

Линейные изображения

Опр. 1 (Линейно изобр.)

Нека V_1 и V_2 са лн. пр-ва над F .

Изображението $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$ е линейно, ако

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$$

$$\varphi(\lambda a) = \lambda \varphi(a)$$

$$\forall a, b \in V_1, \forall \lambda \in F$$

Примери: ① $V_1 = F^n, V_2 = F^k, k < n$

$$\varphi: V_1 \rightarrow V_2$$

$$\varphi(a_1, \dots, a_n) = (a_1, a_2, \dots, a_k)$$

② $f: V \rightarrow F$ линейна ϕ -с

$$f(a+b) = f(a) + f(b)$$

$$f(\lambda a) = \lambda f(a)$$

F е лн. пр-ва над F

③ $\varphi: V \rightarrow V$

$\varphi(a) = 0$ - нулевото изображение

④ $\varphi: V \rightarrow V$

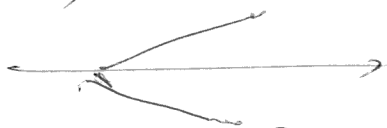
$$\varphi(a) = \lambda a$$

— линейни оператори,
когато $V_1 = V_2$



ротацията около фикс. точка е мин. изобр.

⑥ осева симетрия е мин. изобр.



⑦ трансляцията не е мин. изобр. ~~освен ако~~ $c \neq 0$

$$\tau(a) = a + c$$

$$\tau(a+b) = a+b+c$$

$$\tau(a) + \tau(b) = a+c + b+c$$

$$\text{id} : V \rightarrow V$$

$$\text{id}(x) = x$$

$$d(f) = f'$$

$$d(f+g) = (f+g)' = f' + g' = d(f) + d(g)$$

$$d(cf) = cd(f)$$

Нека $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$ е линейно

$$1) \varphi(0) = 0$$

$$\varphi(0) = \varphi(0 \cdot 0) = 0 \cdot \varphi(0) = 0$$

$$2) \varphi(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_s a_s) = \lambda_1 \varphi(a_1) + \lambda_2 \varphi(a_2) + \dots + \lambda_s \varphi(a_s)$$

$$3) e_1, \dots, e_n \text{ базис на } V_1$$

$$x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n \Rightarrow \varphi(x) = \alpha_1 \varphi(e_1) + \dots + \alpha_n \varphi(e_n)$$

Th. Ако $\dim V_1 = n$ и e_1, \dots, e_n базис на V_1 ,
и $b_1, \dots, b_n \in V_2$, тогава $\exists!$ линейно
изобр. $\varphi: V_1 \rightarrow V_2: \varphi(e_i) = b_i, i = 1, \dots, n$.

Док-во:

$$\exists) \text{ Нека } x \in V_1, x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$$

$$\text{Опр. } \varphi(x) = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n \in V_2$$

$$\text{Ако } y = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_n e_n \Rightarrow \varphi(y) = \beta_1 b_1 + \dots + \beta_n b_n$$

$$\begin{aligned}\varphi(x+y) &= \varphi((\alpha_1 + \beta_1)e_1 + \dots + (\alpha_n + \beta_n)e_n) = \\ &= (\alpha_1 + \beta_1)b_1 + \dots + (\alpha_n + \beta_n)b_n = \varphi(x) + \varphi(y)\end{aligned}$$

-10-

$$\textcircled{Q} \varphi(\lambda x) = \lambda \alpha_1 b_1 + \dots + \lambda \alpha_n b_n = \lambda \varphi(x)$$

$\Rightarrow \varphi: V_1 \rightarrow V_2$ е линейно $\varphi(e_i) = b_i$

$$\begin{aligned}!)& \text{ Гледа } \varphi: V_1 \rightarrow V_2 \\ & \varphi: V_1 \rightarrow V_3\end{aligned}$$

$$\varphi(e_i) = \psi(e_i) = b_i$$

$$x \in V_1, x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$$

$$\varphi(x) = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$$

$$\psi(x) = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = \psi(x), \forall x \in V_1$$

$$\Rightarrow \varphi = \psi$$

Опр. V_1 е изоморфно на V_2 ($V_1 \cong V_2$), когато
 $\exists \varphi: V_1 \rightarrow V_2$ линейно изображение, което е
 биекция.

