

Ср. 1 |  $\det$  е линейна, антисиметрична и нормирана функция на стълбовете.

Ср. 2 | Всички св-ва на  $\det$ , които важат за редове, важат и за стълбове.

Функционални множества. Формули на Крамер и др.

Th. Ако  $\det$  е в  $\Delta$ -образен вид

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$$

Лема:  $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} = \Delta_{nn} \cdot a_{nn}$

$$\det A = \sum_{i_1, \dots, i_n} (-1)^{[i_1, \dots, i_n]} a_{1i_1} \dots a_{ni_n} = \sum_{i_n \neq n} (-1)^{[i_1, \dots, i_{n-1}, i_n]} a_{1i_1} \dots a_{n-1, i_{n-1}} a_{nn} =$$

$i_n \neq n$

$$= \left( \sum_{i_1, \dots, i_{n-1}} (-1)^{[i_1, \dots, i_{n-1}]} a_{1i_1} \dots a_{n-1, i_{n-1}} \right) \cdot a_{nn}$$

Опр:  $\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$

$\Delta_{ij} = \begin{vmatrix} \Delta_1 & \Delta_2 \\ \Delta_3 & \Delta_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$

и определителя

Лема 2: ~~то~~

$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}$

Док-во:

$\Delta = (-1)^{n-i} \det(a_1, \dots, a_{i-1}, \overbrace{a_{i+1}, \dots, a_n}^{n-1+n-j}, a_i) = (-1)^{n-1+n-j} \cdot$

$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}$

Опр:  $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$

Разложение на  $\det$  по стр.

Th. 1 Если  $A = (a_{ij})_{n \times n}$

$$\det A = a_{k1} A_{k1} + a_{k2} A_{k2} + \dots + a_{kn} A_{kn}$$

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}$$

Dok-vo:

$$A = (a_{ij})_{n \times n}$$

$$a_k = (a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn}) = \underbrace{(a_{k1}, 0, 0, \dots, 0)}_{b_1} + \underbrace{(0, a_{k2}, 0, \dots, 0)}_{b_2} + \dots + \underbrace{(0, 0, \dots, 0, a_{kn})}_{b_n}$$

$$\det A = \det(a_1, \dots, a_k, \dots, a_n) = \det(a_1, \dots, \text{or нормальность}$$

$$\underbrace{b_1 + b_2 + \dots + b_n}_{a_k}, \dots, a_n) = \det(a_1, \dots, b_1, \dots, a_n) +$$

$$+ \det(a_1, \dots, b_2, \dots, a_n) + \dots + \det(a_1, \dots,$$

$$b_n, \dots, a_n) = a_{k1} (-1)^{k+1} A_{k1} + a_{k2} (-1)^{k+2} A_{k2} + \dots +$$

$$+ a_{kn} (-1)^{k+n} A_{kn} = a_{k1} A_{k1} + a_{k2} A_{k2} + \dots + a_{kn} A_{kn}$$

Q.E.D.

$\det$  от  $n$ -ти  $\text{ред}$  и представлено  $\text{через}$   $n$   $\det$  от  $n-1$   $\text{ред}$ .

Упр.1

~~развиване по 1-ви ред~~

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{11} + 2 \cdot A_{12} + 3 \cdot A_{13} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} +$$

$$+ 3 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

~~развиване по 2-ри ред~~

$$A = 4 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} + 5 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} +$$

$$+ 6 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

Сл.1 ~~дет~~  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  развиване по стоец  $j$

$$\det A = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \dots + a_{nj} A_{nj}$$

$\rightarrow$  развиване по 3-ти стоец

$$A = 3 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} + 6 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} +$$

$$+ 10 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$A = \overset{x_1}{a_{k1}} A_{k1} + \overset{x_2}{a_{k2}} A_{k2} + \dots + \overset{x_n}{a_{kn}} A_{kn} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \textcircled{x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n} & & \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} -1 \\ \vdots \\ k \\ \vdots \\ -1 \end{matrix}$$

$$a_{s1} A_{k1} + a_{s2} A_{k2} + \dots + a_{sn} A_{kn} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ a_{s1} \ a_{s2} \ \dots \ a_{sn} \\ \vdots \\ a_{s1} \ a_{s2} \ \dots \ a_{sn} \\ \vdots \end{pmatrix} = 0$$

