

Детерминантата е ф-я, която съпоставя ^{едно} число от ^{една} поле ~~на~~ квадратна матрица.

Полинейни и антисиметрични функции.
Изверши при пермутации.

V -мн.пр-во над F

Опр: Нека $g: V \rightarrow F$

g е линейна функция (защото аргумента е скалар), ако: $g(\alpha x + \beta y) = \alpha g(x) + \beta g(y)$
 $\forall \alpha, \beta \in F, \forall x, y \in V$
 \hookrightarrow скалари \hookrightarrow вектори

Св-ва: Нека g - линейна функция

- 1) $g(x+y) = g(x) + g(y)$;
- 2) $g(\alpha x) = \alpha g(x)$
- 3) $g(0) = 0$; $g(0) = g(0 \cdot 0) = 0 \cdot g(0) = 0$
- 4) $g(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_s a_s) = \alpha_1 g(a_1) + \alpha_2 g(a_2) + \dots + \alpha_s g(a_s)$
 $\alpha_i \in F, a_i \in V$
 \uparrow \uparrow
поле мн-во

5) ако e_1, \dots, e_n - базис на V

$x \in V, x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$

$g(x) = \alpha_1 g(e_1) + \dots + \alpha_n g(e_n)$

Ако $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, $g(e_i) = b_i \in F$

$$g(x) = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_n x_n$$

Тв. Ако $\dim V = n$, e_1, \dots, e_n - фиксиран базис на V
 b_1, b_2, \dots, b_n - произволни елементи от F ,
тогава $\exists!$ линейна ф-я $g: V \rightarrow F$
 $g(e_i) = b_i, i = 1, \dots, n$

Док - во:

$$g(x) = b_1 x_1 + \dots + b_n x_n \text{ за } x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n.$$

g - линейна ф-я ли е?

$$y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$$

$$\begin{aligned} g(\alpha x + \beta y) &= b_1(\alpha x_1 + \beta y_1) + \dots + b_n(\alpha x_n + \beta y_n) = \\ &= \alpha(b_1 x_1 + \dots + b_n x_n) + \beta(b_1 y_1 + \dots + b_n y_n) = \\ &= \alpha g(x) + \beta g(y) \end{aligned}$$

$$g(e_i) = b_i, 0 \cdot e_1 + \dots + 1 \cdot e_i + \dots + 0 \cdot e_n$$

окрежно

Нека $g(x)$ и $t(x)$ са линейни, $g, t: V \rightarrow F$

$$g(e_i) = b_i; t(e_i) = c_i$$

$$g(x) + t(x) = f(x)$$

$$\begin{aligned} \cancel{g(\alpha x + \beta y)} \quad \cancel{f(\alpha x + \beta y)} &= g(\alpha x + \beta y) + t(\alpha x + \beta y) = \\ &= \alpha g(x) + \beta g(y) + \alpha t(x) + \beta t(y) = \alpha \underbrace{(g(x) + t(x))}_{f(x)} + \beta \underbrace{(g(y) + t(y))}_{f(y)} = \\ &= \alpha f(x) + \beta f(y) \end{aligned}$$

$$f(x) = g(x) - tx \quad f(e_i) = b_i - b_i = 0$$

$$f(x) = x_1 f(e_1) + \dots + x_n f(e_n) = x_1 \cdot 0 + \dots + x_n \cdot 0 = 0$$

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \quad f(x) = g(x) - t(x) = 0$$

$$\Rightarrow g(x) = t(x)$$

Опр: Полилинейна ϕ -s

$f: \underbrace{V \times V \times \dots \times V}_k \rightarrow F$ и g е лн. по всеки аргумент.

$$\forall i \in \overline{1, k}$$

$$g(a_1, \dots, \alpha a_i + \beta b_i, \dots, a_k) =$$

$$= \alpha g(a_1, \dots, a_i, \dots, a_k) + \beta g(a_1, \dots, b_i, \dots, a_k)$$

Сл-ва: g е полилинейна

$$1) g(a_1, \dots, 0, \dots, a_k) = 0$$

Тб. e_1, \dots, e_n - базис на V

$$a_s = \alpha_{s1} e_1 + \alpha_{s2} e_2 + \dots + \alpha_{sn} e_n, \quad s = \overline{1, k}$$

$$a_s = \sum_{i=1}^n \alpha_{si} e_i$$

$$g(a_1, \dots, a_k) = g\left(\sum_{i=1}^n \alpha_{s1i} e_i, a_2, \dots, a_k\right) =$$

$$= \alpha_{11} g(e_1, a_2, \dots, a_k) + \alpha_{21} g(e_2, a_2, \dots, a_k) + \dots +$$

$$\begin{aligned}
 & + \dots + \cancel{d_{1n}} g(l_{1n}, a_2, \dots, a_k) = \sum_{i_1=1}^n d_{1i_1} g(l_{i_1}, a_2, \dots, a_k) = \\
 & = \sum_{i_1=1}^n d_{1i_1} g(l_{i_1}, \sum_{i_2=1}^n d_{2i_2} l_{i_2}, \dots, a_k) = \sum_{i_1=1}^n d_{1i_1} \left\{ \sum_{i_2=1}^n d_{2i_2} g(l_{i_1}, l_{i_2}, a_3, \dots, a_k) \right\} \\
 & = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n d_{1i_1} d_{2i_2} g(l_{i_1}, l_{i_2}, a_3, \dots, a_k) = \dots = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_k=1}^n d_{1i_1} d_{2i_2} \dots \\
 & \dots d_{ki_k} g(l_{i_1}, l_{i_2}, \dots, l_{i_k})
 \end{aligned}$$

"Ресурси" в сайта на катедра "Алгебра" има развити лекции.

