

4) свободными коэф на $f_A(\lambda)$ е $\det(A)$ при $\lambda=0$.

$$\boxed{I} \quad A \sim B \Rightarrow f_A(\lambda) = f_B(\lambda)$$

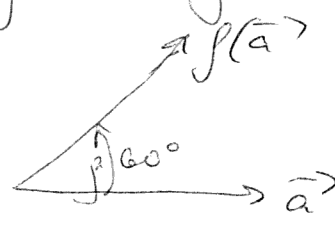
Доказателство:

$$\begin{aligned} f_B(\lambda) &= \det(B - \lambda E) = \det(T^{-1}AT - \lambda E) = \\ &= \det(T^{-1}AT - \lambda T^{-1}ET) = \det(T^{-1}(A - \lambda E)T) = \\ &= \det T^{-1} \det(A - \lambda E) \det T = \frac{1}{\det T} \cdot \det(A - \lambda E) \det T = \\ &= \det(A - \lambda E) = f_A(\lambda) \end{aligned}$$

Собствени вектори и инвариантни подпространства

\boxed{D} Собствен вектор за оператор - като приложим оператора, е попуства вектор, || на даденио $\varphi: V \rightarrow V$ - лнн. ол.
 $v \neq 0$ е собствен за φ , ако $\varphi(v) = \lambda \cdot v$, където $\lambda \in F$ е скаларно число.

Пример: σ - оств симетрия
 $\sigma(\vec{a}) = \vec{a}$
 $\sigma(\vec{b}) = -\vec{b}$
 \vec{a}, \vec{b} - базис: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Пример: f - ротац на 60°

 - няма собствени вектори

Пример: f - цётпр. сим.
 $\varphi(\vec{a}) = -\vec{a}$
 \downarrow
 \forall вектор е собствен със собствена стойност (-1)

Означено: Ако оператора φ в различни базиси (e) и (φ) има матрици A и B , тогава $A \sim B \Leftrightarrow f_A(\lambda) = f_B(\lambda)$, т.е.
 $\det(A - \lambda E) = \det(B - \lambda E)$.

$f_A(\lambda) = f_B(\lambda)$ се нарича характеристичен полином на оператора.

Теорема: Ако V е K -пространство и $\varphi \in \text{Hom}(V, V)$ е линеен оператор.
 $f_\varphi(\lambda)$ е характеристичен полином на φ над F .
 $\lambda \in F$ е собствено значение на φ \Leftrightarrow λ е корен на $f_\varphi(\lambda)$.

Доказателство: \Rightarrow Ако λ е собствено значение $\Rightarrow \exists g \neq 0: \varphi(g) = \lambda g$.

Ако e_1, \dots, e_n - базис и A е матрицата на φ в (e)
 $\Rightarrow g = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n \neq 0 \Rightarrow A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \Rightarrow A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \lambda E \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow (A - \lambda E) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (a_{11} - \lambda)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}\alpha_1 + \dots + (a_{nn} - \lambda)\alpha_n = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

системата има ненулево решение $\alpha_1, \dots, \alpha_n \Rightarrow$

$\det(A - \lambda E) = 0 \Rightarrow \lambda$ е корен на $f_A(\lambda)$.

\Leftarrow Ако λ_0 корен на $f_A(\lambda)$ $\Rightarrow \lambda_0 \in F \Rightarrow \det(A - \lambda_0 E) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a_{11} - \lambda_0)x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + (a_{nn} - \lambda_0)x_n = 0 \end{cases}$$

има
ненулево
решение β_1, \dots, β_n

$$\Rightarrow (A - \lambda_0 E) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \lambda_0 \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \text{ задава}$$

координатите на
собствен вектор

Алгоритъм за намиране собствени вектори на 10×10 φ .

1) фиксира се базис и матрицизира φ в него.

2) $f_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ - намира се $f_A(\lambda)$

3) Намираме се корените на $f_A(\lambda) = 0$, принадлежащи на F
 $\Rightarrow \lambda_1, \dots, \lambda_s$ - различни собствени стойности

4) за $k \in [1, s]$ се решава $(A - \lambda_k E) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$ и

всички ненулеви решения са собствени вектори за λ_k .

16 Нека λ_0 е собствена стойност за φ .

$U_{\lambda_0} = \{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda_0 v\}$ е линейно подпространство на V .

Докажете, че $a, b \in U_{\lambda_0}$

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha \varphi(a) + \beta \varphi(b) = \alpha \lambda_0 a + \beta \lambda_0 b = \lambda_0(\alpha a + \beta b)$$

$$\Rightarrow \alpha a + \beta b \in U_{\lambda_0}$$

Следствие 17 Ако φ е оператор $V \rightarrow V$, $\dim V = n$ и φ има n различни собствени стойности, то \exists базис на V от собствени вектори за φ . (φ има прост спекٹر)

17 Ако $\varphi: V \rightarrow V$ е лн. оп. и g_1, \dots, g_s са собствени вектори за различни собствени стойности $\lambda_1, \dots, \lambda_s$, $\lambda_i \neq \lambda_j \Rightarrow$
 $\Rightarrow g_1, \dots, g_s$ са лнз.

