

18.11.2014

Алгебра - I - лекция

- 1 -

$$A = (a_{ij})_{n \times n}$$

$$a_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$$

$$a_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n})$$

$$\dots$$

$$a_n = (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn})$$

Опр:

$\det A = \det(a_1, a_2, \dots, a_n)$ е полимнейна, ^{на k-тия арг., ако вектора е лин. комб.} антисиметрична, ^{при сменяне на местата на два арг. \Rightarrow сменя знака} и нормирана ϕ -з на редовете a_1, \dots, a_n на A .

при единична матрица да дава ст-т 1

Полимнейна: $f: \underbrace{\mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^n \times \dots \times \mathbb{F}^n}_n \rightarrow \mathbb{F}$

$$f(a_1, \dots, \lambda a'_k + \mu a''_k, \dots, a_n) = \lambda f(a_1, \dots, a'_k, \dots, a_n) + \mu f(a_1, \dots, a''_k, \dots, a_n), \text{ за } k = \overline{1, n}$$

Th За всяко $n \in \mathbb{N}$ $\exists!$ \det (полимнейна, антисиметрична и нормирана ϕ -з) на n аргумента:

$$f: \underbrace{\mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^n \times \dots \times \mathbb{F}^n}_n \rightarrow \mathbb{F}$$

Док-во:

! единственост

f, φ изпълняват условията

e_1, \dots, e_n - стандартен базис на \mathbb{F}^n

$$a_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$$

$$\varphi = \left(\sum_{\substack{i_1, \dots, i_n \\ \text{пермутация}}} (-1)^{[i_1, \dots, i_n]} a_{i_1, 1} a_{i_2, 2} \dots a_{i_n, n} \right) \varphi(e_1, \dots, e_n)$$

$$f(a_1, \dots, a_n) = \left(\sum_{i_1, \dots, i_n} (-1)^{[i_1, \dots, i_n]} a_{i_1}, \dots, a_{i_n} \right) f(e_1, \dots, e_n)$$

$$\Rightarrow \varphi(a_1, \dots, a_n) = f(a_1, \dots, a_n) \xRightarrow{\text{also } \exists, \text{ то } \frac{1}{f} \text{ е}} \text{единствена}$$

ⓔ съществуване

$$f(a_1, \dots, a_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n} (-1)^{[i_1, \dots, i_n]} a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}$$

Дали тази функция е полинейна и антисиметрична?

$$a_k = \lambda a'_k + \mu a''_k = (\lambda a'_{k_1} + \mu a''_{k_1}, \dots, \lambda a'_{k_n} + \mu a''_{k_n})$$

$$\begin{aligned} f(a_1, \dots, \lambda a'_k + \mu a''_k, \dots, a_n) &= \sum_{i_1, \dots, i_n} (-1)^{[i_1, \dots, i_n]} a_{i_1} \dots a_{i_k} (\lambda a'_{k_{i_k}} + \mu a''_{k_{i_k}}) \dots a_{i_n} \\ &= \lambda \sum_{i_1, \dots, i_n} (-1)^{[i_1, \dots, i_n]} a_{i_1} \dots a'_{k_{i_k}} \dots a_{i_n} + \mu \sum_{i_1, \dots, i_n} (-1)^{[i_1, \dots, i_n]} a_{i_1} \dots a''_{k_{i_k}} \dots a_{i_n} \\ &= \lambda f(a_1, \dots, a'_k, \dots, a_n) + \mu f(a_1, \dots, a''_k, \dots, a_n) \end{aligned}$$

$$f(e_1, e_2, \dots, e_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n} (-1)^{[i_1, \dots, i_n]} e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_n} = \{ e_{i_1} = \{ \begin{smallmatrix} 1, i=1 \\ 0, i=0 \end{smallmatrix} \} \} =$$

$$= (-1)^{[1, 2, \dots, n]} e_{11} e_{22} e_{33} \dots e_{nn} = 1 \Rightarrow f \text{ е нормирана}$$