Тл. ~~Th.~~ Крайномерните V_1 и V_2 ,
 $V_1 \cong V_2 \Leftrightarrow \dim V_1 = \dim V_2$.

Зок-лос

$$\Rightarrow V_1 \cong V_2 \Rightarrow \exists \varphi: V_1 \rightarrow V_2 \quad (\text{изоморфизм})$$

Нека e_1, \dots, e_n - базис на V_1

$$\varphi(e_i) = b_i, \quad \underline{i=1, \dots, n} \quad i=1, \dots, n$$

Нека $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in F: \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n = 0$

$$\lambda_1 \varphi(e_1) + \dots + \lambda_n \varphi(e_n) = 0$$

$$\varphi(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) = 0 = \varphi(0)$$

$$\varphi \in \text{линейна} \Rightarrow x = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$$

$$\Rightarrow b_1, \dots, b_n \text{ са л.б.}$$

$$y \in V_2 \quad \varphi \in \text{линейна}$$

$$\Rightarrow \exists x \in V_1: \varphi(x) = y$$

$$x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$$

$$\varphi(x) = y = \alpha_1 \varphi(e_1) + \dots + \alpha_n \varphi(e_n) =$$

$$= \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$$

$$y \in \ell(b_1, \dots, b_n) \Rightarrow V_2 \subset \ell(b_1, \dots, b_n)$$

$$\Rightarrow b_1, \dots, b_n \text{ базис на } V_2; \dim V_2 = n$$

⇐ Пусть $\dim V_1 = \dim V_2 = n$.

e_1, \dots, e_n - базис на V_1

b_1, \dots, b_n - базис на V_2

⇒ ∃ линейно изобр.

$$\varphi: V_1 \rightarrow V_2$$

$$\varphi(e_i) = b_i, \quad i = 1, \dots, n$$

∇ φ - биекция?

$$z \in V_2: z = \gamma_1 b_1 + \dots + \gamma_n b_n = \varphi(\gamma_1 e_1 + \dots + \gamma_n e_n)$$

⇒ φ сюръекция

Пусть $x_1 \neq x_2 \in V_1$

$$x_1 = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$$

$$\Rightarrow (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq (\beta_1, \dots, \beta_n)$$

$$x_2 = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_n e_n$$

$$\varphi(x_1) = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$$

$$\varphi(x_2) = \beta_1 b_1 + \dots + \beta_n b_n$$

b_1, \dots, b_n базис

⇒ $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$ инъекция

⇒ φ биекция

⇒ изоморфизм

~~Определение~~ ~~Здрото и образ. Ранг и дефект.~~

Опр: $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$ линейно

$\text{Im } \varphi = \{ \varphi(x) \mid x \in V_1 \} \subset V_2$ - образ на φ

$$\text{Im } \varphi = \varphi(V_1)$$

$\text{Ker}(\varphi) = \{ x \in V_1 \mid \varphi(x) = 0 \} \subset V_1$ - здро

здното е подр-во на V_1 , образа е подр-во на V_2

1) $\text{Ker}(\varphi)$ подр-во на V_1

~~Опр:~~ $\text{Im}(\varphi)$ — на V_2

$$a, b \in \text{Im } \varphi \Rightarrow a = \varphi(x); b = \varphi(y)$$

$$\lambda a + \mu b = \varphi(\lambda x + \mu y) \in \text{Im } \varphi$$

Опр: $\dim \text{Ker } \varphi = d(\varphi)$ - дефект на φ

$\dim \text{Im } \varphi = r(\varphi)$ - ранг на φ

Пр: $\pi: F^n \rightarrow F^k \quad (k \leq n)$

$$\pi(a_1, \dots, a_n) = (a_1, \dots, a_k)$$

$$\text{Im } \pi = F^k \quad (a_1, \dots, a_k) = \pi(a_1, \dots, a_k, 0, \dots, 0)$$

$$\text{Ker } \pi = \{ \underbrace{(0, 0, 0, \dots, 0)}_k, a_{k+1}, \dots, a_n \} / a_i \in F \}$$

$$d(\pi) = n - k;$$

$$r(\varphi) = k;$$

$$\mathbb{R}^n[x] = \{ f(x) \mid f(x) \text{ многочл. ст. степеней } \leq n \}$$

$d: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — линейн

$$\text{Im } d = \mathbb{R}^{n-1}[x] \subset \mathbb{R}^n[x]$$

$$\text{Ker } d = \{ c \mid c - \text{const.} \}$$

$1, x, x^2, \dots, x^n$ базис по \mathbb{R}^n

$$\dim \text{Im} = r(d) = n$$

$$\dim \text{Ker} = 1$$

~~dim Ker~~

Th. 1 (Ранг и дефект)

Если $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$ — л. изобр. и $\dim V_1$

с.с., тогда $r(\varphi) + d(\varphi) = \dim V_1$

Теорема за ранга и дефекта на линейно изображение на крайномерно пространство.

