

07.10.2014

Алгебра - I (Линейна алгебра) - лекция

„Затиски по Алгебра: Линейна алгебра“ - Захариян, Сидеров

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

$\mathbb{C} = \{ (a, b) \mid a, b \in \mathbb{R} \}$ множеството / полето на комплексните числа; ~~а~~ a - реална част
 b - имагинерна част

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \in \mathbb{C}$$

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = \cancel{(a_1 a_2, b_1 b_2)} (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1) \in \mathbb{C}$$

$$\alpha_1 = (a_1, b_1), \alpha_2 = (a_2, b_2)$$

1) $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_2 + \alpha_1$ (коммутативност)

2) $(\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_3 = \alpha_1 + (\alpha_2 + \alpha_3)$ (асоциативност)

3) $\alpha_1 + (0, 0) = \alpha_1, \forall \alpha_1 \in \mathbb{C}$ - нулев елемент

4) $(a, b) + (-a, -b) = (0, 0)$

$(-a, -b) = -(a, b)$ - противоположен на (a, b)

5) $\alpha_1 \alpha_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1) = \alpha_2 \alpha_1$ (коммутативност)

6) $(\alpha_1 \alpha_2) \alpha_3 = (a_1 a_2 a_3 - b_1 b_2 a_3 - \cancel{a_1 b_2 b_3} - a_2 b_1 b_3, a_1 a_2 b_3 - \cancel{b_1 b_2 b_3} + a_1 a_3 b_2 + a_2 a_3 b_1)$
 $\alpha_1 (\alpha_2 \alpha_3) = (a_1, b_1) (a_2 a_3 - b_2 b_3, a_2 b_3 + a_3 b_2) = (a_1 a_2 a_3 - a_1 b_2 b_3 - \cancel{a_1 b_1 b_3} - a_3 b_1 b_2, a_1 a_2 b_3 + a_1 a_3 b_2 + a_2 a_3 b_1 - \cancel{b_1 b_2 b_3})$

7) ~~$(a, b)(1, 1) = (a-b, a+b)$~~ $(a, b)(1, 1) = (a-b, a+b)$ $\left[\begin{array}{l} -a b_1 b_3 - a_3 b_1 b_2, a_1 a_2 b_3 + a_1 a_3 b_2 + a_2 a_3 b_1 - \\ - b_1 b_2 b_3 \end{array} \right]$
 \hookrightarrow не е нулев елемент

$(a, b)(1, 0) = (a+0b, a0+b \cdot 1) = (a, b)$

$e = (1, 0)$ \hookrightarrow нулев елемент

8) $\alpha_1 (\alpha_2 + \alpha_3) = \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3$ (дистрибутивност)

~~9) $\alpha_1 (\alpha_2 \alpha_3) = (\alpha_1 \alpha_2) \alpha_3$ (асоциативност)~~

$$(a, 0) + (b, 0) = (a+b, 0)$$

$$(a, 0) \cdot (b, 0) = (ab, 0)$$

$$\mathbb{R} \hookrightarrow \{ (a, 0) \mid a \in \mathbb{C} \} \subset \mathbb{C}$$

$$a \rightarrow (a, 0) \quad (a, 0) \xrightarrow{\tilde{\mathbb{R}}} a$$

$\mathbb{R} \hookrightarrow \tilde{\mathbb{R}} \subset \mathbb{C}$, това разбиране пог. твърдението

$$\begin{matrix} a \in \mathbb{C} \\ \tilde{\mathbb{R}} \searrow \\ \mathbb{R} \end{matrix} \rightarrow (a, 0)$$

$$\boxed{\mathbb{R} \subset \mathbb{C}}$$

$$i = (0, 1)$$

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$$

$$a \in \mathbb{R}$$

$$ai = (a, 0)(0, 1) = \cancel{a(0, 1)} (0, a)$$

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = \boxed{a + bi}$$

$$\mathbb{C} = \{ a + bi \mid a, b \in \mathbb{R} \}$$

\hookrightarrow алгебраичен запис на комплексно число

$$a_1 + b_1 i + a_2 + b_2 i = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i$$

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) &= \cancel{a_1 a_2} - \cancel{b_1 b_2} + \cancel{a_1 b_2 i} + \cancel{a_2 b_1 i} + a_1 a_2 + a_1 b_2 i + \\ &\quad + a_2 b_1 i + b_1 b_2 i^2 = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 (-1) = \\ &= \boxed{a_1 a_2 - b_1 b_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i} \end{aligned}$$

