СЛУЧАЙНИ ВЕЛИЧИНИ

§6. Случайна величина. Видове. Функция на разпределение на случайна величина.

Случайни са тези величини, които приемат случайни стойности, т.е. това са величини, които се измерват в случайните експерименти.

Например:

- опит – 5 изстрела по мишена, случайна величина – брой на попаденията;
- опит – експлоатация на уред, случайна величина – продължителност на безотказна работа;
- опит – измерване на физична величина, случайна величина – грешка на измерването.

Както се вижда, често пъти резултатите от един случаен експеримент са числа. В други експерименти те не са числа, но на тях могат да бъдат съпоставени числени стойности, с помощта на които да се изследват случайните събития. Каква стойност ще приеме случайната величина, се определя едва след като е известен изходът от случайния експеримент, т.е. случайната величина е функция на изходите от експеримента.

__Случайна величина__ (__случайна променлива__) се нарича всяка еднозначна реална функция на елементарните случаи ω, описващи даден случаен експеримент, т.е. $\xi=\xi(\omega),\ \omega\in\Omega$.

Пример 6.1. При подхвърлянето на една монета два пъти елементарни събития са ЛЛ, ЛГ, ГЛ, ГГ. Ако с ξ означим броя на поява на лицето на монетата, то $\xi(ЛЛ)=2$, $\xi(ЛГ)=\xi(ГЛ)=1$, $\xi(ГГ)=0$.♦

Случайните величини ще означаваме с гръцки букви $\xi,\ \eta,\ \zeta$ и т.н. Ако направим конкретно измерване на случайната величина, ще получим конкретна стойност x, която се нарича *__реализация__* на ξ и е една от *__възможните й стойности__*.

Случайните величини, които ще разглеждаме, се делят по отношение на множеството от възможните си стойности на:

__Дискретни__ - случайни величини, множеството от възможните стойности на които е крайно или изброимо много.
__Непрекъснати__ - случайни величини, множеството от възможните стойности на които е интервал, краен или безкраен.

Ще отбележим, че има също и *__сингулярни случайни величини__* – величини, които не са от горните два вида.

За да е определена една случайна величина не е достатъчно да знаем какво е множеството от възможните й стойности. Трябва да знаем също каква е вероятността случайната величина ξ да приеме конкретна възможна стойност a (събитието $\{\xi=a\}$) или стойност, принадлежаща на дадено числово множество (например събитията $\{a\le\xi<b\}$, $\{\xi<c\}$, {ξ

принадлежи на множеството от четни числа}), т.е. за да познаваме една случайна величина трябва да знаем как да изчисляваме вероятността на произволно събитие, отнасящо се до случайната величина.

Правилото, с помощта на което може да бъде намерена вероятността на произволно събитие, свързано със случайната величина, наричаме __закон за разпределение на вероятностите__ на величината.

Всяка случайна величина има свой закон на разпределение. Един начин за определянето му е за всяка реална стойност на числото x да бъде дадена вероятността на събитието $\{\xi\le x\}$.

Функцията $F_\xi(x)=P(\xi\le x)$, определена за всяко $x\in(-\infty,\infty)$, се нарича __функция на разпределение на случайната величина__ ξ.

Свойства на функцията на разпределение:

1) $0\le F_\xi(x)\le 1$ за всяко x,
2) $F_\xi(x)$ *е ненамаляваща за всяко* x
3) $\lim\limits_{x\to-\infty}F_\xi(x)=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}F_\xi(x)=1$;

Доказателството на тези свойства произтича от факта, че за всяко x функцията $F_\xi(x)$ е равна на вероятността на събитието $\{\xi\le x\}$.

Ако за една случайна величина ξ функцията $F_\xi(x)$ е дадена, то можем да намерим вероятността на всяко събитие от вида $\{a<\xi\le b\}$.

