

Тв. ~~Линейната~~  
на  $V$

мин. комбинация на вектори  
 $l(a_1, \dots, a_s)$  е подпр-во - 10-

$$x = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_s a_s$$

$$y = \mu_1 a_1 + \dots + \mu_s a_s$$

$$x + y = (\lambda_1 + \mu_1) a_1 + \dots + (\lambda_s + \mu_s) a_s \in l$$

$$\alpha x = \alpha \lambda_1 a_1 + \dots + \alpha \lambda_s a_s \in l$$

$$\text{Забел.: } l(0) = \{0\}$$

Линейна зависимост и независимост. Основна  
лема на линейната алгебра.

$V$  - мин. пр-во над  $F$

Опр: Системата  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_s\}$  е линейно  
зависима, ако  $\exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s \neq 0, 0, \dots, 0$   
(по-малко едно  $\lambda \neq 0$ )

такава, че  $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_s a_s = 0$ , тогава

векторите се наричат линейно зависими  
(ЛЗ).

Опр: Системата  $A = \{a_1, \dots, a_s\}$  е линейно  
независима, ако  $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_s \neq 0, 0, \dots, 0$  е  
изпълнено, че  $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_s a_s \neq 0$  (ЛНЗ)

Пример:

0 Система с вектор само от  $\mathcal{O}$

$$1. \mathcal{O} = \mathcal{O}$$

$\mathcal{O}$  сам по себе си е ЛЗ

$$\textcircled{2} \quad a = (1, 2)$$

$$b = (-5, -10)$$

$$\text{Ед } 5a + b = \mathcal{O} \\ \Rightarrow a, b \text{ са ЛЗ}$$

$$\textcircled{3} \quad a = (1, 2)$$

$$b = (3, 7)$$

$$\alpha a + \beta b = \mathcal{O}$$

$$(\alpha, 2\alpha) + (3\beta + 7\beta) = (0, 0)$$

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta = 0 & | \cdot 2 \\ 2\alpha + 7\beta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\alpha + 6\beta = 0 \\ 2\alpha + 7\beta = 0 \end{cases} \rightarrow -$$

$$\alpha + \beta = 0$$

$$\rightarrow \alpha = 0$$

$$\alpha a + \beta b = \mathcal{O} \Leftrightarrow (\alpha, \beta) = (0, 0) \Rightarrow \underline{\underline{\text{ЛЗ}}}$$

Свойство:

I)  $0 \in \Lambda^3$

II)  $\{a\} \in \Lambda^3 \Leftrightarrow a = 0$

III)  $a_1, \dots, a_s \in \Lambda^3$ , разширяване до  $a_1, \dots, a_s, a_{s+1}, \dots, a_n$   
 $\Rightarrow$  разширената с-ма е  ~~$\Lambda^3$~~   $\Lambda^3$

Доказ:

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_s \neq 0, 0, \dots, 0$$

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_s a_s = 0$$

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_s a_s + 0 a_{s+1} + \dots + 0 a_n = 0 \in (\Lambda^3)$$

$$\lambda_1, \dots, \lambda_s, 0, 0, 0, \dots, 0 \neq 0, 0, 0, \dots, 0,$$

защото в началото сме  
~~дефиниция~~  $\lambda_1, \dots, \lambda_s \neq 0, 0, \dots, 0$

III') Ако една система е  $\Lambda^3$ , то нейна подсистема също е  $\Lambda^3$ .

IV) Два вектора  $a, b$  са  $\Lambda^3$

$$\exists \alpha, \beta \neq 0, 0 : \alpha a + \beta b = 0$$

$$\alpha \neq 0 \rightarrow \alpha a + \beta b = 0 \mid : \alpha$$

$$a + \frac{\beta}{\alpha} b = 0$$

$$a = -\frac{\beta}{\alpha} b$$

т.е. двата вектора  $a, b$  са

линейно зависими ~~и~~  $\Leftrightarrow$  единият е равен на скаларно умножение на другия  
 $\alpha \rightarrow$  векторите са пропорционални

$$a = \mu b$$

~~$$a = \mu b$$~~

$$\Rightarrow 1a - \mu b = 0$$

- 13 -

Ⓢ) ~~Ⓢ~~ Векторите  $a_1, \dots, a_s$  са ЛЗ и  $(s \geq 2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$  един от векторите е лн. комбинация на останалите.