Комплексно спрягане

$$z = (a, b) = a + bi$$

$$\bar{z} = (a, -b) = a - bi$$

9) $\bar{\bar{z}} = z$ (спреганото на спреганото комплексно число)

$$10) z + \bar{z} = 2a = 2(\operatorname{Re} z) \xrightarrow{\text{реалната част на } z}$$

$$11) \alpha \bar{\alpha} = (a, b)(a, -b) = (a^2 + b^2, 0) = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$$

$$|\alpha| = \sqrt{\alpha \bar{\alpha}} = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$$

$$12) \alpha = \bar{\alpha} \Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{R}$$

$$13) \overline{\alpha + \alpha_1} = \bar{\alpha} + \bar{\alpha}_1$$

$$14) \overline{\alpha \alpha_1} = \bar{\alpha} \bar{\alpha}_1$$

Зелена с комплексен числа:

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{1}{a^2+b^2} (a-bi) =$$

$$= \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i$$

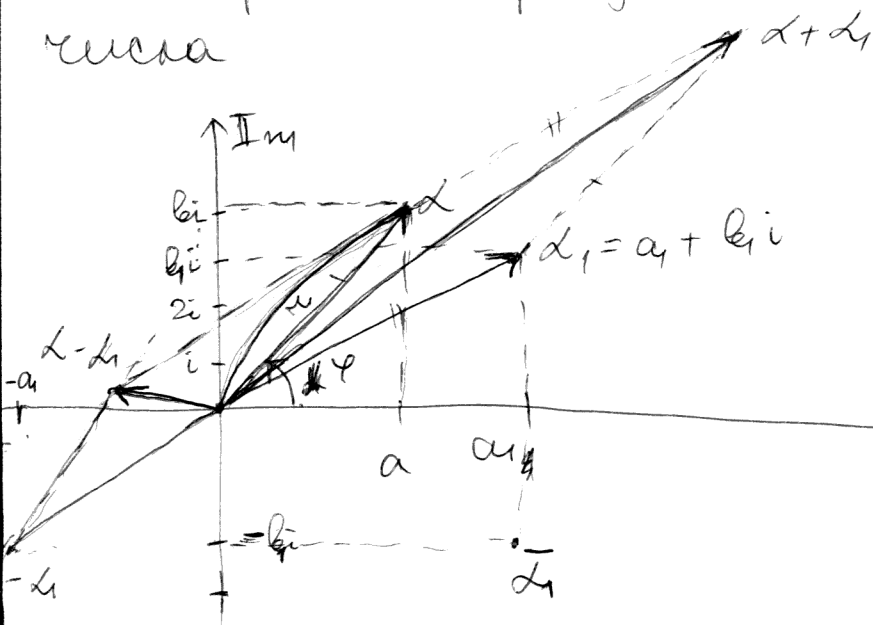
Пример: $\frac{1+2i}{3+4i} = \frac{(1+2i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{3+8-4i+6i}{9+16} = \frac{11+2i}{25} =$

$$= \frac{11}{25} + \frac{2}{25} i$$

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{\bar{\alpha}}{\alpha \bar{\alpha}} = \frac{\bar{\alpha}}{|\alpha|^2}$$

$$15) |\alpha \beta| = \sqrt{\alpha \beta \bar{\alpha} \bar{\beta}} = \sqrt{\alpha \bar{\alpha}} \cdot \sqrt{\beta \bar{\beta}} = |\alpha| \cdot |\beta|$$

Геометрично представяне на комплексните числа



$$\alpha = a + bi$$

$$\alpha_1 = a_1 + b_1 i$$

$$|\alpha| = \sqrt{\alpha \bar{\alpha}} = \sqrt{a^2 + b^2} = r$$

$$a = r \cos \varphi$$

$$b = r \sin \varphi$$

$$\varphi = \arg \alpha$$

$$\alpha = a + bi = r \cos \varphi + r \sin \varphi i = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Числото „0“ няма тригонометричен вид, защото не е определен аргумента за него.