$$f(a_1, \dots, a_k, \dots, a_s, \dots, a_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n} (-1)^{[i_1, \dots, i_n]} a_{i_1} \dots a_{k_{i_k}} \dots a_{s_{i_s}} \dots a_{i_n}$$

$$k < s \quad a_k = a_s = b$$

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i_1, \dots, i_n} (-1)^{[i_1, \dots, i_k, \dots, i_s, \dots, i_n]} a_{i_1} \dots \overbrace{a_{k_{i_k}}^{b_{i_k}}} \dots \overbrace{a_{s_{i_s}}^{b_{i_s}}} \dots a_{i_n} \right) + \left(\sum_{i_1, \dots, i_n} (-1)^{[i_1, \dots, i_s, \dots, i_k, \dots, i_n]} a_{i_1} \dots \overbrace{a_{s_{i_s}}^{b_{i_s}}} \dots \overbrace{a_{k_{i_k}}^{b_{i_k}}} \dots a_{i_n} \right) = 0 \end{aligned}$$

Всички $n!$ събраници се разделят на двойки с размяна на ел. на k -то място с този на s -то място b

пермутацията. Сумата на всяка една такава двойка е нула \Rightarrow следователно ст-та на функцията е нула \Leftrightarrow функцията е ~~не~~ антисиметрична

$$\Rightarrow f(a_1, \dots, b, \dots, b, \dots, a_n) = 0$$

$$\det A = \sum_{\substack{i_1 \dots i_n \\ \text{перм.}}} (-1)^{[i_1 \dots i_n]} a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n}$$

Основни свойства на детерминантата

Св. 1 | Ако има един нулев ред, то $\det A = 0$
(поимичн.)

Св. 2 | Ако редът с номер k е сума:

$$\det(a_1, \dots, a_k' + a_k'', \dots, a_n) = \det(a_1, \dots, a_k', \dots, a_n) + \det(a_1, \dots, a_k'', \dots, a_n)$$

(поимичн.)

Св. 3 | Ако умножим един ред с число λ , то
тогава ст-та на \det се умножава по λ .
(поимичн.)

Св. 4 | Ако има две реда $\det A = 0$ (антисим.)

Св. 5 | Ако един ред е пропорц. на друг, то
 $\det A = 0$ (поимичн. и антисим.)

Св. 6 | Ако към един ред прибавим друг умножен с число:

$$\det(a_1, \dots, a_k + \lambda a_s, \dots, a_s, \dots, a_n) = \det(a_1, \dots, a_k, \dots, a_s, \dots, a_n) + \underbrace{\lambda \det(a_1, \dots, a_s, \dots, a_s, \dots, a_n)}_{=0}$$

get. det не се променя.

Св. 7) Ако разменим местата на два реда det си сменя знака (антисим.)

Св. 8) Ако един ред е лн. комб. на останалите:

$$0 = \begin{cases} \det(a_1, \dots, a_k, \dots, a_n) = \lambda_1 \det(a_1, \dots, a_1, \dots, a_n) + \\ + \cancel{\lambda_2 \det(a_1, \dots, a_1, \dots, a_n)} + \lambda_2 \det(a_1, \dots, a_2, \dots, a_n) + \dots + \\ + \lambda_{k-1} \det(a_1, \dots, a_{k-1}, \dots, a_n) + \lambda_k \det(a_1, \dots, \\ a_k, \dots, a_n) + \lambda_{k+1} \det(a_1, \dots, a_{k+1}, \dots, a_n) + \dots + \\ + \lambda_n \det(a_1, \dots, a_n, \dots, a_n) \end{cases}$$

$$A = (a_{ij})_{n \times n}$$

(Тб.) $\det A = 0 \Leftrightarrow$ редовете на A са лз $\Leftrightarrow r(A) < n$

Ако A - лз:

