

14.10.2014 Алгебра - I - лекция

Линейно пространство. Основни примери и свойства, Изостранство и линейно обвиве

Линейното пространство се дефинира над някакво поле  $F$ .

$F$ -поле ( $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{F}$ , други числови/числови полета)  
Най-често ще се има предвид  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  числови полета, или поле в нещото.

Бинарна операция за множество  $M$  е такова изображение  $\varphi: M \times M \rightarrow M$   $(a, b) \mapsto a \star b$   
 $a, b \rightarrow a + b$   
 $a \square b$

знак на операцията  
(стои м/у двата арг.)

Определение: Линейно пространство

Нека  $V \neq \emptyset$  и  $F$  е някакво фиксирано поле.  
(произволно мн.)

Казваме, че  $V$  е линейно пространство над  $F$ , ако  $V$  е множество с бинарна операция  $+$  за  $V$  ( $\forall a, b \in V, \exists a + b \in V$ ) и  $\forall \lambda \in F, \forall a \in V \rightarrow \lambda a \in V$   
(множеството на ел. от  $V$  е замкрито от  $F$ )

и са изпълнени следните свойства:

- 1)  $a + b = b + a, \forall a, b \in V$  (комутативност)
- 2)  $(a + b) + c = a + (b + c), \forall a, b, c \in V$  (асоциативност)

3)  ~~$\forall \theta \in V$~~   $\exists \theta \in V$  нулев елемент  $: a + \theta = a, \forall a \in V$

4)  $\forall a \in V, \exists c \in V : a + c = \theta$

5)  $1 \cdot a = a, \forall a \in V$  ( $1 \in F$ )  $\rightarrow$  все едно скалар, т.е.  $1 \in F$

6)  $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a, \forall \lambda, \mu \in F, \forall a \in V$    
 сбор на числа сбор на скалари

7)  $\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b, \forall \lambda \in F, \forall a, b \in V$

8)  $(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a), \forall \lambda, \mu \in F, \forall a \in V$  ~~(не е асоциативен)~~

умн. на число умн. на число по вектор

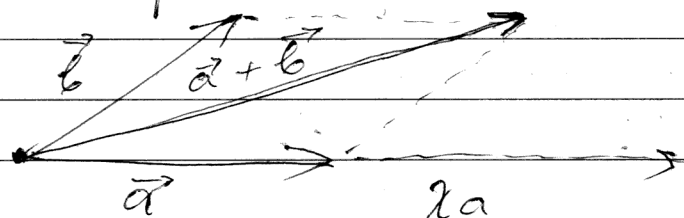
Както се каже "вектор" се разбира най-общо ел. от линейното пр-во.

Както се каже "скалар" се разбира най-общо ел. от полето по линейното пр-во.

Забележка: 8) не е асоциативен закон, защото операциите са различни в смисъл, т.е. са операции м.у. ел. от различни вид, както и 6) не е стандартен дистри. закон поради същият принцип.

Примери: Примери.

~~вектор-многоост~~  $\mathbb{R}^2$  - Евклидова равнина



$\mathbb{R}^3$  - векторите в пространството

②  $F$  - поле

$F^n = \{ (a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in F \}$  -  $n$ -мерно векторно пространство

$a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$

$b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$

$a+b = (a_1+b_1, a_2+b_2, \dots, a_n+b_n) \in F^n$

$$\alpha \in F$$

$$\alpha a = (\alpha a_1, \alpha a_2, \dots, \alpha a_n) \in F^n$$

$$\text{нулев ел.} - \mathbf{0} = (0, 0, 0, \dots, 0)$$

$$a + \mathbf{0} = a$$

$$a + (-a_1, -a_2, \dots, -a_n) = \mathbf{0}$$

$$1. (a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

В стандартното мн. пр-во няма такава операция като умножение на вектор с вектор.

③  $\mathbb{R}[x]$  - всички полиноми от  $\mathbb{R}$ , които имат  
 $\hookrightarrow \{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, a_i \in \mathbb{R}\}$  малки коэф-ци. за  $x$

$$f(x) + g(x) \in \mathbb{R}[x]$$

Мн. на  $\forall$  полиноми на една/много променливи образуват мн. пр-во над полето  $\mathbb{R}$ ?

Тази редица, която има граница се нарича  $\forall$  сходящи редици образуват  $\left. \begin{array}{l} \text{сходяща} \\ \text{мн. пространство над полето } \mathbb{R} \end{array} \right\}$

④ Странен пример за мн. пр-во

$$F, V = F$$

Всичко поле може да се разгл., като мн. пр-во над себе си.

