

Базис, размерност и координати

V - лн. пр-во над F

Опр: Казваме, че V е крайномерно (крайномерно), ако $\exists n \in \mathbb{N}$ и $\exists a_1, \dots, a_n \in V$:
 $V = \ell(a_1, \dots, a_n)$.

$$\ell(a_1, \dots, a_n) = \{ \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n \mid \lambda_i \in F \}$$

\nwarrow \forall лн. ком. на (a_1, \dots, a_n) , λ - произволн. к-ст.

Опр: V е безкрайномерно, ако $\forall n \in \mathbb{N}$,
 $\forall a_1, \dots, a_n \in V$
 $V \neq \ell(a_1, \dots, a_n)$

F^n

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$$

$$e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$$

$$e_3 = (0, 0, 1, \dots, 0)$$

$$e_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$$

$$(x_1, \dots, x_n) = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \in \ell(e_1, \dots, e_n)$$

\rightarrow Пр: $\mathbb{R}[x]$

ако допуснем, че е крайномерно

$$\Rightarrow \exists f_1, \dots, f_n = \ell(f_1, \dots, f_n) = \mathbb{R}[x]$$

Нека \max степен на тези полиноми е T .

-6-

Няма да могат да се получат полиноми от
степен $> T \Rightarrow \mathbb{R}[x]$ е безкрайномерно

Опр: (Базис) Нека V е крайномерно пр-во.
Системата $B = b_1, \dots, b_n$ е базис на V ,
ако:

1) B е ЛНЗ

2) $\ell(B) = V$

Такива ~~та~~ ЛНЗ вектори, които порангват
цялото пространство.

Т | ~~Няма~~ ~~вся~~ Всяко крайномерно ~~пр-во~~ ~~пространство~~
пространство $V \neq \{0\}$ има базис.

! Забел: Има ~~единствено~~ крайно-
мерно пр-во, което няма базис
~~и то ва~~ е $\{0\}$

Базиса ще изберем като подмн. на ~~а-така~~ ~~ата~~

0-во:

$$V = \ell(a_1, \dots, a_n) \neq \{0\}$$

$$\Rightarrow \exists a_i \neq 0: b_1 = a_i$$

$b_1 \in \text{ЛНЗ}$

- ако $a_1, \dots, a_n \in \ell(b_1) = V \Rightarrow b_1$ е базис

- ако $\exists a_j \notin \ell(b_1), b_2 = a_j$

$\Rightarrow b_1, b_2$ са ЛНЗ

- 7 -

I сп. ако $a_1, \dots, a_n \in \ell(v_1, v_2) = V$
 $\Rightarrow v_1, v_2$ е базис

II сп. $\exists a_k \notin \ell(v_1, v_2)$

$$v_3 = a_k$$

На всяко стъпка, новото v е различно от предишните. ~~Всички стъпки са~~ Процедура-та е крайна и накрая получаваме v_1, \dots, v_s е базис. Стъпките са най-много n .

I. Нека V е крайномерно над F и $B = v_1, \dots, v_n$ е базис и $C = c_1, \dots, c_s$ е базис \Rightarrow
 $\Rightarrow \underline{n = s}$.

Д-во:

$$c_1, \dots, c_s \in V \Rightarrow c_1, \dots, c_s \in \ell(v_1, \dots, v_n)$$

Ако допуснем, че $s > n$.

От ~~основната~~ лема ОЛЛА $\Rightarrow c_1, \dots, c_s$ са ЛЗ,

но c_1, \dots, c_s е базис \Rightarrow ЛНЗ

\Rightarrow противоречие $\Rightarrow s \leq n$

аналогично: $v_1, \dots, v_n \in \ell(c_1, \dots, c_s) \Rightarrow n \leq s$

$$\Rightarrow \underline{s = n}$$

Опр: Размерност на линейно пространство
е равна на броят на векторите в който
да е базис на пр-ото
 $\dim_F V = \underline{\underline{n}} = \underline{\underline{(\dim V)}}$ когато F се подразбира

Пр: Векторите в равнината $\dim = 2$

Векторите в пространството, в което
нимаем $\dim = 3$

$$\dim \{0\} = 0$$

$\dim F^n = n$ - вектори с n ~~и~~ ~~изменения~~
- стандартен базис на F^n

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q} = 1$$

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R} = 1$$

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \infty$$

Трансцендентни числа - π , e

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$$

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$$

~~$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$~~ $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = \infty$

~~$M_{n \times k}(\mathbb{R})$~~

$$\mathcal{M}_{n \times k}(\mathbb{R})$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix} = \cancel{a_{11} E_{11}} a_{11} E_{11} + a_{12} E_{12} + \dots + a_{1k} E_{1k} + \dots + a_{nk} E_{nk}$$

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

$$\{ E_{ij} \mid \substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, k} \} = \mathcal{B}$$

$$\mathcal{M}_{n \times k}(\mathbb{R}) = \mathcal{L}(\mathcal{B})$$

$$\sum_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, k}} \lambda_{ij} E_{ij} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \dots & \lambda_{nk} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \mathcal{B} \in \mathcal{A} \# \mathcal{Z}$$

$$\Rightarrow \lambda_{ij} = 0$$

$$\Rightarrow \mathcal{B} \text{ e base e } \dim \mathcal{M}_{n \times k}(\mathbb{R}) = n \cdot k$$

Т.1

V е линейно пространство

$\dim V = n \Rightarrow \exists n \text{ ЛНЗ вектори и}$
 $\forall n+1 \text{ вектори са ЛЗ}$

До-во:

$\xrightarrow{\text{до-во}} \dim V = n \Rightarrow \exists v_1, \dots, v_n$

$\Rightarrow v_1, \dots, v_n \text{ ЛНЗ}$

a_1, a_2, \dots, a_{n+1} произв от V

$a_1, \dots, a_{n+1} \in \ell(v_1, \dots, v_n)$

$\Rightarrow a_1, \dots, a_{n+1}$ от ОЛЛН е ЛЗ

←

$\exists n \text{ ЛНЗ вектори}$

a_1, \dots, a_n са ЛНЗ

$x \in V \quad a_1, \dots, a_n, x \text{ са ЛЗ}$

$\Rightarrow x \in \ell(a_1, \dots, a_n)$

$\Rightarrow V = \ell(a_1, \dots, a_n)$

$\Rightarrow a_1, \dots, a_n$ - базис

$\dim V = n$

(свойство)

Тв.1 Ако V е крайномерно пространство

1) ако a_1, \dots, a_s са ЛНЗ, то те могат да се допълнят до базис на V

2) ~~$U \subseteq V$~~ $U \subsetneq V$ подпр.-во

$$\Rightarrow \dim U < \dim V$$

Тв. V е мин. пр.-во над F

e_1, \dots, e_n е базис на V

\Leftrightarrow всеки вектор на V по единствен начин може да се представи като мин. комб. на e_1, \dots, e_n

\Rightarrow -во:

\Rightarrow

e_1, \dots, e_n базис

$$x \in V = \ell(e_1, \dots, e_n)$$

$$\Rightarrow x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$$

Допускаме, че $x = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_n e_n$

$$0 = (\alpha_1 - \beta_1) e_1 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) e_n$$

$$e_1, \dots, e_n \text{ ЛНЗ} \Rightarrow \alpha_1 - \beta_1 = \dots = \alpha_n - \beta_n = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \dots, \alpha_n = \beta_n$$

\Leftarrow $a \in V \Rightarrow a \in \ell(e_1, \dots, e_n)$

$$\Rightarrow V = \ell(e_1, \dots, e_n)$$

$$\sigma \in V \quad \sigma = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$$

$$\sigma = 0 e_1 + \dots + 0 e_n$$

(единственост на представяне на σ) $\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0 \Rightarrow e_1, \dots, e_n \text{ ЛНЗ}$

e_1, \dots, e_n базис

$\forall a, \exists$ единствен набор ~~d_1, \dots, d_n~~ d_1, \dots, d_n

$$a = d_1 e_1 + \dots + d_n e_n$$

(d_1, \dots, d_n) - координати на a спрямо базиса e_1, \dots, e_n

Забел.: Ако сменим базиса координатите се променят.

$$a = \cancel{\alpha_1} d_1 e_1 + \dots + d_n e_n \quad \text{коорд.} = (\cancel{\alpha_1} d_1, \dots, d_n)$$

$$b = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_n e_n \quad \text{коорд.} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$$

$$\cancel{a+b} = (d_1 + \beta_1) e_1 + \dots + (d_n + \beta_n) e_n$$

$$\Rightarrow \text{коорд.} = (d_1 + \beta_1, \dots, d_n + \beta_n)$$

$$\lambda a = \lambda d_1 e_1 + \dots + \lambda d_n e_n \quad \text{коорд.} = (\lambda d_1, \dots, \lambda d_n)$$

Пример за координати:

\mathbb{R}^2

$$e_1 = (1, 0); \quad e_2 = (0, 1)$$

$$a = (3, 5) = 3 \cdot e_1 + 5 \cdot e_2$$

$$\left. \begin{array}{l} b_1 = (1, 1) \\ b_2 = (1, -1) \end{array} \right\} \text{ЛНЗ}$$

↓
друг базис на \mathbb{R}^2

~~$a = d_1$~~

$$a = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2$$

$$(3, 5) = \alpha_1 (1, 1) + \alpha_2 (1, -1)$$

$$3 = \alpha_1 + \alpha_2$$

$$5 = \alpha_1 - \alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 = 4$$

$$\alpha_2 = -1$$

$$a = 4b_1 - 1b_2$$

Изоморфизъм на линейни пространства

Опр: Нека V_1 и V_2 са лн. пр-ва над F .

Казваме, че V_1 изоморфно на V_2 ($V_1 \cong V_2$)

~~Когато съществува~~

Когато $\exists \varphi: V_1 \rightarrow V_2$ със св-вота:

1) φ - биективен

$$2) \varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha \varphi(a) + \beta \varphi(b),$$

$$\forall \alpha, \beta \in F$$

$$\forall a, b \in V_1$$

V_1 и V_2 не са различни то когато
 || са алгебрични св-ва

|| алгебрични св-ва са еднакви
 за V_1 и V_2

Тв. Ако V е лн. пр-во над F $\dim V = n$, то

$$\boxed{V \cong F^n}$$

З-лем:

Линейное отображение $\varphi: V \rightarrow F^n$ на V

$$\varphi: V \rightarrow F^n$$

$$a \in V, a = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$$

$$\varphi(a) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

$$b \in V, \varphi(b) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$$

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda a + \mu b) &= \varphi(\lambda(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n) + \mu(\beta_1 e_1 + \dots + \beta_n e_n)) = \\ &= \varphi((\lambda\alpha_1 + \mu\beta_1)e_1 + \dots + (\lambda\alpha_n + \mu\beta_n)e_n) = \\ &= (\lambda\alpha_1 + \mu\beta_1, \dots, \lambda\alpha_n + \mu\beta_n) = \\ &= \lambda(\alpha_1, \dots, \alpha_n) + \mu(\beta_1, \dots, \beta_n) = \\ &= \lambda\varphi(a) + \mu\varphi(b) \end{aligned}$$