Ако U е крайномерно пространство и $\varphi: U \rightarrow V$ е линейно изображение, то $\text{rk}(\varphi) + \text{def}(\varphi) = \dim U$, където $\text{rk}(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \dim \text{Im } \varphi$ е рангът на φ , а $\text{def}(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \dim \text{Ker } \varphi$ е дефектът на φ .

Доказателство:

Избираме базис e_1, \dots, e_d , $d := d(\varphi)$ на ядрото $\text{Ker } \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in U \mid \varphi(u) = 0_V\}$. Допълваме го до базис $e_1, \dots, e_d, e_{d+1}, \dots, e_n$ на U с $\dim U = n$.

Достатъчно е да проверим, че $\varphi(e_{d+1}), \dots, \varphi(e_n)$ е базис на образа $\text{Im } \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi(u) \in V \mid u \in U\}$, защото тогава $\text{rk}(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \dim \text{Im } \varphi = n - d = n - d(\varphi) = \dim U - d(\varphi)$. От $\varphi(e_{d+1}), \dots, \varphi(e_n) \in \text{Im } \varphi$.

Следва, че $\ell(\varphi(e_{d+1}), \dots, \varphi(e_n)) \subseteq \text{Im } \varphi$, защото $\text{Im } \varphi$ е подпространство на V .

Всеки вектор $v \in \text{Im } \varphi$ е от вида $v = \varphi(u)$ за $u \in U$. По-точно e_1, \dots, e_n е базис на U , имаме $u = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, откъдето $v = \varphi(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) =$

$$= \lambda_1 Y(e_1) + \dots + \lambda_d Y(e_d) + \lambda_{d+1} Y(e_{d+1}) + \dots + \lambda_n Y(e_n) =$$

$$= \lambda_1 0_V + \dots + \lambda_d 0_V + \lambda_{d+1} Y(e_{d+1}) + \dots + \lambda_n Y(e_n) =$$

$$= \lambda_{d+1} Y(e_{d+1}) + \dots + \lambda_n Y(e_n) \in \ell(Y(e_{d+1}), \dots, Y(e_n)).$$

Това доказва $\text{Im } Y \subseteq \ell(Y(e_{d+1}), \dots, Y(e_n))$ и $\text{Im } Y = \ell(Y(e_{d+1}), \dots, Y(e_n))$.

Ако $0_V = \lambda_{d+1} Y(e_{d+1}) + \dots + \lambda_n Y(e_n) \neq Y(\lambda_{d+1} e_{d+1} + \dots + \lambda_n e_n)$, то $u_0 = \lambda_{d+1} e_{d+1} + \dots + \lambda_n e_n \in \text{Ker } Y$. Следователно $u_0 = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_d e_d$, откъдето $\sum_{i=1}^d \lambda_i e_i + \sum_{i=d+1}^n (-\lambda_i) e_i = 0_V$.

Сла линейната независимост на базиса e_1, \dots, e_n на U изисква $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ и доказва линейната независимост на $Y(e_{d+1}), \dots, Y(e_n)$.

Това завършва проверката на факта, че $Y(e_{d+1}), \dots, Y(e_n)$ е базис на $\text{Im } Y$. Q.E.D.

✓ Изображение $Y: U \rightarrow V$ задава рел. на еквивалентност в U , $u_1 \sim u_2 \Leftrightarrow Y(u_1) = Y(u_2)$, $Y: U \rightarrow V$ съоставя на $u \in U$ неговия клас на еквивалентност $\Rightarrow \text{Im } Y = Y(V)$ може да се отождестви с множеството на класовете на еквивалентност

връх u .