$$i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$$

$$i^2 = -1 = \cos \pi + i \sin \pi$$

$$i^3 = -i = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}$$

$$i^4 = 1 = \cos 0 + i \sin 0$$

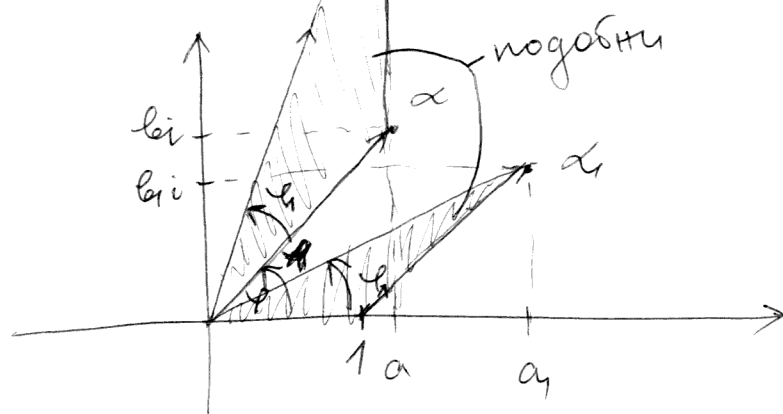
~~||||~~
$$|1-i| = \sqrt{1 + \sqrt{i^2}} = \sqrt{1+|-1|} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$1-i = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right)$$

$$\alpha = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$\alpha_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$$

$$\alpha \alpha_1 = r r_1 [(\cos \varphi \cos \varphi_1 - \sin \varphi \sin \varphi_1) + i(\cos \varphi \sin \varphi_1 + \sin \varphi \cos \varphi_1)] = r r_1 (\cos(\varphi + \varphi_1) + i \sin(\varphi + \varphi_1))$$



$$\alpha^2 = r^2 (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)$$

$$\alpha^3 = r^3 (\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi)$$

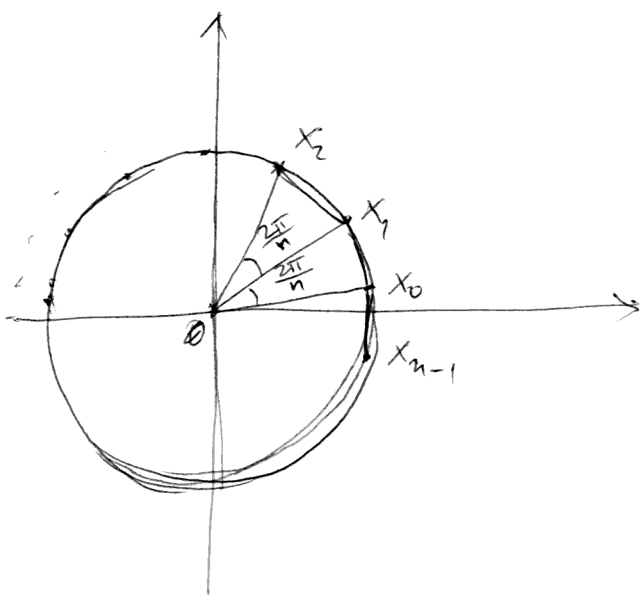
⋮

$$\alpha^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

формула
на Муавре

$$x^n = \alpha = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$x_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right); k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$



Всички n -ти корени на
компл. ч. симетрично са
върхове на правилен
 n -ъгълник

Забел.: При комплексните
числа няма сравняване

$$\alpha_1 \neq 0 \Rightarrow \frac{\alpha}{\alpha_1} = \frac{r (\cos \varphi + i \sin \varphi)}{r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)} = \boxed{\frac{r}{r_1} (\cos(\varphi - \varphi_1) + i \sin(\varphi - \varphi_1))}$$

Множеството на комплексните числа е възможено
най-голямото разширение на понятието число.

~~Всички~~ Всеки елемент, ~~които~~ който не принадлежи на
на \mathbb{C} ~~се нарича~~ се нарича просто "елемент".

