

06.01.2015 | Алгебра I

## Евклидово пространство

\*  $V$ - $\Pi$  над полем  $\mathbb{R}$  на реални числа

Във  $V$  е въведено скалярно произведение, ако има за  $\forall a, b \in V \rightarrow \langle a, b \rangle \in \mathbb{R}$

$\exists$   $\varphi$ -я  $\varphi: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  и са изпълнени следните св-ва:

1) симетричност

2)  $\langle \lambda a, b \rangle = \lambda \langle a, b \rangle$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  - линейност по  $I$ -и аргумент

3)  $\langle a+b, c \rangle = \langle a, c \rangle + \langle b, c \rangle$  по от 1)  $\Rightarrow$  и по  $II$ -и аргумент

4)  $\forall a \neq 0 \Rightarrow \langle a, a \rangle > 0$

Примери: 1)  $\mathbb{R}^2$  и  $\mathbb{R}^3$  - изпълняват тези св-ва

2)  $V$ - $\Pi$  над  $\mathbb{R}$ -крайно мерно

$e_1, \dots, e_n$ -базис на  $V$

$a = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$

$b = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_n e_n$

Опр:  $\langle a, b \rangle = \alpha_1 \beta_1 + \dots + \alpha_n \beta_n$

$\hookrightarrow$  изпълнява св-ва

Извод 1: По този начин във  $n$ -крайно мерно пространство над  $\mathbb{R}$  може да се въведе скалярно произведение.

D) Евклидово пространство:  $\Pi$  над  $\mathbb{R}$  с фиксирано скалярно произведение.

Евклидово пространство

1)  $|a| = \sqrt{\langle a, a \rangle}$

$|0| = 0$

$\forall a \neq 0 \Rightarrow |a| > 0$

$$2) (0, b) = 0$$

3) ако  $\{e_1, \dots, e_n\}$  е базис на пространството  
 $a = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, b = \sum_{j=1}^n \beta_j e_j$

$$(a, b) = (\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n, b) = \alpha_1 (e_1, b) + \dots + \alpha_n (e_n, b) =$$

$$= \alpha_1 (e_1, \beta_1 e_1 + \dots + \beta_n e_n) + \dots + \alpha_n (e_n, \beta_1 e_1 + \dots + \beta_n e_n) =$$

$$= \alpha_1 \beta_1 (e_1, e_1) + \dots + \alpha_1 \beta_n (e_1, e_n) + \dots + \alpha_n \beta_1 (e_n, e_1) + \dots + \alpha_n \beta_n (e_n, e_n)$$

$$(a, b) = \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, \sum_{j=1}^n \beta_j e_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j (e_i, e_j)$$

$\square (a, b) = 0, a \perp b$  — перпендикулярни

$0 \perp a, \forall a \in E \Rightarrow$  Винаги  $0$  е ! вектор,  $\perp$  на  $\forall v \in E, v \in 0$ .

$\square$  Питоагорова Т-ма.

Нека  $E$  е евклидово пространство и  $a_1, \dots, a_s$  са ненулеви вектори, такава че  $a_i \perp a_j, i \neq j$ . Тогава  $|a_1 + \dots + a_s|^2 =$

$$= |a_1|^2 + \dots + |a_s|^2$$

$$|a_1 + \dots + a_s|^2 = (a_1 + a_2 + \dots + a_s, a_1 + \dots + a_s) =$$

$$= (a_1, a_1) + (a_2, a_2) + \dots + (a_s, a_s) + 2 \sum_{i < j} (a_i, a_j) = |a_1|^2 + \dots + |a_s|^2$$

$\square$  Ако  $a_1, \dots, a_s$  са ненулеви вектори във евклидово пространство  $E$  и  $a_i \perp a_j, \forall i \neq j$ , то  $a_1, \dots, a_s$  са ЛНЗ.

Док-во:

$$\text{Нека } \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_s a_s = 0 \quad | \cdot a_i$$

$$\lambda_1 (a_1, a_i) + \dots + \lambda_i (a_i, a_i) + \dots + \lambda_s (a_s, a_i) = (0, a_i) = 0$$

$$\lambda_i \underbrace{(a_i, a_i)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \quad \forall i \in [1, s] \Rightarrow$$

$\lambda_1 = \dots = \lambda_s = 0 \Rightarrow a_1, \dots, a_s$  са ЛНЗ.

$\Rightarrow a_1, \dots, a_s$  - ортогонална с-на от вектори

D] Ортогонален базис - Грам-Шмидт базис на  $E$ , за който е  
 $e_i \perp e_j$  за  $i \neq j$

---

$a \neq 0$

$$a' = \frac{a}{|a|} \Rightarrow |a'| = \sqrt{\frac{(a, a)}{|a||a|}} = \sqrt{\frac{1}{|a|^2} (a, a)} = \frac{1}{|a|} \sqrt{(a, a)} = 1$$

$\hookrightarrow$  Нормиране на вектора  $a$ .