До-во:

$a_1, \dots, a_s$  са ЛЗ  $\Rightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_s \neq 0, \dots, 0$

така, че  $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_s a_s = 0 \mid : \lambda_i \quad \lambda_i \neq 0$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_i} a_1 + \dots + 1 a_i + \dots + \frac{\lambda_s}{\lambda_i} a_s = 0$$

$$a_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i} a_1 - \dots - \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} a_{i+1} - \dots - \frac{\lambda_s}{\lambda_i} a_s$$

$$a_k = \beta_1 a_1 + \dots + \beta_{k-1} a_{k-1} + \beta_{k+1} a_{k+1} + \dots + \beta_s a_s$$

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{k-1}, \overset{?}{0}, \beta_{k+1}, \dots, \beta_s \neq 0, \dots, 0$$

Ⓢб. Нека  $a_1, \dots, a_s$  са ЛНЗ и присъединяваме още един вектор  $b$   
 тогава векторите  $a_1, \dots, a_s, b$  са ЛНЗ  $\Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow b \notin \ell(a_1, \dots, a_s)$

З-во:

Нека  $b \notin \ell(a_1, \dots, a_s)$ .

Допускаме, че  $a_1, \dots, a_s, b$  са ЛЗ

$$\Rightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_s, \mu \neq 0, 0, \dots, 0$$

(и не ето разн. от 0)

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_s a_s + \mu b = 0$$

~~ако~~ ако  $\mu \neq 0$

$$b = -\frac{\lambda_1}{\mu} a_1 - \frac{\lambda_2}{\mu} a_2 - \dots - \frac{\lambda_s}{\mu} a_s$$

$$\Rightarrow b \in \ell(a_1, \dots, a_s) \quad (\text{⚡})$$

$$\Rightarrow \mu = 0 \Rightarrow \exists i : \lambda_i \neq 0$$

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_i a_i + \dots + \lambda_s a_s + 0b = 0$$

$\nexists b \neq 0$

$$\Rightarrow a_1, a_2, \dots, a_s \text{ са ЛЗ} \quad (\text{⚡})$$

$$\Rightarrow a_1, \dots, a_s, b \text{ са ЛНЗ}$$

$$b \in \ell(a_1, \dots, a_s) \Rightarrow b = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_s a_s \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_s a_s - 1 \cdot b = 0$$

$$(a_1, \dots, a_s, b) \text{ ЛЗ}$$

заг:

-15-

$$a = (1, 2, 3)$$

$$b = (1, 1, 1)$$

$$c = (5, 7, \alpha)$$

$d = ?$  при което векторите са ЛНЗ

$$\beta_1 a + \beta_2 b + \beta_3 c = 0$$

$$\beta_1 (1, 2, 3) + \beta_2 (1, 1, 1) + \beta_3 (5, 7, 2) = (0, 0, 0)$$

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 + 5\beta_3 = 0 \\ 2\beta_1 + \beta_2 + 7\beta_3 = 0 \\ 3\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = ? \quad \text{ЛР}$$

Основни (еквивалентни) преобразувания на системи линейни уравнения:

- 1) размястване местата на уравненията
- 2) умножаване двете страни на едно уравнение по число разн. от 0
- 3) към едно уравнение прибавяне на друго уравнение умножено по число  $\neq 0$

$V$ -лин. пр-во над полето  $F$

Опр: Системата  $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_s\}$  е линейно независима, ако:

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_s \neq 0, 0, \dots, 0 \quad (\lambda_i \in F)$$

е изпълнено:

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_s a_s \neq 0$$

Основна лема на линейната алгебра (ОЛЛА):

Ако  $A = \{a_1, \dots, a_s\}$  и  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  са системи вектори от лин. пр-во  $V$  и ако всеки вектор от  $B$  е лин. комб. на векторите  $A$  и  $\boxed{n > s}$  тогава  $B \in \underline{ЛЗ}$ .