Опр. $\mathcal{K} \subset \mathbb{C}$, и \mathcal{K} има поне 2 елемента
за което е изпълнено:

- ако $a, b \in \mathcal{K} \Rightarrow a + b \in \mathcal{K}$
- ако $a, b \in \mathcal{K} \Rightarrow a \cdot b \in \mathcal{K}$
- ако $b \neq 0 \in \mathcal{K} \Rightarrow \frac{a}{b} \in \mathcal{K}$

~~Такова множество се нарича числово~~
То \mathcal{K} е числово поле

Пример: \mathbb{Q}, \mathbb{R} - числовые поля

\mathbb{Z} - не е поле

Пример: $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$

$\hookrightarrow \mathbb{Q}$ разширено с $\sqrt{3}$

$$(a_1 + b_1\sqrt{3}) \pm (a_2 + b_2\sqrt{3}) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)\sqrt{3}$$

$$(a_1 + b_1\sqrt{3})(a_2 + b_2\sqrt{3}) = a_1a_2 + 3b_1b_2 + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$$

$$\frac{1}{a_1 + b_1\sqrt{3}} = \frac{a_1 - b_1\sqrt{3}}{(a_1 + b_1\sqrt{3})(a_1 - b_1\sqrt{3})} = \frac{a_1 - b_1\sqrt{3}}{a_1^2 - 3b_1^2} =$$

$$= \frac{a_1}{a_1^2 - 3b_1^2} - \frac{b_1}{a_1^2 - 3b_1^2} \sqrt{3}$$

Лб Ако \mathbb{K} е числово поле
 $\Rightarrow \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{K}$

Доказателство: \mathbb{Q}

$$\exists x \in \mathbb{K}, x \neq 0$$

$$x - x \in \mathbb{K} \Rightarrow 0 \in \mathbb{K}$$

$$\frac{x}{x} = 1 \in \mathbb{K}$$

$$1, 1+1=2, 3, \dots$$

$$\Rightarrow \mathbb{N} \subset \mathbb{K}$$

$$0 - s = -s \in \mathbb{K}$$

$$x \in \mathbb{Q} \quad x = \frac{a}{b} \in \mathbb{K}$$

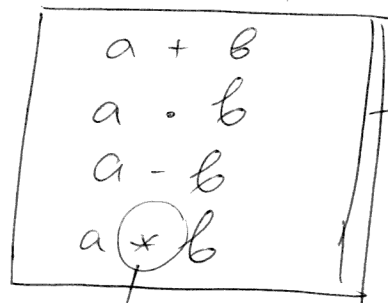
$$a, b \in \mathbb{Z}$$

$$a, b \in \mathbb{K}$$

$$\Rightarrow \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{K}$$

Опр. Множество, $M \neq \emptyset$
 бинарна операция в M
 ако $\forall a, b \in M$ е сопоставен елемент $\in M$
 $\varphi: M \times M \rightarrow M$

$$(a, b) \rightarrow \varphi(a, b)$$



запис на
бинарна операция

знакът на операцията
стои между двата
аргумента

Опр.1 Нека $M \neq \emptyset$ с поне два различни ел.
 и в M имаме дефинирани две
 бинарни операции: "+", "·"

$$\forall a, b \in M \rightarrow a + b \in M$$

$$a \cdot b \in M$$

M е поле, ако са изпълнени св-вта:

- 1) $a + b = b + a$ (комутативност) $\forall a, b \in M$
- 2) $(a + b) + c = a + (b + c)$ $\forall a, b, c \in M$ (асоц.)
- 3) $\exists 0 \in M: a + 0 = a, \forall a \in M$
- 4) $\forall a \in M, \exists b \in M: a + b = 0$
- 5) $ab = ba, \forall a, b \in M$
- 6) $(ab)c = a(bc), \forall a, b, c \in M$
- 7) $a(b + c) = ab + ac, \forall a, b, c \in M$ (дистр.)
- 8) $\exists 1 \in M: a \cdot 1 = a, \forall a \in M$ ($1 \neq 0$)

$$g) \forall a \neq 0, \exists c \in M : ac = 1$$

- 8 -

Забел.: Всяко числово поле е поле, но не всяко поле е числово поле.

Примери за нечислови полета:

$$M = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\} \quad \begin{array}{l} \text{до се разл. като} \\ \text{остатък от mod 3} \end{array}$$

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

.	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

$$B = \{\bar{0}, \bar{1}\}$$

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$

.	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

$$R(x) = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \mid f, g \text{ полиноми} \in R[x] \right\}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \frac{f(x)g_1(x) + f_1(x)g(x)}{g(x)g_1(x)}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \frac{f(x)f_1(x)}{g(x)g_1(x)}$$