

Симметрични оператори и симметрична матрица

Д Оператор със симметрична матрица - симметричен

Нека $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Казваме, че A е симметрична,
когато $A = A^t \Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Св. ва: 1) A - симметрична $\Rightarrow A$ също е симметрична

2) A, B - сим. $\Rightarrow A + B$ също е сим.

$\Rightarrow \nexists$ сим. матр. образуват ЛП-базис в $M_{n \times n}(\mathbb{R})$

3) C - произв. матр.

$$A = C \cdot C^t$$

$$\Rightarrow A^t = (C C^t)^t = (C^t)^t \cdot C^t = C \cdot C^t = A$$

$\Rightarrow A$ е симметрична.

Д Сим. оператор.

E - Евклидово п-во

Мн. от $\varphi: E \rightarrow E$ е симметричен, ако:

$$(\varphi(x), y) = (x, \varphi(y))$$

Св. ва: 1) φ и ψ - симметрични

$\varphi + \psi$ също е симметричен

Доказ-во

$$((\varphi + \psi)(x), y) = (\varphi(x) + \psi(x), y) =$$

$$= (\varphi(x), y) + (\psi(x), y) =$$

$$= (x, \varphi(y)) + (x, \psi(y)) =$$

$$= (x, \varphi(y) + \psi(y)) = (x, (\varphi + \psi)(y))$$

2) φ е симетричен $\Rightarrow \lambda \varphi$ също е симетричен
 $\lambda - \text{const} \in \mathbb{R}$

3)

ТВ] g_1, \dots, g_n - собствени вектори за φ -линейн оп. с
 \neq собствени стойности, то те са ортогонални.

$$\varphi(g_i) = \lambda_i g_i \quad \lambda_i \neq \lambda_j$$

$$\varphi(g_j) = \lambda_j g_j$$

$$(\varphi(g_i), g_j) = (\lambda_i g_i, g_j) = \lambda_i (g_i, g_j)$$

$$(\varphi(g_i), g_j) = (g_i, \varphi(g_j)) = \lambda_j (g_i, g_j) \quad \lambda_i \neq \lambda_j \Rightarrow (g_i, g_j) = 0$$

Т] φ -линейн оператор в Евклидово n -во E .
 φ е симетричен $\Leftrightarrow \exists$ произволен ортонормиран
 базис φ има симетрична матрица.

Док-во:

\Rightarrow φ -симетричен

e_1, \dots, e_n - ортонормиран базис и

$A = (a_{ij})$ - матрица на φ

$$\varphi(e_i) = a_{i1} e_1 + \dots + a_{in} e_n$$

$$(\varphi(e_i), e_j) = (a_{i1} e_1 + \dots + a_{in} e_n, e_j) =$$

$$= a_{i1} (e_1, e_j) + \dots + a_{in} (e_n, e_j) = a_{ji} (e_j, e_j)$$

$$(\varphi(e_i), e_j) = a_{ji}$$

$$(\varphi(e_j), e_i) = a_{ij}$$

φ -симетричен \Rightarrow

$$a_{ji} = (\varphi(e_i), e_j) = (e_i, \varphi(e_j)) = (\varphi(e_j), e_i) = a_{ij} \Rightarrow$$

$\Rightarrow a_{ij} = a_{ji} \Rightarrow A$ е симетрична

4) Нека φ е линейен оператор

e_1, \dots, e_n - ортонормиран базис

$A = A^t$ и A - матрица на φ в базиса

$$A = (a_{ij})$$

$$\varphi(e_i) = a_{i1}e_1 + \dots + a_{in}e_n$$

$$(\varphi(e_i), e_j) = a_{ji} = a_{ij} = (\varphi(e_j), e_i)$$

\Rightarrow за базисните: $(\varphi(e_i), e_j) = (\varphi(e_j), e_i)$ е вярно

x - произволен вектор

$$x = x_1e_1 + \dots + x_n e_n$$

$$(\varphi(x), e_j) = (x_1\varphi(e_1) + \dots + x_n\varphi(e_n), e_j) =$$

$$= \sum x_i (\varphi(e_i), e_j) + \dots + x_n (\varphi(e_n), e_j) =$$

$$= x_1 (e_1, \varphi(e_j)) + \dots + x_n (e_n, \varphi(e_j)) =$$

$$= ((x_1e_1 + \dots + x_n e_n), \varphi(e_j)) = (x, \varphi(e_j)).$$

$$x = x_1e_1 + \dots + x_n e_n$$

$$y = y_1e_1 + \dots + y_n e_n$$

$$(\varphi(x), y) = (\varphi(x), y_1e_1 + \dots + y_n e_n) =$$

$$= y_1(\varphi(x), e_1) + \dots + y_n(\varphi(x), e_n) =$$

$$= y_1(x, \varphi(e_1)) + \dots + y_n(x, \varphi(e_n)) =$$

$$= (x, y_1(\varphi(e_1)) + \dots + y_n(\varphi(e_n))) =$$

$$= (x, \varphi(y)) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \varphi$ - симетричен