Нека $\varphi: U \rightarrow V$ е линейно изображение. Тогава за $\forall u \in U$ класът на еквивалентност на u е

$$\varphi^{-1}(\varphi(u)) := \{a \in U \mid \varphi(a) = \varphi(u)\} = \{a \in U \mid \varphi(a-u) =$$

$$= 0_V\} = \{a \in U \mid \underbrace{a-u}_{x} \in \text{Ker } \varphi\} = \underbrace{u}_{x} + \text{Ker } \varphi = \{u + x \mid$$

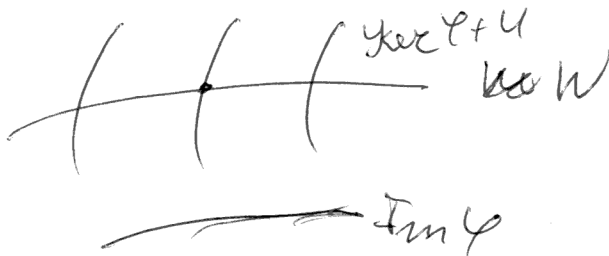
$x \in \text{Ker } \varphi\} = \text{транслацията на } \text{Ker } \varphi \text{ чрез } u.$

Оттук, $\varphi: U \rightarrow \text{Im } \varphi$ разбива U в непересичащо се обединение $U = \coprod_{\text{некои } u \in U} \varphi^{-1}(\varphi(u))$ или $U = \bigcup_{u \in U} \varphi^{-1}(\varphi(u))$

$\Rightarrow U = \bigcup_{u \in U} u + \text{Ker } \varphi$ е обединение на транслации

на $\text{Ker } \varphi$. В доказателството на теоремата за $\text{rk}(\varphi)$ & $\dim(\varphi)$ установихме, че \exists подпространство

$W := \ell(e_{n+1}, \dots, e_n)$, така че $\varphi: W \rightarrow \text{Im } \varphi$ е линейн изоморфизъм. Представянето на U като фамилия от транслации на $\text{Ker } \varphi$, параметризирана с $\text{Im } \varphi$ дава представяне на U като фамилия от транслации на $\text{Ker } \varphi$, параметризирана с $W \subseteq U$.



Пример: Гледа $A = (a_1 \dots a_n) \in M_{m \times n}(F)$ е матрица с вектор-столбове $a_1, \dots, a_n \in M_{m \times 1}(F)$.

Тогава $\varphi_A: M_{n \times 1}(F) \rightarrow M_{m \times 1}(F)$, $\varphi_A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 a_1 + \dots + x_n a_n \in M_{m \times 1}(F)$ е линейно изображение

$$\begin{aligned} \varphi_A(\alpha x + \beta y) &= \sum_{i=1}^n (\alpha x_i + \beta y_i) a_i = \sum_{i=1}^n \alpha x_i a_i + \sum_{i=1}^n \beta y_i a_i = \\ &= \alpha \left(\sum_{i=1}^n x_i a_i \right) + \beta \left(\sum_{i=1}^n y_i a_i \right) = \alpha \varphi_A(x) + \beta \varphi_A(y) \end{aligned}$$

$$= \alpha \varphi_A(x) + \beta \varphi_A(y).$$

$$\varphi_A(\alpha x + \beta y) = \alpha \varphi_A(x) + \beta \varphi_A(y)$$

$\text{Ker } \varphi_A = \{ x \in M_{n \times 1}(F) \mid x \text{ е решение на хомогенната система с матрица } A \}.$

$x_1 a_1 + \dots + x_n a_n = b = 0_{m \times 1} \Leftrightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ е реш. на хомогенната система с коэф. A .

$$(A|b) \quad x \in \left\{ \begin{array}{l} x_1 a_1 + \dots + x_n a_n = b = 0_{m \times 1} \quad 1 \leq i \leq m. \\ \text{множество от решения} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \underline{x_1 a_1 + \dots + x_n a_n = b_i}$$

$$\text{Im } \varphi = \ell(a_1, \dots, a_n) \quad \text{rk } \varphi = \dim \ell(a_1, \dots, a_n) = \text{rk } A.$$

$d(\varphi) = \dim \text{Ker } \varphi = \dim$ прост рансово \sum от решения на хом. с-на с матрица A .

Th. за $\text{rk}(\varphi)$ & $d(\varphi)$

$$\text{rk}(\varphi) + d(\varphi) = n = \dim M_{n \times 1}(F) \Leftrightarrow \text{rk} A + \dim S_0 = n$$

Th. за размерността
на пр-вото от рещ.
 S_0 на хом. лнн. система
с матрица A .