

E - Евклидово пр-во

Д) Квадратна матрица $A_{n \times n}$ е ортогонална, ако $A \cdot A^t = E$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = E$$

Елементът на място ij се смята

$$a_{i1}a_{j1} + a_{i2}a_{j2} + \dots + a_{in}a_{jn} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

\Rightarrow Ако A е ортогонална, нейните редове съдържат координатите на ортонормиран базис в n -мерното евклидово пр-во.

Св-во: 1) A - ортогонална $\Rightarrow A$ е обратима и $A^{-1} = A^t$

$$2) \text{ — — — — — } \Rightarrow A \cdot A^t = E = A^t \cdot A = A^t (A^t)^t \Rightarrow A^t \text{ също е ортогонална}$$

3) Столбове на A също ^{ортонормирани} образуват ортонормиран базис

4) A, B - ортогонални

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} A^{-1} = B^t A^t = (AB)^t$$

$$\Rightarrow (AB)(AB)^t = E \Rightarrow AB \text{ е ортогонална}$$

Гв) $A_{n \times n}$ е ортогонална матрица $\Leftrightarrow A$ е матрица на преход от ортонормиран базис B в Евклидово n -мерно пространство.

Дадено: e_1, \dots, e_n - базис на E

4) g_1, \dots, g_n - ортонормиран базис

$$g_i = \tau_{i1}e_1 + \tau_{i2}e_2 + \dots + \tau_{in}e_n$$

$$T = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \dots & \tau_{1n} \\ \tau_{21} & & \tau_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ \tau_{n1} & & \tau_{nn} \end{pmatrix}$$

$$(g_i, g_j) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

$$(g_i, g_j) = \tau_{i1}\tau_{j1} + \dots + \tau_{in}\tau_{jn}$$

(e_1, e_n) - ортонормиран

$$T^t T = ((g_i, g_j)) = E \Rightarrow T \text{ е ортогонална}$$

\Rightarrow T-ортонормална $\Rightarrow T^t T = E \Rightarrow$ столбовете са ортонормирани $\Rightarrow T$ е матрица на преход от ортонормиран към ортонормиран базис

Геометричната матрица на преход от правоъгълна в правоъгълна, която запазва дължината на координатната ос, са ортогонални.

Ортогонални оператори

Д) E - Евклидово пр-во. Линейния оператор $\varphi: E \rightarrow E$ е ортогонален оператор, ако $\varphi(x)\varphi(y) = (x, y) \forall x, y \in E$

Пример: еднаквост-осева симетрия, ротация
 Транслацията добавя const \Rightarrow не се разглежда.
 Проекцията не запазва дължините

Св-ва: 1) φ -ортogonalен $\Rightarrow |\varphi(x)| = |x|$

$$\sqrt{\varphi(x)\varphi(x)} = \sqrt{(x,x)} = |x|$$

$$2) \angle(\varphi(x), \varphi(y)) = \angle(x, y)$$

$$x, y \neq 0$$

$$\cos \angle(\varphi(x), \varphi(y)) = \frac{(\varphi(x), \varphi(y))}{|\varphi(x)| |\varphi(y)|} = \frac{(x, y)}{|x| |y|}$$

3) Ако линеарен оператор φ запазва дължината, то той е ортogonalен.

Док-во:

$$|\varphi(x+y)|^2 = |\varphi(x+y)|^2 = |x+y|^2$$

$$\varphi(x+y), \varphi(x+y) = (\varphi(x+y), \varphi(x+y))$$

$$= (\varphi(x) + \varphi(y), \varphi(x) + \varphi(y)) = (\varphi(x), \varphi(x)) + 2(\varphi(x), \varphi(y)) + (\varphi(y), \varphi(y))$$

$$+ (\varphi(y), \varphi(y)) = (x, x) + 2(\varphi(x), \varphi(y)) + (y, y)$$

$$(x+y, x+y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y)$$

$$2(\varphi(x), \varphi(y)) = 2(x, y) \Rightarrow \varphi \text{ ортogonalен}$$

4) φ -ортogonalен и λ -собствена стойност g -собствен вектор

$$(\varphi(g), \varphi(g)) = |g|^2$$

$$(\lambda g, \lambda g) = \lambda^2 (g, g) = |g|^2 \quad |g|^2 \neq 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

5) собствени вектори с \neq собствени с. са ортogonalни на n/y си.

$$(g_1, g_2) = (\varphi(g_1), \varphi(g_2))$$

$$(g_1, g_2) = \lambda_1 \lambda_2 (g_1, g_2) = -(g_1, g_2) \Rightarrow (g_1, g_2) = 0$$

Т] E - Евклидово п-во \Rightarrow лн. оп. $\varphi: E \rightarrow E$ е ортогонална
 \Leftrightarrow в произволен ортонормиран базис ~~та~~
~~ортонормиран~~ матрицата му е ортогонална

Док-во:

\Rightarrow) φ - орт. оп.

e_1, \dots, e_n - ортонорм. базис

$$\varphi(e_i) = a_{i1}e_1 + \dots + a_{in}e_n$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{in} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$(\varphi(e_i), \varphi(e_j)) = (e_i, e_j) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

$$\Rightarrow A^t \cdot A = (\delta_{ij}) = E \Rightarrow A \text{ е ортогонална}$$