Опр: (Антисиметрична функция)

$$g: \underbrace{V \times V \times \dots \times V}_k \rightarrow F$$

е антисиметрична ф-я, ако

$\forall i, j (i \neq j)$ е изпълнено

$$g(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_k) = -g(a_1, \dots, \overset{\uparrow N=i}{a_j}, \dots, \overset{\uparrow N=j}{a_i}, \dots, a_k)$$

$$\text{и } a_i = a_j \Rightarrow g(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_k) = 0$$

До-во: _____

$$a_i = a_j = b$$

$$g(a_1, \dots, \underset{\parallel b}{a_i}, \dots, \underset{\parallel b}{a_j}, \dots, a_k) = -g(a_1, \dots, \underset{\parallel b}{a_j}, \dots, \underset{\parallel b}{a_i}, \dots, a_k)$$

$$2g(a_1, \dots, \underset{\parallel b}{b}, \dots, \underset{\parallel b}{b}, \dots, a_k) = 0 \quad [:2$$

$$\Rightarrow g(a_1, \dots, \underset{\parallel b}{b}, \dots, \underset{\parallel b}{b}, \dots, a_k) = 0$$

Тв. Ако g е полилинейна и g се андуира винаги, когато има два равни аргумента $\Rightarrow g$ е антисиметрична.

Д-во:

$$i \neq j \quad g(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_k)$$

$$g(a_1, \dots, \underset{N=i}{\overset{\uparrow}{a_i + a_j}}, \dots, \underset{N=j}{\overset{\uparrow}{a_i + a_j}}, \dots, a_k) =$$

$$= g(a_1, \dots, \underset{N=i}{\overset{\uparrow}{a_i}}, \dots, \underset{N=j}{\overset{\uparrow}{a_i + a_j}}, \dots, \underset{N=j}{\overset{\uparrow}{a_j}}, \dots, \underset{N=j}{\overset{\uparrow}{a_i + a_j}}, \dots, a_k) =$$

$$= \underbrace{g(a_1, \dots, a_i, \dots, a_i, \dots, a_k)} + g(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_k) +$$

$$+ g(a_1, \dots, a_j, \dots, a_i, \dots, a_k) + \underbrace{g(a_1, \dots, a_j, \dots, a_j, \dots, a_k)}$$

$$0 = g(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_k) + g(a_1, \dots, a_j, \dots, a_i, \dots, a_k) \Rightarrow g(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_k) = -g(a_1, \dots, a_j, \dots, a_i, \dots, a_k)$$

Тв. Нека $g: \underbrace{V \times \dots \times V}_k \rightarrow F$ е полилинейна и антисиметрична и e_1, \dots, e_n базис на V .

$$a_s = \alpha_{s1} e_1 + \dots + \alpha_{sn} e_n; \quad s = \overline{1, k}$$

$$g(a_1, \dots, a_k) = g\left(\sum_{i_1=1}^n \alpha_{1i_1} e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^n \alpha_{2i_2} e_{i_2}, \dots, \sum_{i_k=1}^n \alpha_{ki_k} e_{i_k}\right) =$$

$$= \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_k=1}^n \alpha_{1i_1} \alpha_{2i_2} \dots \alpha_{ki_k} g(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}) \overset{\substack{\rightarrow \text{свързвателите} \\ \text{скаларна}}}{=} \alpha \binom{n}{k}$$

→ махематична жигуе от антисиметричността

-6-

$$= \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_k \\ \text{са различни} \\ \text{помижду си}}} d_{i_1 i_2} \dots d_{i_{k-1} i_k} g(i_1, \dots, i_k)$$

I сл. $k > n \Rightarrow g = 0$, защото няма k различни в $\overline{1, n}$

II сл. $k = n$ (случай на детерминантата)
 i_1, \dots, i_n е пермутация на $1, \dots, n \Rightarrow$ сумата има $n!$ събрани
 рами

III сл. $k < n$

$$V_n^k = \binom{n}{k} \cdot k! = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot k! = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Нека i_1, \dots, i_n пермутация на $\overline{1, n}$

i_s и i_t са в инверсия, ако $i_s > i_t$, но $s < t$

$n=3$

$[1, 2, 3] = 0 \rightarrow [i_1, \dots, i_n]$ - общ брой инверсии

$$[1, 3, 2] = 1$$

$$[2, 1, 3] = 1$$

$$[2, 3, 1] = 2$$

$$[3, 1, 2] = 2$$

$$[3, 2, 1] = 3$$

$$[3, 2, 1] = 3$$

$$[n, n-1, \dots, 2, 1] = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

i_1, i_2, \dots, i_n

$i_2, i_1, i_3, \dots, i_n$

четна пермутация - когато има четен брой инверсии

нечетна пермутация - ————— - нечетен ————

Тв. Ако в една пермутация сменим местата на два съседни елемента, то сменя четността си.