E - Евклидово пространство «

$\varphi: E \rightarrow E$ линеен

$$(\varphi(a), b) = (a, \varphi(b))$$

φ - симетричен

Th. || φ - линеен оператор в крайноммерно E

φ - симетричен \Leftrightarrow матр. на φ в ортонормиран

\Rightarrow базис е симетрична

Th. || Нека $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ и A е симетрична ($A = A^t$)

Тогава параметричните корени на A са
реални числа

$$\det(A - \lambda E) = f_A(\lambda)$$

Нека λ_1 корен на $f_A(\lambda)$

$$f_A(\lambda_1) = \det(A - \lambda_1 E) = 0$$

$$\lambda_1 \in \mathbb{C}$$

$$A = (a_{ij})$$

$$(a_{11} - \lambda_1)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda_1)x_n = 0$$

$\exists (\bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_m) \neq 0, \beta_i \in \mathbb{C}$
решение

$$(A - \lambda E) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \beta \cdot \bar{\beta} &= |\beta|^2 \geq 0 \\ \overline{\beta + \gamma} &= \bar{\beta} + \bar{\gamma} \\ \overline{\beta \cdot \gamma} &= \bar{\beta} \cdot \bar{\gamma} \\ \overline{\bar{\beta}} &= \beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (AB)^t &= B^t A^t \\ \overline{AB} &= \bar{A} \cdot \bar{B} \end{aligned}$$

$$(*) (\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, \dots, \bar{\beta}_m) A \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} = \lambda_1 (\bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_m) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda_1 (|\beta_1|^2 + \dots + |\beta_m|^2) \in \mathbb{R} > 0 - \text{реально число} > 0$$

транспонирование

$$(\beta_1, \dots, \beta_m) A^t \begin{pmatrix} \bar{\beta}_1 \\ \vdots \\ \bar{\beta}_m \end{pmatrix} = \lambda_1 \sum_{i=1}^m |\beta_i|^2$$

$$A = A^t$$

$$(**) (\bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_m) \bar{A} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} = \bar{\lambda}_1 \sum_{i=1}^m |\beta_i|^2 \Rightarrow \bar{\lambda}_1 \sum_{i=1}^m |\beta_i|^2 = \lambda_1 \sum_{i=1}^m |\beta_i|^2 \Rightarrow \bar{\lambda}_1 = \lambda_1$$

$$A = \bar{A}$$

Th. II (Теорема за канонизиране на симетричен оператор.)

Нека φ е симетричен в крайномерно Евклидово пространство E .

Тогаво съществува ортонормиран базис от собствени вектори на φ .

В този базис матр. на φ е диагонална.

Док-во: (Индукция по размерността)

$n = \dim E$:

• $n = 1$, $|e| = 1$, $\varphi(e) \in E = \ell(e)$

$$\varphi(e) = \lambda e \Rightarrow e$$

Ортонормираният базис има един вектор и той е e .

• $n = k$, Нека твърдението е вярно за пространство с $\dim < n$.

$$\dim E = n$$

Нека b_1, \dots, b_n произволен ортонормиран базис на E .

\Rightarrow матрицата на φ е A и $A = A^t$

Нека λ_1 - характеристичен корен на A

$$\lambda_i \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists g_i \text{ собств.}$$

$$\varphi(g_i) = \lambda_i g_i$$

$$e_i = \frac{1}{|g_i|} g_i ; \varphi(e_i) = \lambda_i e_i$$

$$U = \mathcal{L}(e_i), \quad W = U^\perp$$

$$E = U \oplus W$$

$$W = \{a \in E \mid (a, x) = 0, \forall x \in U\}$$

Докажем, что W е φ -инвариантно.

$a \in W$, ние докажем, че $\varphi(a) \in W$

$$(\varphi(a), x) = (a, \varphi(x)) = (a, \lambda_i x) = \lambda_i = \lambda_i (a, x)$$

$$\Rightarrow \varphi(a) \in U^\perp = W$$

$\Rightarrow W$ е φ -инвариантно

$$\dim W = n-1$$

$$\varphi|_W : W \rightarrow W$$

$\varphi|_W$ е симетр.