1) Ако редовете са лз $\Rightarrow \det A = 0$

2) Ако редовете са лз

$a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{F}^n$ са базис на \mathbb{F}^n

e_1, \dots, e_n се представя в координати:

$$e_i = \beta_{i1} a_1 + \beta_{i2} a_2 + \dots + \beta_{in} a_n$$

$$\det E = 1 = \det(e_1, \dots, e_n) = \det\left(\sum_i \beta_{1,i} e_i, \sum_i \beta_{2,i} e_i, \dots, \sum_i \beta_{n,i} e_i\right) = \underbrace{\left(\sum_{\substack{i_1, \dots, i_n \\ \text{пермут.}}} (-1)^{[i_1, i_2, \dots, i_n]} \beta_{1,i_1} \beta_{2,i_2} \dots \beta_{n,i_n}\right)}_B \cdot \det(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

$$1 = B \cdot \det(a_1, \dots, a_n) \Rightarrow \det(a_1, \dots, a_n) \neq 0$$

Лема:

Нека $A = (a_{ij})_{n \times n}$ и $\det(A) = \sum_{i_1, \dots, i_n} (-1)^{[i_1, \dots, i_n]} a_{1i_1} \dots a_{ni_n}$

s_1, \dots, s_n пермут. на $1, \dots, n$

t_1, \dots, t_n " " "

сбъригването:
 $a_{s_1 t_1} a_{s_2 t_2} a_{s_3 t_3} \dots a_{s_n t_n}$

участва със знак $(-1)^{[s_1, \dots, s_n] + [t_1, \dots, t_n]}$ във
 формулата за \det

З-во:

$$s_i \leftrightarrow s_j$$

$$t_i \leftrightarrow t_j$$

$$(-1)^{[s_1, \dots, s_i, \dots, s_j, \dots, s_n] + [t_1, \dots, t_i, \dots, t_j, \dots, t_n]} =$$

$$= (-1)^{[s_1, \dots, s_j, \dots, s_i, \dots, s_n] + [t_1, \dots, t_j, \dots, t_i, \dots, t_n]}$$

последователни размяствания, до

$$a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n} (-1)^{[1, 2, \dots, n] + [i_1, i_2, \dots, i_n]}$$

при промяна на реда на s-овите на всяка
 стъпка не се променя знака на $(-1)^{[s_1, \dots, s_n] + [t_1, \dots, t_n]}$,
 най-накрая не се променя знака, с който участва в \det

рассмотрим $a_{j_1 1} a_{j_2 2} \dots a_{j_n n}$ выраста с с 3Hak :

$$(-1)^{[j_1, j_2, \dots, j_n]}$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{j_1 \dots j_n} (-1)^{[j_1 \dots j_n]} a_{j_1 1} \dots a_{j_n n} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Def: $A = (a_{ij})_{k \times n}$

$$A^t = (a_{ij})_{n \times k}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{k1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(A^t)^t = A$$

Th $\det A = \det A^t$

Ср. 1 | \det е линейна, антисиметрична и нормирана функция на стълбовете.

Ср. 2 | Всички св-ва на \det , които важат за редове, важат и за стълбове.

Функциониращи количества. Формули на Крамер и др.

Th. | Ако \det е в Δ -членен вид

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$$

Лема: $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \Delta_{nn} & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} = \Delta_{nn} \cdot a_{nn}$

$$\det A = \sum_{i_1 \dots i_n} (-1)^{[i_1 \dots i_n]} a_{i_1 1} \dots a_{i_n n} = \sum_{i_1 \dots i_{n-1}} (-1)^{[i_1 \dots i_{n-1}]} a_{i_1 1} \dots a_{i_{n-1} n-1} a_{nn}$$

$i_n \neq n$
 $a_{i_n n} = 0$

$i_n \neq n$

$$= \left(\sum_{i_1 \dots i_{n-1}} (-1)^{[i_1 \dots i_{n-1}]} a_{i_1 1} \dots a_{i_{n-1} n-1} \right) \cdot a_{nn}$$