

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} \rightarrow \left. \begin{aligned} b_1 &= (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}) \\ b_2 &= (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}) \\ &\vdots \\ b_k &= (a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn}) \end{aligned} \right\} \in F^n$$

$$\downarrow$$

$$c_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{k1} \end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{k2} \end{pmatrix}, \dots, c_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{kn} \end{pmatrix} \in F^k$$

Елементарни преобразувания по редове на една матрица:

- 1) размяна на редове
- 2) умножаване на \forall ел. от ред. с число $\neq 0$
- 3) към един ред прибавяне на др. ред

Тв. | Ако матрицата A е $k \times n$ матрица и с ел. преобр. по ред се получава матрицата B .

В сила е:

- 1) ранга на редовете на A = ранга на редовете на B
- 2) \neq $r(\text{столбовете на } A) = r(\text{столбовете на } B)$

Д-во:

- 1) редовете на A са мин. еквив. на редовете на $B \Rightarrow r(\text{редов. на } A) = r(\text{редов. на } B) \Rightarrow$

-9-

местата на редовете, умножение на ред с
число и прибавяне на един ред към друг.
 \Rightarrow множеството от решенията на сист.

(1) и (2) съвпадат.

Сист. (1) има ненулево реш. \Leftrightarrow сист. (2) има
същото ненулево решение

Наборът от стълбове $\in A$ е ЛЗ \Leftrightarrow — " — е

$\notin A$

Наборът от стълбове i_1, \dots, i_r от A е ЛЗ \Leftrightarrow

\Leftrightarrow сист. (1) има ненулево решение \Leftrightarrow сист. (2)

има нен. р-е \Leftrightarrow наборът от стълбове i_1, \dots, i_r

от B е ЛЗ

Ако $r(\text{стълб. на } A) = r \Rightarrow \exists i_1, \dots, i_r : \text{стълбовете}$
на A с тези номера са ЛЗ \Rightarrow стълб. на B
~~са~~ с тези номера са ЛЗ $\Rightarrow r(\text{ст. } B) \geq r$

Ако $\forall j_1, \dots, j_r, j_{r+1} \Rightarrow$ стълбовете от A с тези номера

са ЛЗ \Rightarrow ~~са~~ ^{стълб.} тези номера в B са ЛЗ \Rightarrow

$\Rightarrow r(\text{ст. } B) = r$

* Транспонироване: Нека A е $k \times n$ $A = (a_{ij})$

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n \times k}$$

Забел: Когато се транспонира $k \times n$ се получава $n \times k$ матрица. Когато правим преобразувания по редове на една матрица е еквивалентно да се правят преобразувания по стълбове на транспонираната матрица

Ако се правят ел. преобр. по стълбовете на матрицата, не се променя рангът ни по стълбовете, ни по редовете.

Т1.2 Ако $A \neq 0$ матрица $k \times n$,
тогава \exists последователност от ел. преобр.
по редове ~~и~~ по стълбове, такава че
 A да се преведе до матрица от следния
тип:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

тогава $r(\text{стълб. на } A) =$
 $= r(\text{редовете на } A) =$
 $= r$
 \rightarrow броя на „1“

* - ненулев элемент

$$A = \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{и столбцов}]{\text{различна на редове}} \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{него}]{\text{разделяме реда на него}} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ * \end{pmatrix} \xrightarrow{\cdot x} \begin{pmatrix} x \\ \vdots \\ * \end{pmatrix}$$

B_1 B_2

$$\begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & \vdots \\ 0 & \vdots \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{по ст.}]{\text{не ст.}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \boxed{A_1} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{ако } A_1 \neq 0 \text{ при същото процедура}}$$

B_3 B_4

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \boxed{A_2} \end{pmatrix} \xrightarrow{\dots} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \boxed{A_2=0} \end{pmatrix}$$

B_n B_m

На k стъпка ранга на новата матрица = ранга на старата.

Ранга на стълбовете и редовете се запазва.

$$\begin{aligned} r(\text{ред. на } A) &= r(\text{ред. на } B_m) = r \\ r(\text{ст. на } A) &= r(\text{ст. на } B_m) = r \\ r(\text{ред. } B_m) &= r ; \quad r(\text{ст. } B_m) = r \end{aligned}$$

Опр: A е $k \times n$ матрица

Ранг на матрицата A е равен на ранга на редовете на A = ранга на стълбовете на A

$$\text{ex} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} = 3$$

Опр: Ако A е квадратна матрица $n \times n$ и $\text{rang}(A) = n$, тогава A се нарича неособена

Теорема Ако A е неособена $n \times n$ матрица тогава само с елем. преобр. по редове A може да севеде до

единична матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

A е неособена $\Leftrightarrow \forall$ редове са n и \forall стълб. са n

A - неособена \Rightarrow в I ст. има ненулев ел.

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{*} \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \boxed{*A_1} \\ 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots \end{pmatrix} \rightarrow$$

A_1 има $n-1$ стълб.

$$\rightarrow \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{|c|} \hline A_2 \\ \hline \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & 1 \end{pmatrix} \right) \rightarrow \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix} \right)$$

Метод на Гаусс-Жордан

04.11.2014 Алгебра - I - лекция

Линейни системи. Компонентни системи.

(1)
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = b_k \end{cases}$$

↗ матрица на с-мата (1)

$\rightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}_{k \times n}$

$a_{ij}, b_i \in F$

$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} & b_k \end{array} \right)$ разширена матр. на с-мата (1)

Указваме, че една система е съвместима, ако има решение. ~~Обратно, ако не~~ Несъвместима, ако няма решение

$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in F^n$

ако $a_{s1}x_1 + \dots + a_{sn}x_n = b_s \quad (s = 1, \dots, k)$

Определена система - когато има единствено решение.

Неопределена с-ма - \rightarrow повече от едно решение.

" (Кронекер-Капелли)

Th. (Фурье) Линейна с-ма, с матрица A и разширена матр. \bar{A} е съвместима $\Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A})$

З-вс: _____

\Rightarrow Системата да има решение
 $\Rightarrow \exists (x_1, \dots, x_n) : (x_1, \dots, x_n)$ е решение

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{k1} \end{pmatrix}}_{c_1} x_1 + \underbrace{\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{k2} \end{pmatrix}}_{c_2} x_2 + \dots + \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{kn} \end{pmatrix}}_{c_n} x_n = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}}_b$$

$$r(A) = r(c_1, \dots, c_n)$$

$$b \in l(c_1, \dots, c_n) = l(c_1, \dots, c_n, b)$$

$$\underline{r(c_1, \dots, c_n)}$$

$$r(c_1, \dots, c_n, b) = r(c_1, \dots, c_n)$$

$$r(\overset{\downarrow}{\bar{A}}) = r(\overset{\downarrow}{A})$$

$$\Leftrightarrow \text{Где } r(A) = r(\bar{A})$$

$$r(A) = \dim l(c_1, \dots, c_n)$$

$$r(\bar{A}) = \dim l(c_1, \dots, c_n, b)$$

$$\Rightarrow l(c_1, \dots, c_n) = l(c_1, \dots, c_n, b)$$

$$\Rightarrow b \in l(c_1, \dots, c_n)$$

$$\Rightarrow \exists b = \beta_1 c_1 + \dots + \beta_n c_n$$

$$\Rightarrow (\beta_1, \dots, \beta_n) \text{ е решение}$$

$$(2) \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n = 0 \end{cases}$$

(2) е \uparrow гомогенна система ~~с нулев~~ (способи на свободните чл. е нулев)