Док-ва: индукция по s

$$1) s = 1$$

$$g_1 \neq 0 \Rightarrow \text{лнз}$$

2) Доп. че е вярно за $s-1$ вектора

$$3) g_1, \dots, g_s \text{ - собствени и } \alpha_1 g_1 + \dots + \alpha_s g_s = 0$$

$$\varphi(\alpha_1 g_1 + \dots + \alpha_s g_s) = \varphi(0) = 0$$

$$\alpha_1 \varphi(g_1) + \dots + \alpha_s \varphi(g_s) = 0 \quad \alpha_1 g_1 + \dots + \alpha_s g_s = 0 \quad | \cdot \lambda_i \uparrow$$

$$\alpha_1 \lambda_1 g_1 + \dots + \alpha_s \lambda_s g_s = 0$$

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_s)g_1 + \dots + \alpha_{s-1}(\lambda_{s-1} - \lambda_s)g_{s-1} = 0$$

За индукционной предположение $\Rightarrow \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_s) = \dots = \alpha_{s-1}(\lambda_{s-1} - \lambda_s) = 0$
 $\lambda_1 - \lambda_s \neq 0 \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_{s-1} = 0$

$$\alpha_1 g_1 + \dots + \alpha_{s-1} g_{s-1} + \alpha_s g_s = 0 \Rightarrow \alpha_s = 0 \Rightarrow g_1, \dots, g_s \text{ с л.н.б.}$$

Сл. от Т \Rightarrow Доказательство:

$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n$ - различные собственные значения \Rightarrow

$\Rightarrow \exists g_1, \dots, g_n$ собственные векторы $\Rightarrow g_1, \dots, g_n \text{ с л.н.б.}$

$\Rightarrow g_1, \dots, g_n$ образуют базис на V .

φ -инвариантные подпространства

Пр. 1
 $\varphi: V \rightarrow V$ - линейный оператор и g - собственный вектор за φ .

$$U = \ell(g), x \in U \rightarrow \varphi(x) = \varphi(\alpha g) = \alpha \cdot \varphi(g) = \alpha \cdot \lambda \cdot g \Rightarrow$$

$$\varphi(g) = \lambda \cdot g$$

$$\Rightarrow \varphi(x) \in U$$

Д] Если $\varphi: V \rightarrow V$ - линейный оператор; $W \subset V$ - подпространство.
 W и тогда φ -инвариантно, ако $\forall x \in W \Rightarrow \varphi(x) \in W$
 $/\varphi(W) \subseteq W/$

Пример 2 } - $\text{Ker } \varphi$ и $\text{Im } \varphi$ - φ -инвариантно

- $\text{Im } \varphi = \{\varphi(x) \mid x \in V\}$ - само φ -инвариантно

$$\forall y \in \text{Im } \varphi \Rightarrow \varphi(y) \in \text{Im } \varphi$$

- λ - собственная собственность

$U_\lambda = \{x \in V: \varphi(x) = \lambda \cdot x\}$ - φ -инвариантно

W - φ -инвариантное подпространство на V

$$\forall x \in W: \varphi(x) \in W$$

$$\varphi_W: W \rightarrow W$$

Т V - конечномерно ЛТ над \mathbb{R} и $\varphi: V \rightarrow V$ - линейно изображение и $\dim V \geq 2 \Rightarrow \varphi$ имеет одномерно или двумерно φ -инвариантное подпространство на V .

Доказательство:

Базис на V - e_1, \dots, e_n

матрица на φ в этом базисе A .

$f_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ - полином с коэффициентами в \mathbb{R} .

Осн. Т. на Алг.:

\forall полином с комплексными коэффициентами имеет по крайней мере один комплексный корень

$\Rightarrow f_A(\lambda)$ имеет по крайней мере один комплексный корень λ_0 .

1) $\lambda_0 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \lambda_0$ - собственное значение

$\Rightarrow \exists v \neq 0$ - собственный вектор $\Rightarrow \exists$ φ -инвариантное 1-мерное подпространство.

2) $\lambda_0 \notin \mathbb{R}, \lambda_0 \in \mathbb{C}$

Рассмотрим \bar{V} - мин. пр-во над \mathbb{C} ; $\dim_{\mathbb{C}} \bar{V} = \dim_{\mathbb{R}} V = n$

$$V \subset \bar{V} \quad \bar{\varphi}: \bar{V} \rightarrow \bar{V}$$

$\bar{\varphi}$ - мин. оп. с матрицей A .

$$f_{\bar{\varphi}}(\lambda) = f_{\varphi}(\lambda) \rightarrow \text{корень } \lambda_0 \in \mathbb{C} : f_{\bar{\varphi}}(\lambda_0) = 0$$

$$\Rightarrow \exists g \in \bar{V} : \bar{\varphi}(g) = \lambda_0 g$$

$$g = (\alpha_1 + i\beta_1)e_1 + \dots + (\alpha_n + i\beta_n)e_n = \underbrace{\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n}_a + i \underbrace{(\beta_1 e_1 + \dots + \beta_n e_n)}_b = a + ib, \text{ где } a \text{ и } b \text{ — л. с. } \mathbb{R} \text{ коэф.}$$

$$\lambda_0 = \mu + i\nu$$

$$\bar{\varphi}(g) = \lambda_0 g$$

$$\varphi(a + ib) = \bar{\varphi}(a) + i\bar{\varphi}(b) = a(\mu + i\nu) + ib(\mu + i\nu)$$