До-во: Индукция по  $s$

① база:  $s = 1$

$$n > 1 \Rightarrow A = \{a_1\}$$

$$b_1 = \lambda_1 a_1$$

$$b_2 = \lambda_2 a_1 \leftarrow \text{за } a_1$$

$$\lambda_2 b_1 - \lambda_1 b_2 = \lambda_2 \lambda_1 a_1 - \lambda_1 \lambda_2 a_1 = 0$$

$$\text{ако } \exists i: \lambda_i \neq 0 \Rightarrow \lambda_1 \lambda_2 \neq 0, 0 \Rightarrow b_1, b_2 \in \underline{ЛЗ} \Rightarrow B \in \underline{ЛЗ}$$

$$\text{ако } \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

~~Допълнение~~  $b_1 = 0, b_2 = 0 \Rightarrow B \in \underline{ЛЗ}$

② Допускаме, че е вярно за  $s$

$$A = \{a_1, a_2, \dots\}$$

③ Ще докажем, че е вярно за  $s+1$

$$n > s+1$$

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_s, a_{s+1}\} \quad B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$$

$$b_1 = \alpha_{1,1} a_1 + \dots + \alpha_{1,s} a_s + \alpha_{1,s+1} a_{s+1}$$

$$b_2 = \alpha_{2,1} a_1 + \dots + \alpha_{2,s} a_s + \alpha_{2,s+1} a_{s+1}$$

$$\vdots$$

$$b_n = \alpha_{n,1} a_1 + \dots + \alpha_{n,s} a_s + \alpha_{n,s+1} a_{s+1}$$

Ще използваме метод на Гаус (последователно изключване)

$$\text{I ст. ако } \alpha_{1,s+1} = \alpha_{2,s+1} = \dots = \alpha_{n,s+1} = 0$$

$b_1, \dots, b_n$  са лн. комб. на  $a_1, \dots, a_s$

$$n > s+1 > s \Rightarrow b_1, \dots, b_n \text{ са ЛЗ}$$

$$\text{II ст. } \exists t: \alpha_{t,s+1} \neq 0$$

претонариране на така, че  $t = n$

$$\begin{aligned} \cancel{b_n} &= \cancel{\alpha_{n,1} a_1} + \dots + \alpha_{n,s} a_s + \alpha_{n,s+1} a_{s+1} \\ b_1 &= \alpha_{1,1} a_1 + \dots + \alpha_{1,s} a_s + \alpha_{1,s+1} a_{s+1} \\ b_2 &= \alpha_{2,1} a_1 + \dots + \alpha_{2,s} a_s + \alpha_{2,s+1} a_{s+1} \\ &\vdots \\ b_n &= \alpha_{n,1} a_1 + \dots + \alpha_{n,s} a_s + \alpha_{n,s+1} a_{s+1} \end{aligned} \quad \left( \begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array} \right) \begin{array}{l} \alpha_{1,s+1} \\ \alpha_{2,s+1} \\ \vdots \\ \alpha_{n,s+1} \end{array}$$

- 3 -

$$c_1 = b_1 - \frac{d_{1,s+1}}{d_{n,s+1}} b_n = \left( d_{11} - \frac{d_{n1}}{d_{n,s+1}} \cdot d_{1,s+1} \right) a_1 + \dots +$$

$$+ \dots + \left( d_{1s} - \frac{d_{1,s+1}}{d_{n,s+1}} \right) a_s + \beta_{1s} a_s + 0 a_{s+1}$$

$$\cancel{b_1} \left( b_1 - \frac{d_{1,s+1}}{d_{n,s+1}} b_n \right) = c_1 = \beta_{11} a_1 + \dots + \beta_{1s} a_s$$