D] Базисът  $e_1, \dots, e_n$  е ортонормиран базис на  $E$ , ако  
 $e_i \perp e_j$  и  $|e_i| = 1$   
 $i \neq j$

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

TE] Ако  $e_1, \dots, e_n$  е ортонормиран базис на  $E$  и  
 $a = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$  и  $b = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_n e_n$ , то

$$(a, b) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j (e_i, e_j) = \alpha_1 \beta_1 + \dots + \alpha_n \beta_n$$

$$|a| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2}$$

T] (Грам-Шмидт)

$E$  - евклидово пространство (ЕП)

$a_1, \dots, a_s$  - ЛНЗ  $\Rightarrow \exists e_1, \dots, e_s$  - ортогонални, такива че  
 $\ell(a_1, \dots, a_k) = \ell(e_1, \dots, e_k)$ , в което  $k \in [1, s]$

/ Метод за намиране на ортогонален базис /

4) d.k. - 60.

$$\textcircled{1} e_1 = a_1, e_1, e \text{ ЛНЗ}$$

$$\textcircled{2} e_2 = a_2 + \lambda_{21} e_1 \mid e_1$$

$$0 = (e_2, e_1) = (a_2, e_1) + \lambda_{21} (e_1, e_1) \Rightarrow \lambda_{21} = - \frac{(a_2, e_1)}{(e_1, e_1)}$$

$$e_2 = a_2 + \lambda_{21} e_1$$

$$1) \ell(a_1, a_2) = \ell(e_1, e_2)$$

$$a_2 = e_2 - \lambda_{21} e_1$$

$$2) \dim \ell(a_1, a_2) = \dim \ell(e_1, e_2) = 2$$

$$\Rightarrow e_1, e_2 \text{ са базис на } \ell(a_1, a_2)$$

$$\text{и } e_1, e_2 \text{ са ЛНЗ и } e_2 \neq 0$$

$$\textcircled{3} e_3 = a_3 + \lambda_{31} e_1 + \lambda_{32} e_2 \mid e_1$$

$$(e_3, e_1) = 0 = (a_3, e_1) + \lambda_{31} (e_1, e_1) \Rightarrow \lambda_{31} = - \frac{(a_3, e_1)}{(e_1, e_1)}$$

$$\mid e_2$$

$$(e_3, e_2) = 0 = (a_3, e_2) + \lambda_{32} (e_2, e_2) \Rightarrow \lambda_{32} = - \frac{(a_3, e_2)}{(e_2, e_2)}$$

$$e_3 = a_3 + \lambda_{31} e_1 + \lambda_{32} e_2$$

$$1) \left. \begin{array}{l} e_3 \in \ell(a_1, a_2, a_3) \\ a_3 \in \ell(e_1, e_2, e_3) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{вектора дават, имат дим 3}$$

$$\Rightarrow e_1, e_2, e_3 \text{ са базис на } \ell(e_1, e_2, e_3)$$

$$\Rightarrow e_1, e_2, e_3 \text{ са ЛНЗ и } e_3 \neq 0$$

ако сме получили  $e_1, \dots, e_{k-1}$ ,

$$e_k = a_k + \lambda_{k1} e_1 + \dots + \lambda_{k, k-1} e_{k-1}$$

$$t < k$$

$$0 = (e_k, e_t) = (a_k, e_t) + \lambda_{kt} (e_t, e_t)$$

$$\lambda_{kt} = - \frac{(a_k, e_t)}{(e_t, e_t)} \text{ за } t \text{ от } 1 \text{ до } k-1$$

$$e_k = a_k + \lambda_{k1} e_1 + \dots + \lambda_{k, k-1} e_{k-1}$$

$$\left. \begin{array}{l} 1) e_k \in \ell(a_1, \dots, a_k) \\ 2) a_k \in \ell(e_1, \dots, e_k) \end{array} \right\} \text{свойстваи} \\ \dim(\ell(e_1, \dots, e_k)) = k$$

$$2) e_1, \dots, e_k - \text{базис на } \ell(e_1, \dots, e_k)$$

$$\Rightarrow e_1, \dots, e_k - \text{ЛНЗ}$$

$$e_k \neq 0$$

$$3) \cancel{e_i \in \ell(e_1, \dots, e_k)} e_i \perp e_k \quad i \in [1, k-1]$$

Следствие: В  $k$ -мерното ЕП има ортонормиран базис

и

и  $\perp$