⑤  $\mathbb{C}$  са мн. пр-во над  $\mathbb{R}$

$\mathbb{C}$  са мн. пр-во над себе си

$\mathbb{Q}$  са мн. пр-во над  $\mathbb{Q}$

© матрица - правоъгълна таблица от числа

номер на реда  
номер на стълба

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

$A$  е от тип  $k \times n$   
 $k$  реда  
 $n$  стълба

$a_{ij}$  е ел. от matr.  $A$   
 номер на реда  
 номер на стълба

$M_{k \times n}(F)$  - множеството на  $k \times n$  матрици с елементи от полето  $F$

$M_{k \times n}(F)$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & \dots & b_{kn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} + b_{k1} & \dots & a_{kn} + b_{kn} \end{pmatrix}$$

нулева матрица

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda \in F$

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{k1} & \lambda a_{k2} & \dots & \lambda a_{kn} \end{pmatrix}$$

$$2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 0 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 13 \\ 6 & 23 \end{pmatrix}$$

Нулевият елемент е единствен.

Основни свойства на линейното пространство:  
(следствие от аксиомите)

I) ~~0~~  $0$  е единствен (един единствен ел. изпълнява аксиома (3))

Д-во:

Допускаме, че  $0_1, 0_2$  изпълняват (3)

$$0_1 + 0_2 = \begin{cases} 0_1 & (0_2 \text{ изпълнява (3)}) \\ 0_2 & (0_1 \text{ изпълнява (3)}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0_1 = 0_2 \text{ - нулев елемент / вектор}$$

II)  $\forall a \in V, \exists (!) c : a + c = 0$   
 $\hookrightarrow$  единствен

Д-во:

Допускаме, че  $\exists c_1, c_2$  изпълняват аксиома (4)

$$a = a + 0 = a + (a + c_2) = (c_1 + a) + c_2 = 0 + c_2 = c_2$$

$$\Rightarrow c_1 = c_2 = -a \text{ (противоположен на } \underline{a})$$

III)  $a_1 + a_2 + \dots + a_n$

при събиране на  $n$  елемента по какъвто и да е начин да сложим скобите, ще се получи един и същ ~~нещо~~ резултат.

$$(a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) = a_1 + (a_2 + (a_3 + a_4)) = a_1 + ((a_2 + a_3) + a_4)$$

$$(a_1 + a_2) + a_3 + a_4 = (a_1 + (a_2 + a_3)) + a_4$$

забел: затова обикновено при сума не се сложат скоби.

$$\text{IV } \overset{\text{скалар}}{\vec{0}} a = \vec{0}, \forall a \in V$$

$\downarrow$   
вектор

Д-во:

$$a + 0a = 1 \cdot a + 0a \stackrel{\text{б) акс.}}{=} (1+0)a = 1a = a \quad | \quad \cancel{+(-a)} + (-a)$$
~~$$a + 0a = a \quad | \quad +(-a)$$~~

$$-a + a + 0a = -a + a$$

$$0a = \vec{0}$$

$$\text{V } \lambda \vec{0} = \vec{0}, \forall \lambda \in F$$

Д-во:  $\overset{\text{IV cb-во}}{\uparrow} \text{ акс.}$

$$\lambda \vec{0} = \lambda (0 \cdot a) \stackrel{\text{акс.}}{=} (\lambda 0) a = 0a \stackrel{\text{IV cb-во}}{=} \vec{0}$$

$$\text{VI } \forall a, b \in V, \exists! c \in V: a + c = b$$

(уравнението  $a+x=b$  има единствено р-е.)

Д-во:

$$a + x = b \quad | +(-a)$$

$$(-a+a) + x = b + (-a)$$

$$\vec{0} + x = b + (-a)$$

$$\Rightarrow x = b + (-a)$$

$$\left| \begin{aligned} a + (b + (-a)) &= a + (-a) + b = \\ &= \vec{0} + b = b \end{aligned} \right.$$

$$\boxed{x = b - a} \text{ - за краткост}$$

$$\text{VII } \lambda a = \vec{0} \Rightarrow \lambda = 0 \text{ или } a = \vec{0}$$

Д-во:

$$\lambda a = \vec{0}$$

$$\text{ако } \lambda \neq 0 \Rightarrow \exists \lambda^{-1} \in F$$

$$\lambda a = \vec{0} \quad | \cdot \lambda^{-1}$$

$$\begin{aligned} \lambda^{-1}(\lambda a) &= \lambda^{-1} 0 \\ \stackrel{\text{fакт}}{\Rightarrow} (\lambda^{-1} \lambda) a &= \lambda^{-1} 0 \\ \downarrow \\ 1 a &= 0 \\ \downarrow \text{факт.} \\ \Rightarrow a &= 0 \end{aligned}$$

Определение за подпространство:

Нека  $V$  е лнн. пр-во над  $F$  и  $U \neq \emptyset$ ,  $U \subset V$ .  
Ако  $U$  е също лнн. пр-во стносно операциите  
във  $V$ , ~~то~~  $\Rightarrow U$  е подпространство на  $V$ .