$$b_1 = d_{11} a_1 + \dots + d_{1s} a_s + d_{1,s+1} a_{s+1}$$

$$b_2 = d_{21} a_1 + \dots + d_{2s} a_s + d_{2,s+1} a_{s+1} \quad \leftarrow$$

$$b_n = d_{n1} a_1 + \dots + d_{ns} a_s + d_{n,s+1} a_{s+1} \quad \left| \cdot \frac{d_{2,s+1}}{d_{n,s+1}} \right.$$

$$c_2 = \left( b_2 - \frac{d_{2,s+1}}{d_{n,s+1}} b_n \right) = \beta_{21} a_1 + \dots + \beta_{2s} a_s + 0 a_{s+1}$$

$$\left( b_2 - \frac{d_{2,s+1}}{d_{n,s+1}} b_n \right) = c_2 = \beta_{21} a_1 + \dots + \beta_{2s} a_s$$

$$b_1 = d_{11} a_1 + \dots + d_{1s} a_s + d_{1,s+1} a_{s+1}$$

$$b_2 = d_{21} a_1 + \dots + d_{2s} a_s + d_{2,s+1} a_{s+1}$$

$$b_{n-1} = d_{n-1,1} a_1 + \dots + d_{n-1,s} a_s + d_{n-1,s+1} a_{s+1} \quad \leftarrow$$

$$b_n = d_{n1} a_1 + \dots + d_{ns} a_s + d_{n,s+1} a_{s+1} \quad \left| \cdot \frac{d_{n-1,s+1}}{d_{n,s+1}} \right.$$

$$c_{n-1} = b_{n-1} - \frac{d_{n-1,s+1}}{d_{n,s+1}} b_n = \beta_{n-1,1} a_1 + \dots + \beta_{n-1,s} a_s + 0 a_{s+1}$$

$$\left( b_{n-1} - \frac{\alpha_{n-1, s+1}}{\alpha_{n, s+1}} b_n \right) = c_{n-1} = \beta_{n-1, 1} a_1 + \dots + \beta_{n-1, s} a_s$$

$$\Rightarrow b_1 - \frac{\alpha_{1, s+1}}{\alpha_{n, s+1}} b_n = c_1 = \beta_{1, 1} a_1 + \dots + \beta_{1, s} a_s$$

$$b_2 - \frac{\alpha_{2, s+1}}{\alpha_{n, s+1}} b_n = c_2 = \beta_{2, 1} a_1 + \dots + \beta_{2, s} a_s$$

$$b_{n-1} - \frac{\alpha_{n-1, s+1}}{\alpha_{n, s+1}} b_n = c_{n-1} = \beta_{n-1, 1} a_1 + \dots + \beta_{n-1, s} a_s$$

$$C = \{ c_1, \dots, c_{n-1} \} \text{ сa лнн. комб. на } A = \{ a_1, \dots, a_s \}$$

$$\Rightarrow C \in \Lambda \quad \underline{n-1 < s}$$

$$\exists \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1} \neq 0, 0, \dots, 0$$

$$\mu_1 c_1 + \dots + \mu_{n-1} c_{n-1} = 0$$

$$\mu_1 \left( b_1 - \frac{\alpha_{1, s+1}}{\alpha_{n, s+1}} b_n \right) + \dots + \mu_{n-1} \left( b_{n-1} - \frac{\alpha_{n-1, s+1}}{\alpha_{n, s+1}} b_n \right) = 0$$

$$\mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + \dots + \mu_{n-1} b_{n-1} - \underbrace{\left( \frac{\alpha_{1, s+1}}{\alpha_{n, s+1}} \mu_1 + \dots + \frac{\alpha_{n-1, s+1}}{\alpha_{n, s+1}} \mu_{n-1} \right)}_{\lambda} b_n = 0$$

$$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}, \lambda \neq 0, 0, 0, \dots, 0, 0$$

$$\Rightarrow b_1, \dots, b_n \in \Lambda$$