

Сума на подпространства. Директна сума

Нека V е л.ч. пр-во над F

Опр: Ако U, W са подпр-ва на V

$$U + W = \{a + b \mid a \in U, b \in W\}$$

~~Ако U, W са подпр-ва на V~~

Св. 1 $U + W$ е подпространство на V

До-во:

$$x, y \in U + W$$

$$x = a_1 + b_1, a_1 \in U, b_1 \in W$$

$$y = a_2 + b_2, a_2 \in U, b_2 \in W$$

$$\lambda x + \mu y = \lambda(a_1 + b_1) + \mu(a_2 + b_2) =$$

$$= \underbrace{(\lambda a_1 + \mu a_2)}_{\in U} + \underbrace{(\lambda b_1 + \mu b_2)}_{\in W} \in U + W$$

$$\Rightarrow U + W \text{ е подпр-во}$$

Забел.: В сумата $(U + W)$ се съдържа, както U , така и W

Зая. Ако T е подпр-во на V
 U, W подпр-ва на V

$$\text{Ако } U \subset T \text{ и } W \subset T \Rightarrow U + W \subset T$$

Сл: $U+W$ е най-малкото подпространство (в смисъл включване), което съдържа U и W .

(Т.) Нека V е л.н. пр-во и U, W крайномерни подпр-ва на V , тогава $\dim U+W = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$

Д-во:

e_1, \dots, e_s - базис на $U \cap W$, $\dim(U \cap W) = s$

Ако сечението е \emptyset - няма базис

$e_1, \dots, e_s, f_1, \dots, f_t$ - базис на U , $\dim U = s+t$

$e_1, \dots, e_s, g_1, \dots, g_m$ - базис на W , $\dim W = s+m$

Ще докажем, че:

$e_1, \dots, e_s, f_1, \dots, f_t, g_1, \dots, g_m$ - образуват базис на $U+W$

$$x \in U+W \Rightarrow x = \underbrace{a}_{\substack{U \\ \emptyset}} + \underbrace{b}_{\substack{W \\ \emptyset}} = (\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_s e_s + \beta_1 f_1 + \dots + \beta_t f_t) +$$

$$+ (\underbrace{\gamma_1 e_1 + \dots + \gamma_r e_s + \delta_1 g_1 + \dots + \delta_m g_m}_b)$$

$$x \in \ell(e_1, \dots, e_s, f_1, \dots, f_t, g_1, \dots, g_m) = U+W$$

$$\text{Нека } \underbrace{\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_s e_s}_a + \underbrace{\beta_1 f_1 + \dots + \beta_t f_t}_b + \underbrace{\delta_1 g_1 + \dots + \delta_m g_m}_c = \emptyset$$

$$a + b + c = \emptyset \Rightarrow c = -(a+b) \quad \left. \begin{array}{l} c \in W, a+b \in U \end{array} \right\} \Rightarrow c \in U \cap W$$

$$\delta_1 g_1 + \dots + \delta_m g_m = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_s e_s$$

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_s e_s - \delta_1 g_1 - \dots - \delta_m g_m = \emptyset \quad \begin{array}{l} e_1, \dots, e_s, g_1, \dots, g_m \\ \text{са ЛНЗ} \end{array}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_s = 0 = \delta_1 = \dots = \delta_m = 0 \Rightarrow c = 0 \quad -3-$$

$$a + b + 0 = 0 \Rightarrow a + b = 0, \text{ т.к. } e_1, \dots, e_s, f_1, \dots, f_t \text{ са}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_s = \beta_1 = \dots = \beta_t = 0 \text{ базис, т.е. са ЛНЗ}$$

$$\Rightarrow e_1, \dots, e_s, f_1, \dots, f_t, g_1, \dots, g_m \text{ са ЛНЗ} \Rightarrow \text{са базис}$$

$$\dim(U+W) = s+t+m = \underbrace{s+t+s+m-s} =$$

$$= \dim U + \dim W - \dim U \cap W \quad \underline{QED}$$

Опр: U, W са подпр-ва на V
 Укажем, че $T = U \oplus W$ е директна сума, ако
 всеки вектор от T по единствен начин се
 представя $t = a + b, a \in U, b \in W$

Тв: $T = U \oplus W \Leftrightarrow$ 1) $T = U + W$
 2) $U \cap W = \{0\}$

З-во:

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} t = a + b \quad a \in U, b \in W \\ x \in U \cap W \quad x = x + 0 \\ x = 0 + x \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{от дефиниция единствено} \\ \text{но представяне} \end{array}$$

$$\Rightarrow x = 0 \Rightarrow U \cap W = \{0\}$$

$$\Leftarrow \text{Гледа } T = U + W, U \cap W = \{0\}$$

$$\Rightarrow y = a_1 + b_1 \quad a_1, a_2 \in U$$

$$y = a_2 + b_2 \quad b_1, b_2 \in W$$

$$0 = a_1 - a_2 + b_1 - b_2$$

$$\underbrace{b_2 - b_1}_{\in W} = \underbrace{a_1 - a_2}_{\in U} \in U \cap W$$

$$\Rightarrow b_2 - b_1 = 0, a_1 - a_2 = 0 \Rightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2$$

\Rightarrow имаме единственост, т.е. сумата е директна

Св-во: V е мин. пр-во с базис e_1, \dots, e_n

$$U = \ell(e_1, \dots, e_s)$$

$$W = \ell(e_{s+1}, \dots, e_n) \Rightarrow V = U \oplus W$$

Ранг на система вектори. Ранг на матрица.