Пример:

- ① Множеството на векторите в една равнина  
е подпространство ~~в~~ на множеството на  
векторите в <sup>3-мерно</sup> пространство.
- ② В мн. от полиномите, разглеждаме полиномите  
от степен не по-голяма от 2  $\Rightarrow$  то второто  
множество е подпространство на първото,  
защото са изпълнени ~~и~~ св-ва ~~на~~ от първото  
във второто.
- ③  $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$   
 $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ 0 & c_1+c_2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow U$  е подпр.-во на  $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$

критерий за едно мн.-во да е подпростр.-во на  $V$ .  
 (ТВ.) Нека  $V$  е мн.-во на  $F$  и  $A \neq \emptyset, U \subset V$

$U$  е подпростр.-во  $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a+b \in U, \forall a, b \in U \\ \lambda a \in U, \forall a \in U, \forall \lambda \in F_{(*)} \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda a + \mu b \in U, \forall \lambda, \mu \in F \\ \forall a, b \in U \end{array} \right\}$$

Д-во:

"+" е бинарна за  $U$

$$\lambda a \in U, \forall \lambda \in F, \forall a \in U$$

~~акс.~~ 1), 2), ~~3)~~ 5), 6), 7), 8) са в сила  
 за  $\forall$  ел. от  $U \subset V$ .

$$\text{от (*)} \Rightarrow a \in U, 0a = 0 = U \quad (3. \text{ акс.})$$

$$a \in U, -1a = -a \in U \quad (4. \text{ акс.})$$

$\Rightarrow U$  е подпр.-во.



Линейна комбинация на вектори

Опр:  $a_1, \dots, a_s \in V$   
 $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in F$

$\lambda_1 a_1, \dots, \lambda_s a_s$  се наричат лн. комбинации  
 на  $a_1, \dots, a_s$ .

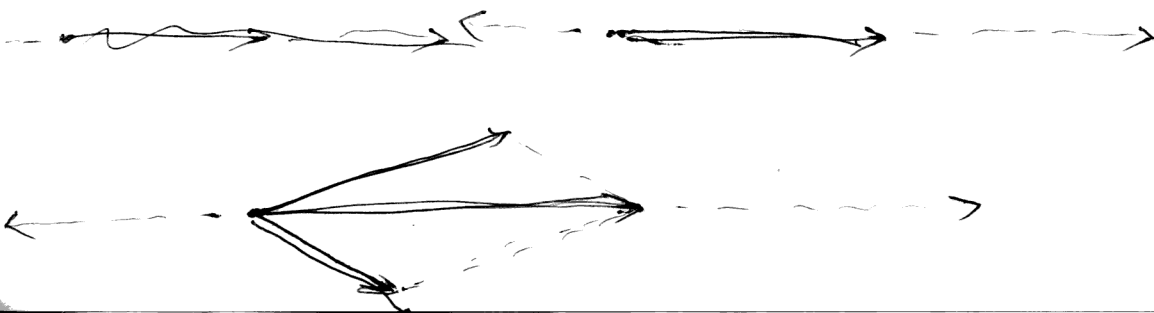
Пример:  $3(1, 2, 3) + (1, 0, -1) - 2(1, 1, 1) =$   
 $= (3, 6, 9) + (1, 0, -1) + (-2, -2, -2) =$   
 $= (2, 4, 6)$

Линейна обвивка на  $n$  вектора.

Опр: Нека  $a_1, \dots, a_s \in V$  произволни  
 $L(a_1, \dots, a_s) = \{ \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_s a_s \mid \lambda_i \in F \}$

Пример: Всички вектори ~~които~~ <sup>2</sup> успоредни  
 на дадена права

на един вектор



Тб. ~~Линейната~~  
на  $V$

ант-сборник на <sup>лекции</sup>  $l(a_1, \dots, a_s)$  е  $\text{подпр-во} - 10-$

$$x = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_s a_s$$

$$y = \mu_1 a_1 + \dots + \mu_s a_s$$

$$x + y = (\lambda_1 + \mu_1) a_1 + \dots + (\lambda_s + \mu_s) a_s \in l$$

$$\alpha x = \alpha \lambda_1 a_1 + \dots + \alpha \lambda_s a_s \in l$$

$$\text{Забел.: } l(0) = \{0\}$$

---