Th. (Фанниново развитие)  $\neq$  по  $\text{per}$  ед. от s-ти  
 $\text{per}$  са утвърдени с до адюнг. кон. на k-ти  
 $\text{per}$  :  $\dots = 0$  за s

пер са уапопелли с до адютнт. кол. на к-ти  
пер :

neg

$$a_{s1} A_{k1} + a_{s2} A_{k2} + \dots + a_{sn} A_{kn} = 0, \text{ za } s \neq k$$

Сп:1 (формулы разбить по столб.)

$$a_{1s} A_{1k} + a_{2s} A_{2k} + \dots + a_{ns} A_{nk} = 0, \quad \exists a \ s \neq k$$

(Втория индекс се задава от пермут.)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{[1,2]} a_{11} a_{22} + (-1)^{[2,1]} a_{12} a_{21} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$A = 4(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} + 5(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} + 6(-1)^{5+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= -4(-4) + 5(-11) + 6(1)(-6) = 16 - 55 + 36 = -3$$

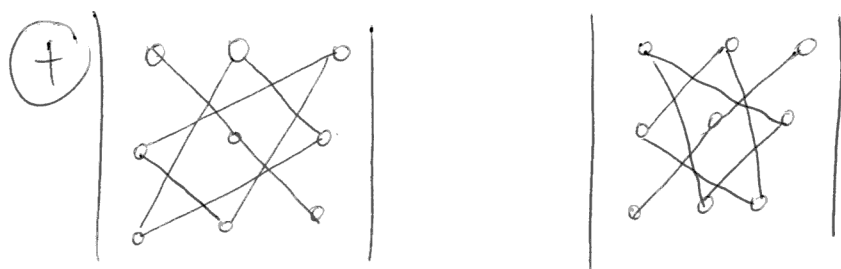
123 123  
342 132

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33})$$

$$[123] = 0 \quad [132] = 1$$

$$[231] = 2 \quad [321] = 3$$

$$[312] = 2 \quad [213] = 1$$



правилно на саглас - тово  
 правилно е само за ред 3  
 и поробно правилно 48 мога за  
 по-висок ред.

Уконтролно: 12h в 325.

02.12.2014

## Алгебра - 1-лекция

- 1 -

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad \begin{matrix} A - \text{матрица на системата} \\ A_{ij} - \text{агюнирани количества} \end{matrix}$$

Системата ще има единствено решение  $\Leftrightarrow$  ранга на матрицата на системата  $= n \Leftrightarrow \det \neq 0$  (различна от нула).

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = a_{1k} A_{1k} + a_{2k} A_{2k} + \dots + a_{nk} A_{nk}$$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$$

$$\begin{aligned} & \det A = A \quad a_{1s} A_{1k} + a_{2s} A_{2k} + \dots + a_{ns} A_{nk} = 0 \quad (s \neq k) \\ & (a_{11} A_{11} + a_{21} A_{21} + \dots + a_{n1} A_{n1}) x_1 + (a_{12} A_{11} + a_{22} A_{21} + \dots + a_{n2} A_{n1}) x_2 + \\ & + \dots + (a_{1n} A_{11} + a_{2n} A_{21} + \dots + a_{nn} A_{n1}) x_n = \underbrace{b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + \dots + b_n A_{n1}}_{\Delta_1} \end{aligned}$$

$$A x = \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\text{Където } \Delta \neq 0 : x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$$

$$\begin{aligned} & (a_{11} A_{12} + a_{21} A_{22} + \dots + a_{n1} A_{n2}) x_1 + (a_{12} A_{12} + a_{22} A_{22} + \dots + a_{n2} A_{n2}) x_2 + \\ & + \dots + (a_{1n} A_{12} + a_{2n} A_{22} + \dots + a_{nn} A_{n2}) x_n = \end{aligned}$$

$$= b_1 A_{12} + \dots + b_n A_{n2} = \Delta x_2$$

$$\Delta x_2 = \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & b_m & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

$$\Delta x_k = \Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & \overset{k}{\downarrow} b_1 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & b_m & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

### Th. Формули на Крамер

Ако ~~линейна~~ квадратна ~~система~~ линейна система има детерминанта  $\Delta \neq 0$ , тогава единственото решение на системата е