От индукционното предположение:

$\Rightarrow \exists$ ~~ортогонален~~ ортонормиран базис на W

$$e_2, \dots, e_n \quad \varphi(e_i) = \lambda_i e_i$$

от собствени вектори

$\Rightarrow e_1, e_2, \dots, e_n$ - ортонормиран базис от собствени вектори

В общия случай произволен оператор не е изяснено, че ϕW е φ -инвариантно. Има оператори, които нямат базиси от собствени вектори, но тези оператори не са симетрични

Следствие: Ако A е симетрична матрица с реални елементи, \exists ортогонална матр. T :
 $T^{-1}AT = T^t A T = D$, където D е ^{диагонална} ~~ортогонална~~.

З-во: A - симетрична
 $E = \mathbb{R}^n$ като Евклидово пространство стандарт-
 ния ортонормиран базис e_1, \dots, e_n .

$\exists \varphi: E \rightarrow E$, който има матр. A в този базис $\Rightarrow \varphi$ е симетричен.

\exists ортонормиран базис от собствени вектори за φ

$$\varphi(g_i) = \lambda_i g_i \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$D = T^{-1}AT$$

T - матрица на преход e_1, \dots, e_n към g_1, \dots, g_n .

$$\Rightarrow T = T^{-1} \quad (T - \text{ортогонална})$$

$$D = T^{-1}AT = T^t AT$$

Пример: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ да се намери орт. матр. T и диагонална \mathcal{Q}

$$\mathcal{Q} = T^t A T$$

E , $\dim E = 3$

e_1, e_2, e_3 - ортонормирана базис

$\varphi: E \rightarrow E$ оператор, който има матр.

A в e_1, e_2, e_3

$$f_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1+\lambda & -1-\lambda & 0 \\ 1+\lambda & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1+\lambda)^2 \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (1+\lambda)^2 \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$f_A(\lambda) = (2-\lambda)(1+\lambda)^2 = 0$$

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = -1$$

Иск. $\lambda = 2$

Решаване хомогенна система $A - 2E$

$$B = A - 2E = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

с. с. с.
свободна базис
неизв.

$$x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = 1, x_3 = 1$$

$$b_1 = (1, 1, 1)$$

$$\varphi(b_1) = 2 - b_1$$

Всички собствени вектори за собств. ст-а
 $\lambda = 2$ са $\alpha \cdot b_1$, $\alpha \neq 0$

II ст. $\lambda = -1$

Решаваме системата

$$B_1 = A - (-1)E = A + E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

с. с. с.

Ранг на матр. B_1 е 1 \Rightarrow размерността
на решението е 2.

$$x_2 = 1, x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -1$$

$$x_2 = 0, x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = -1$$

$$c_1 = (-1, 1, 0) \text{ и } c_2 = (-1, 0, 1)$$

$$\varphi(c_1) = -c_1, \varphi(c_2) = -c_2$$

Всички собствени вектори за собств. съ-т $\lambda = -1$ са от вида $\alpha c_1 + \beta c_2$, но $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$

b_1 е ортогонален на $l(c_1, c_2)$ - собств. вектори с различни собств. съ-ти.
 $b_1 \perp l(c_1, c_2)$

По метода на Грам-Шмидт търсим орт. базис на $l(c_1, c_2)$.

$$d_1 = c_1 = (-1, 1, 0)$$

$$d_2 = c_2 + \gamma d_1 \quad | \cdot d_1$$

$$(d_2, d_1) = 0 = (c_2, d_1) + \gamma (d_1, d_1)$$

$$\gamma = \frac{-(c_2, d_1)}{(d_1, d_1)} = \frac{-1}{2}$$

$$d_2 = (-1, 0, 1) - \frac{1}{2}(-1, 1, 0) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) \sim$$

$$\sim d'_2 = (-1, -1, 2)$$

$$d_2 \perp d_1$$

d_1, d'_2 собств. в-ри $\lambda = -1$
 b_1 $\lambda = 2$

$$e_1 = \frac{1}{|b_1|} \cdot b_1 = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} (1, 1, 1)$$

$$e_2 = \frac{1}{|d_1|} d_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (-1, 1, 0)$$

$$e_3 = \frac{1}{|d_2'|} \cdot d_2' = \frac{1}{\sqrt{6}} (-1, -1, 2)$$

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$$T^t = T^{-1} \quad Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$Q = T^t A T$$