V - мин. пр-во

$$A = \{a_1, \dots, a_n\} \subset V$$

Опр: Ранг на A (ранг на a_1, \dots, a_n) е размерността на линейната обвивка на A

$$r(A) = r(a_1, \dots, a_n) = \dim \ell(A) = \dim \ell(a_1, \dots, a_n)$$

Тв.1 Ако $r = r(a_1, \dots, a_n)$, то $\exists r$ ЛЗ вектори от a_1, \dots, a_n и всеки друг вектор е тяхна линейна комбинация.

$$\ell(a_1, \dots, a_n) = U$$

$\Rightarrow \exists$ базис на U от вектори от множеството

$$\{a_1, \dots, a_n\}$$

$$\{a'_1, \dots, a'_s\} \subset \{a_1, \dots, a_n\}$$

Тв.1 Числа $A = a_1, \dots, a_n$ - вектори от V и $B = b_1, \dots, b_n$ се получава от A с последователност от следните преобразувания:

- 1) умножаване на вектор по скалар $\neq 0$
- 2) прибавяне към вектор на друг вектор

-5-

Тогда $l(A) = l(B)$ с линейно эквивалентными

З-бо:

1) a_1, a_2, \dots, a_n

$$a_1, \dots, \frac{\lambda a_i}{a_i}, \dots, a_n, (\lambda \neq 0)$$

$$x \in l(a_1, \dots, a_n) \quad a_i' = \lambda a_i \Rightarrow a_i = \frac{1}{\lambda} a_i'$$

$$x = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_i a_i + \dots + \lambda_n a_n =$$

$$= \lambda_1 a_1 + \dots + \frac{\lambda_i}{\lambda} a_i' + \dots + \lambda_n a_n$$

$$x \in l(a_1, \dots, a_i', \dots, a_n)$$

$$\Rightarrow l(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) \subset l(a_1, \dots, a_i', \dots, a_n)$$

$$\text{ако наоборот, т.е. } a_i' = \lambda a_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) \supset l(a_1, \dots, a_i', \dots, a_n)$$

$$\Rightarrow l(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) = l(a_1, \dots, a_i', \dots, a_n)$$

2) a_1, \dots, a_n

$$a_1, \dots, \underbrace{a_i + a_j}_{a_i''}, \dots, a_n \quad a_i'' = a_i + a_j$$

$$y \in l(a_1, \dots, a_i'', \dots, a_n) \subset l(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)$$

$$z = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_i a_i + \dots + \lambda_n a_n + \lambda_j a_j - \lambda_j a_j =$$

$$= \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_i \underbrace{(a_i + a_j)}_{a_i''} + \dots + (\lambda_j - \lambda_i) a_j + \dots + \lambda_n a_n$$

$$\Rightarrow z \in l(a_1, \dots, a_i'', \dots, a_n)$$

$$\Rightarrow l(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) \subset l(a_1, \dots, a_i'', \dots, a_n)$$

$$\Rightarrow l(a_1, \dots, a_n) = l(a_1, \dots, a_i'', \dots, a_n)$$

Пр: Да се сметне ранг на:

$$a_1 = (1, 1, 1)$$

$$a_2 = (1, 2, 3)$$

$$a_3 = (1, 4, 5)$$

$$a_1 = (1, 1, 1)$$

$$b_2 = a_2 - a_1 = (0, 1, 2)$$

$$a_3 = (1, 4, 5)$$

$$a_1 = (1, 1, 1)$$

$$b_2 = (0, 1, 2)$$

$$b_3 = a_3 - a_1 = (0, 3, 4)$$

$$a_1 = (1, 1, 1)$$

$$b_2 = (0, 1, 2)$$

$$c_3 = b_3 - 3b_2 = (0, 0, -2)$$

$$a_1 = (1, 1, 1)$$

$$c_2 = b_2 - c_3 = (0, 1, 0)$$

$$d_3 = -\frac{1}{2} c_3 = (0, 0, 1)$$

$$a_1 - c_2 - d_3 = (1, 0, 0)$$

$$c_2 = (0, 1, 0)$$

$$d_3 = (0, 0, 1)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} \rightarrow \left. \begin{aligned} b_1 &= (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}) \\ b_2 &= (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}) \\ \vdots & \\ b_k &= (a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn}) \end{aligned} \right\} \in F^n$$

$$\downarrow$$

$$c_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{k1} \end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{k2} \end{pmatrix}, \dots, c_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{kn} \end{pmatrix} \in F^k$$