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$



# Детерминанта на Вандермонд

$$W(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \text{операции} \\ \text{по строкам} \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2^{n-2} - a_1 a_2^{n-3} & \dots & a_n^{n-2} - a_1 a_n^{n-3} \\ 0 & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & \dots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{21} + \dots + 0 \cdot A_{n1} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \\ a_2(a_2 - a_1) & \dots & a_n(a_n - a_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2^{n-3}(a_2 - a_1) & \dots & a_n^{n-3}(a_n - a_1) \\ a_2^{n-2}(a_2 - a_1) & \dots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix} = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_n - a_1) \cdot$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2^{n-3} & \dots & a_n^{n-3} \\ a_2^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow W(a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_n - a_1) W(a_2, \dots, a_n) =$$

$$\rightarrow W(a_2, \dots, a_n)$$

$$= \left( \prod_{i=2}^n (a_i - a_1) \right) (a_3 - a_2) \dots (a_n - a_2) W(a_3, \dots, a_n) =$$

$$= \dots = \prod_{\substack{j < n-1 \\ i > j}} (a_i - a_j) W(a_{n-1}, a_n) = \prod_{i > j} (a_i - a_j) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}$$

Равна на нула  $\Leftrightarrow$  има равни  $a$ -то, различни от нула  $\Leftrightarrow \forall a$  е различно от кое да друго  $a$  от параметрите.

$$A_{n \times k} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix}$$

$$\kappa(A) = \kappa$$

$\kappa$  реда  $i_1, i_2, \dots, i_\kappa$  са ЛНЗ

$$A' = \begin{pmatrix} a_{i_1 1} & a_{i_1 2} & \dots & a_{i_1 k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_\kappa 1} & a_{i_\kappa 2} & \dots & a_{i_\kappa k} \end{pmatrix}, \kappa(A') = \kappa$$

$j_1, j_2, \dots, j_\kappa$  ЛНЗ ст.

$$A'' = \begin{pmatrix} a_{ij_1} & a_{ij_2} & \dots & a_{ij_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \dots & a_{i_1 j_r} \end{pmatrix} \quad \det(A) \neq 0$$

Def. Минор от ред  $k$  на матрицата  $A$  е поддетерминанта на матрицата  $A$

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \dots & a_{i_1 j_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_k j_1} & \dots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix}$$

Ако  $r(A) = r \Rightarrow \exists$  ненулев минор на  $A$  от ред  $r$  и всеки минор от ред  $r+1$  е 0.

Th. Ако матрицата  $A$  има ненулев минор от ред  $r$  и всеки минор от ред  $r+1$  е 0  $\Rightarrow r(A) = r$ .

Д-во: \_\_\_\_\_

редове  $i_1, \dots, i_r$   
 стълбове  $j_1, \dots, j_r$  } минор  $A \neq 0$

$$\det B = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \dots & a_{i_1 j_r} & a_{i_1 s} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i_r j_1} & \dots & a_{i_r j_r} & a_{i_r s} \\ a_{i_{r+1} j_1} & \dots & a_{i_{r+1} j_r} & a_{i_{r+1} s} \end{vmatrix} = 0$$

$$= \underbrace{a_{ij_1}} A_{(r+1,1)} + \underbrace{a_{ij_2}} A_{(r+1,2)} + \dots + \underbrace{a_{ij_r}} A_{(r+1,r)} + \underbrace{a_{is}} A_{(r+1,r+1)} = 0$$

променлива  $i$  се менни от  $1$  до  $n$ .

$$\begin{pmatrix} a_{ji} \\ a_{ji} \\ \vdots \\ a_{ji} \end{pmatrix} A_{(r+1,1)} + \begin{pmatrix} a_{jr} \\ a_{jr} \\ \vdots \\ a_{jr} \end{pmatrix} A_{(r+1,2)} + \dots + \begin{pmatrix} a_{jr} \\ a_{jr} \\ \vdots \\ a_{jr} \end{pmatrix} A_{(r+1,r)} +$$

$$+ \begin{pmatrix} a_{rs} \\ a_{rs} \\ \vdots \\ a_{rs} \end{pmatrix} A_{(r+1,r+1)} = 0$$

столбците на  $A$  са  $c_1, \dots, c_k$

$$A_{r+1,1} g_1 + \dots + A_{r+1,r} g_r + A_{rs} = 0$$

$$\Rightarrow g_1, g_r, \dots, g_r, c_s \text{ са } \perp^\perp$$

но  $g_1, \dots, g_r$  са  $\perp^\perp$  (защото  $A \neq 0$ )

$$\Rightarrow \underline{\mathcal{C}(A) = \mathcal{C}}$$