

$e_1, \dots, e_n$  (e) базис

$f_1, \dots, f_n$  (f) базис

$$f_1 = \tau_{11} e_1 + \tau_{21} e_2 + \dots + \tau_{n1} e_n$$

⋮

$$f_n = \tau_{1n} e_1 + \tau_{2n} e_2 + \dots + \tau_{nn} e_n$$

$$T = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \dots & \tau_{1n} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \dots & \tau_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \dots & \tau_{nn} \end{pmatrix}$$

матрица  $\pi$  перехода  
от базиса (e)  $\rightarrow$  (f)

$$x = d_1 e_1 + d_2 e_2 + \dots + d_n e_n$$

$$x = \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \dots + \beta_n f_n =$$

$$= \beta_1 (\tau_{11} e_1 + \tau_{21} e_2 + \dots + \tau_{n1} e_n) +$$

$$+ \beta_2 (\tau_{12} e_1 + \tau_{22} e_2 + \dots + \tau_{n2} e_n) +$$

$$+ \dots +$$

$$+ \beta_n (\tau_{1n} e_1 + \tau_{2n} e_2 + \dots + \tau_{nn} e_n) =$$

$$= \underbrace{(\beta_1 \tau_{11} + \beta_2 \tau_{12} + \dots + \beta_n \tau_{1n})}_{d_1} e_1 +$$

$$\underbrace{(\beta_1 \tau_{21} + \beta_2 \tau_{22} + \dots + \beta_n \tau_{2n})}_{d_2} e_2 +$$

$$\underbrace{(\beta_1 \tau_{n1} + \beta_2 \tau_{n2} + \dots + \beta_n \tau_{nn})}_{d_n} e_n$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$$

Th. //  $\mathbb{A}^n$  (e) базис  
(f) базис матрица на перехода

$$T = T_{e \rightarrow f}$$

$$\alpha = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$$

$$\alpha = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_m e_m$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$$

$V = e_1 \dots e_n$  - базис  $(e)$   
 $f_1 \dots f_n$  - базис  $(f)$   $f_i = \tau_{i1}e_1 + \tau_{i2}e_2 + \dots + \tau_{in}e_n$

$$\Rightarrow T = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \dots & \tau_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{n1} & \dots & \tau_{nn} \end{pmatrix}$$

$$x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$$

$$x = \beta_1 f_1 + \dots + \beta_n f_n$$

↑  
матрица на преход.

$T$  (или преходна матрица)

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \rightarrow \text{следователно} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \text{ т.е. } T_{f \leftarrow e} = T^{-1}$$

1) Нека  $A, B \in M_{n \times n}$ , за които  $A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  за  $\forall$  вектор  $(x_1, \dots, x_n) \in F^n \Rightarrow A = B$ .

$$A = (a_{ij})$$

$$B = (b_{ij})$$

Доказателство

$$x_1, \dots, x_n = (1, 0, 0, \dots, 0) \Rightarrow A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}; B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix}; B \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{pmatrix} \Rightarrow A = B$$

където  $k$

за  $\forall k$

всяка стълб на  $A$  = всяка стълб на  $B$

[T] Нека  $\varphi: V \rightarrow V$  е линеен оператор.  $(\epsilon)$  - базис на  $V$   
 $T = T_{\epsilon \rightarrow \varphi}$ . А е матрицата на  $\varphi$  в базис  $(\epsilon)$  а  $B$  - в базис  $(\varphi)$ .  $\Rightarrow B = T^{-1}AT$

Доказателство: Избираме произволно  $x \in V \rightarrow \varphi(x) \in V$ .  
 $x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$   
 $\varphi(x) = \alpha_1 \varphi(e_1) + \dots + \alpha_n \varphi(e_n)$   
 $x = \beta_1 \varphi_1 + \dots + \beta_n \varphi_n$   
 $\varphi(x) = \beta_1 \varphi(\varphi_1) + \dots + \beta_n \varphi(\varphi_n)$

$$\begin{aligned} \alpha &= T \cdot \beta \\ \xi &= A \cdot \alpha = A \cdot T \cdot \beta \\ \eta &= T^{-1} \xi = T^{-1} \cdot A \cdot T \cdot \beta = B \cdot \beta \end{aligned}$$

$$B \cdot \beta = T^{-1} \cdot A \cdot T \cdot \beta \text{ за } \forall \beta \in F^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = T^{-1} \cdot A \cdot T$$