\Leftarrow) φ има ортогонална матрица в ортонормиран базис $\Rightarrow A$

$$A^t \cdot A = E$$

елементът на ij -то място е

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (\varphi(e_i), \varphi(e_j)) &= a_{i1}a_{j1} + \dots + a_{in}a_{jn} \Rightarrow \\ \Rightarrow (\varphi(e_i), \varphi(e_j)) &= (e_i, e_j) \end{aligned}$$

$$x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n; y = y_1e_1 + \dots + y_ne_n$$

$$(\varphi(x), \varphi(y)) = (x_1\varphi(e_1) + \dots + x_n\varphi(e_n), y_1\varphi(e_1) + \dots + y_n\varphi(e_n)) =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^n x_i \varphi(e_i), \sum_{j=1}^n y_j \varphi(e_j) \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j (\varphi(e_i), \varphi(e_j)) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j (e_i, e_j) = \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j \right) = (x, y)$$

$\Rightarrow \varphi$ е ортогонален оператор

Нека φ е ортогонален оператор в E Евклидово пр-во. Крайно мерно
 Съществува ортонормиран базис $\{e_i\} \in E$, спрямо който
 матрицата на φ е от вида

$$\begin{pmatrix} D_1 & & & \\ & D_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D_s \end{pmatrix}, \text{ където } D_i \text{ са от вида:}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & (-1) \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Док-во: индукция по n .

1) $n=1$
 $|e_1|=1 \Rightarrow \varphi(e_1) \in l(e_1) \Rightarrow \varphi(e_1) = \pm e_1 \Rightarrow$
 матрицата е (1) или (-1)

$n=2$
 а) има собствен вектор
 $\cdot g_1: \varphi(g_1) = \lambda g_1, \lambda = \pm 1$
 $U = l(g_1), U^\perp \rightarrow \dim U^\perp = \dim U = 1$
 $\Rightarrow g_2$ - базис на U^\perp
 $|g_2|=1$

$$\langle \varphi(g_2), \varphi(g_1) \rangle = \langle g_2, g_1 \rangle = 0$$

$$\langle \varphi(g_2), \lambda_1 g_1 \rangle = 0 \Rightarrow \langle \varphi(g_2), g_1 \rangle = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi(g_2) \in U^\perp$$

$\varphi(g_2) \in l(g_2) \Rightarrow \exists \lambda_2: \varphi(g_2) = \lambda_2 g_2 \Rightarrow \lambda_2 = \pm 1$
 \Rightarrow Матрицата в базис g_1, g_2 е $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

От този тип геометрично са осева сим. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,

центр. сим $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ и идентитет $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2) Нами собствен вектор.

Нека A е матрица на оператора в произволен ортонормиран базис

$$A^t A = E \Rightarrow \det(A A^t) = 1$$
$$(\det A)^2 = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \det A = \pm 1$$



$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda(a + d) + (ad - bc)$$

$$D = (a + d)^2 - 4(ad - bc) < 0$$

$$\Rightarrow ad - bc = 1$$

$$\lambda^2 - \lambda(a + d) + 1 = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ — има } \det 1 \text{ и е ортонормална}$$

$$\Rightarrow ac + bd = 0$$

$$a^2 + b^2 = 1$$

$$c^2 + d^2 = 1$$

$$ad - bc = 1$$

$$\Rightarrow a = d, b = -c$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \rightarrow a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

\rightarrow ротация

Нѐко вѐрждетено е вѐрното за $(n-1)$ и $(n-2)$, иже тѐ
 док. за n .

φ има едномерно или двумерно φ -инвариантно
 подпр. в U .

$$1) \dim U = 1$$

$$\Rightarrow U = \ell(e_1) \rightarrow \text{содържи}$$

$$2) \dim U = 2 \Rightarrow U = \ell(e_1, e_2) \in \text{операторът има}$$

матрица $\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$

$$U^\perp \oplus U = E \Rightarrow \text{~~U^\perp~~ има}$$

$$\dim U^\perp = \dim E - \dim U = \begin{cases} n-1 \\ n-2 \end{cases}$$

$$x \in U^\perp \quad \exists \varphi(x) \in U^\perp$$

$$a \in U \quad (\varphi(x), \varphi(a)) = (x, a) = 0$$

$$\varphi(x)$$

$$1) \dim U = 1$$

$$(\varphi(x), \varphi(a)) = (\varphi(x), \lambda a) = \lambda (\varphi(x), a) = 0$$

$$\Rightarrow \varphi(x) \perp U \Rightarrow \varphi(x) \in U^\perp.$$

$$2) \dim U = 2$$

$$\forall y \in U, \varphi(U) = U \Rightarrow \exists z \in U: \varphi(y) = z$$

$$(\varphi(x), y) = (\varphi(x), \varphi(z)) = (x, z) = 0$$

$$\Rightarrow \varphi(x) \in U^\perp \Rightarrow U^\perp \text{ е } \varphi\text{-инвариантно}$$

По индукция \exists ортонормиран базис на U^\perp
 $(e_1, \dots, e_{n-1}/e_{n-2})$, спрямо който матрицата на
 $\varphi|_{U^\perp}$ е $\begin{pmatrix} D_1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & D_{n-1} \end{pmatrix}$

Вземем ортонормиран базис e_n или e_{n-1}, e_n на U .
 Тогава целият базис e_1, \dots, e_n е ортонормиран и
 в базиса матрицата E

$$\begin{pmatrix} D_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & D_{n-1} \end{pmatrix} \rightarrow \text{от } U$$

Q