b_4 - b_5 = 0$ — a_2

$-6b_1 + 2b_2 + b_3 - 2b_4 - 4b_5 = 0$ — a_3

$b_1 + 8b_2 + 3b_3 + 9b_4 + 11b_5 = 0$ — a_4

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 3 & -1 \\ 6 & 2 & 1 & -2 & -4 \\ 1 & 8 & 3 & 9 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{+ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & -1 & -9 \\ 4 & -1 & 0 & -4 & -8 \\ -5 & -1 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}} =$$

$$= \begin{pmatrix} 14 & 0 & 1 & -10 & -20 \\ -9 & 0 & 0 & 7 & 7 \\ 4 & -1 & 0 & -4 & -8 \\ -9 & 0 & 0 & 7 & 7 \end{pmatrix} =$$

b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
0	-4	10	-1	1
7	-8	13	9	0

$-9b_2 + 4b_4 + 8b_5 = 0$

$14b_1 + b_3 - 10b_4 + b_5 = 20$

$b_3 + 10 + 20 = 30$

$4b_1 - b_2 + 4b_4 + 8b_5 = 0$

$-b_2 + 4 = 8 \Rightarrow -b_2 = 4$

7

$-4x_2 + 10x_3 - x_4 + x_5 = 0$

$7x_1 - 8x_2 + 13x_3 + 9x_4 = 0$