$$\alpha = i_1, \dots, i_s, i_{s+1}, \dots, i_t, \dots, i_n$$
$$\beta = i_1, \dots, i_{s+1}, i_s, \dots, i_t, \dots, i_n$$

Двойката i_s, i_{s+1} се променя: от инверсия става ~~не~~ инверсия или от не инверсия става инверсия

i_s, i_t за $t \neq s+1$ —————
едновременно в L и R са в инверсия, или ———— не инверсия

i_{s+1}, i_t —————
" —————
 i_m, i_t —————

$\pi = \boxed{1} 2 3$
 $\pi^{-1} = 2 \boxed{1} 3$
 $\pi = 2 3 \boxed{1}$
 $\pi^{-1} = 3 \swarrow 2 \ 1$

Тв. Ако сменим местата на два елемента в пермутация, то то сменя четността си.

$$i_1 \dots i_s \dots i_t \dots i_n$$
$$i_{s+1} i_s \dots i_t \dots i_n$$
$$i_{s+1} \dots i_t i_s \dots i_n$$

нечетен брой сменни за размяна на два ел. \Rightarrow посл. пермут. е с противополож. четност на изхода

g -антисиметрична

~~i_1, \dots, i_n~~ i_1, \dots, i_n пермутация

$$g(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n}) \cdot (-1)^{[i_1, \dots, i_n]}$$

разменихме i_3 и i_4

$$\neq g(e_{i_1}, \dots, e_{i_3}, \dots, e_{i_4}, \dots, e_{i_n}) \cdot (-1)^{[i_1, \dots, i_3, \dots, i_4, \dots, i_n]} =$$

$$= (-g(e_{i_1}, \dots, e_{i_4}, \dots, e_{i_3}, \dots, e_{i_n})) \cdot (-1)^{[i_1, \dots, i_4, \dots, i_3, \dots, i_n]} =$$

$$= g(e_{i_1}, \dots, e_{i_4}, \dots, e_{i_3}, \dots, e_{i_n}) \cdot (-1)^{[i_1, \dots, i_4, \dots, i_3, \dots, i_n]} \quad \begin{array}{l} \text{(ако се} \\ \text{измени такава} \\ \text{пермутация,} \\ \text{такава се} \\ \text{га да изгуби} \\ \text{от } 1, n \end{array}$$

$$= g(e_1, e_2, \dots, e_n) \cdot (-1)^{[1, 2, \dots, n]}$$

+ 1

$$g(e_1, \dots, e_n) \cdot (-1)^{[1, 2, \dots, n]} = g(e_1, \dots, e_n)$$

$$g(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = (-1)^{[i_1, i_2, \dots, i_n]} g(e_1, \dots, e_n)$$

Th. Ако g е нормализирана и антисиметрична

ϕ -а на n аргумента и $\dim V = n$.

$$\text{Тогава } a_s = d_{s1}e_1 + \dots + d_{sn}e_n, \quad s = \overline{1, n}$$

$$g(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_n \\ \text{пермутация} \\ 1, n}} d_{i_1} d_{i_2} \dots d_{i_n} g(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n}) =$$

$$= \left\{ \sum d_{i_1} \dots d_{i_n} (-1)^{[i_1, \dots, i_n]} \right\} g(e_1, e_2, \dots, e_n)$$

A_n - множеството на всички четни пермутации

B_n - множеството на всички нечетни пермутации

$\alpha \in A_n$ сменя първите 2 ел. $\alpha' \in B_n$

$\alpha \in B_n$ ~~сменя~~ — " — $\alpha' \in A_n$

При това изобразяване "сменя на първите 2 ел." различните пермутации се раз

в различни перм. \rightarrow инекция

$$|A_n| = |B_n| = \frac{n!}{2}$$

Нека $A = (a_{ij})_{n \times n}$

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}) \\ \dots \\ a_n = (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn}) \end{array} \right\} \in F^n$$

Опр: Детерминантата на матрицата A е полиномна, антисиметрична

$$f(A), \text{ за което } f(E) = 1$$

f е ^{поли}линейна ~~антисиметрична~~ антисиметрична и нормирана ~~функция~~ на редовете на матрицата A .

$$f(A) = f(a_1, a_2, \dots, a_n) = \left(\sum_{i_1, \dots, i_n} (-1)^{[i_1, \dots, i_n]} a_{i_1 i_1} a_{i_2 i_2} \dots a_{i_n i_n} \right) \cdot \underbrace{f(e_1, e_2, \dots, e_n)}_{f(E) = 1}$$

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$$

$$e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$$

$$\dots$$

$$e_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$$

нѣма две
числа в един
ред и в един
стол

(позициѣ на
шах-мат на
дѣска, на които
както се поставят
топала нѣма да
могат да се бият)