[D] 2 квадратни матрици  $A, B$  от 1 ред се наричат подобни, ако  $\exists T$  - необратима:  $B = T^{-1}AT \rightarrow \underline{A \sim B}$

Свойство:  $A$  е подобна на  $B \Leftrightarrow$  са матрици на 1 оператор в различни базиси.

Доказателство:  $\Leftarrow$  и  $\Rightarrow$  по  $T$

$\Rightarrow$  Фиксиране  $T$ -обратната  $\Rightarrow$  фиксиране  $(\epsilon)$ -базис на  $F$ .  
 $\rightarrow$  съответствието на  $T$  са  $A \# B \Leftrightarrow$  задават друг базис  $(\varphi)$

$$\Rightarrow T = T_{\epsilon \rightarrow \varphi}. \varphi: F^n \rightarrow F^n \rightarrow \varphi(x) = A \cdot x$$

$\Rightarrow \varphi$  в първия базис има матрица, а в другия базис  $- T^{-1} \cdot A \cdot T = B$ .

Свойство 2: Репарация на эквивалентности  
 $\nabla$  Доб-во

$$1) A \sim A \rightarrow A = E^{-1} A E$$

$$2) A \sim B \Rightarrow B \sim A$$

$$B \cdot T^{-1} A T \rightarrow A = T \cdot B \cdot T^{-1} = (T^{-1})^{-1} B (T^{-1})$$

3)  $A \sim B$  u  $B \sim C \Rightarrow A \sim C$

$$B = T^{-1} \cdot A \cdot T$$

$$C = L^{-1} B L = L^{-1} (T^{-1} A T) L = (TL)^{-1} A TL$$

Corollario 3:  $A \sim B \Rightarrow \det A = \det B$   
Dimo:

$$\det(B) = \det(T^{-1}AT) = \det(T^{-1}) \det(A) \det T = \frac{1}{\det T} \det A \det T = \det A$$

$A$  - квадратная;  $A = (a_{ij})$

$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} = P_A(\lambda)$$

↑  
характеристический

характеристичен

попыткой  $\#a \nrightarrow \nabla$  или сменой  $n$ .

$$1) \deg f_A(\lambda) = n$$

2) Коэф. пред  $\lambda^n \in (-1)^n$

~~3) Коэф~~

Ако при разв. на дет. ето обичаено има  $n-1$  еп, които са с  $n$  и. Диагонал, то  $n$  ~~е~~ <sup>посл.</sup> еп. Където ще бъде с  $n$  главния диагонал.

3) воеф. пред  $\lambda^{n-1}$  е ненулева сума  $(a_{11}-1) \dots (a_{nn}-1) \neq 0$

$$\Rightarrow (-1)^{n-1} (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn})$$

снѣга

сметер

Гуайта на ел. по гр. Иог.

2

4) свободными коэф на  $f_A(\lambda) \in \lambda \det(A)$   
при  $\lambda = 0$ .

$$\boxed{T} A \sim B \Rightarrow f_A(X) = f_B(X)$$

Dakota on auto.

$$\begin{aligned} f_B(\lambda) &= \det(B - \lambda E) = \det(T^{-1}AT - \lambda E) \\ &= \det(T^{-1}AT - \lambda T^{-1}ET) = \det(T^{-1}(A - \lambda E) \cdot T) = \\ &= \det T^{-1} \det(A - \lambda E) \det T = \frac{1}{\det T} \cdot \det(A - \lambda E) \det T = \\ &= \det(A - \lambda E) = f_A(\lambda) \end{aligned}$$

1 A - - 0 - Q. 1 -