Действително, да разгледаме събитията $\{\xi\le b\}$ и $\{\xi\le a\}$, за които, съгласно дефиницията на функцията на разпределение имаме

$$P(\xi\le b)=F_\xi(b),\ P(\xi\le a)=F_\xi(a).$$

Очевидно, $P(\xi\le b)=P(\xi\le a)+P(a<\xi\le b)$, откъдето

$$\boxed{P(a<\xi\le b)=F_\xi(b)-F_\xi(a)}. \qquad (6.1)$$

Забележка 6.1. Вероятността $P(\xi=b)$ може да изчислим от формула (6.1) при граничния преход $b\to a$, т.е.

$$\boxed{P(\xi=b)=\lim_{a\to b,\,a<b}[F_\xi(b)-F_\xi(a)]} \qquad (6.2)$$

Пример 6.2. Да се намери функцията на разпределение на величината от пример **6.1.**

Решение. Възможните стойности на величината са 0, 1 и 2 и затова трябва да разгледаме случаите:

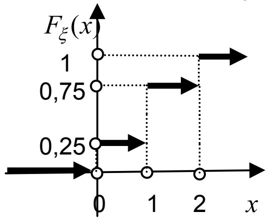
1. $x<0$. Най-малката стойност на ξ е 0, затова събитието $\{\xi\le x\}$ е невъзможно, т.е. $F_\xi(x)=0$.

2. $0 \le x < 1$. $F_{\xi}(x) = P(\xi \le x) = P(\xi = 0) = P(ГГ) = \dfrac{1}{4}$, тъй като събитието $\{\xi \le x\}$ настъпва само, ако е настъпило събитието $\xi = 0$.

3. $1 \le x < 2$.
$$F_{\xi}(x) = P(\xi \le x) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) = P(ГГ) + P(ГЛ) + (ЛГ) = \frac{3}{4}.$$

4. $x \ge 2$. Във всеки опит $\xi \le 2 \le x$, затова $F_{\xi}(x) = P(\xi \le x) = 1$.

Графиката на функцията е начертана на фиг. 6.1. ♦



Фиг. 6.1

Както показва примерът, функцията на разпределение на дискретна случайна величина е *прекъсната функция като множеството от точките й на прекъсване съвпада с множеството от възможните стойности на* ξ, *а графиката й има стъпаловиден вид* (фиг.6.1*).*

Функцията на разпределение на непрекъснатите случайни величини ще считаме, че е непрекъсната. По-точно *ще разглеждаме само непрекъснати величини, за които функцията на разпределение е непрекъсната.*

§7. Дискретни случайни величини.

Множеството на възможните стойности на дискретните случайни величини е крайно или изброимо. Затова е удобно законът на разпределение на вероятностите да се задава не с функцията на разпределение $F_{\xi}(x)$, а чрез *<u>таблицата на разпределение</u>*,

ξ	x_1	x_2	$\dots$	x_i	$\dots$
p	p_1	p_2	$\dots$	p_i	$\dots$

в която са описани всички възможни стойности $x_1,\ x_2, \dots x_i, \dots$ на величината и вероятностите $p_i = P(\xi = x_i)$ в даден опит величината ξ да приеме стойността x_i. При това,

$$\sum p_i = 1, \qquad (7.1)$$

където сумирането се извършва по цялото множество от възможни стойности на величината.

По този начин е определена функция
$$p_{\xi}(x_i) = P(\xi = x_i) = p_i,\ i = 1, 2, \dots,$$
която ще наричаме <u>плътност на вероятностите</u> на дискретната случайна величина. Тя е дефинирана само за възможните стойности $x_1,\ x_2, \dots x_i, \dots$ *на величината* ξ *и има следните свойства:*

1) $\sum\limits_i p_{\xi}(x_i) = 1$; *2)* $P(\alpha < \xi \le \beta) = \sum\limits_{x_i : \alpha < x_i \le \beta} p_{\xi}(x_i)$,

а графиката й е съвкупност от точки, с координати $(x_i, p_{\xi}(x_i))$ *(фиг.7.1).*

Освен с графиката на плътността на величината, законът на разпределение се изобразява графически и като начупена линия, свързваща точките с координати (x_i, p_i), която се нарича *<u>многоъгълник на разпределението</u>*. На фиг. 7.1 и 7.2 са представени графиката на плътността и многоъгълникът на разпределението на случайната величина, разгледана в пример **6.1.**

Ако е дадена таблицата на разпределение, функцията $F_{\xi}(x)$ може да се получи като се използва, че събитието $\xi < x$ настъпва само, ако ξ е приела някоя от възможните си стойности, по-малки от x. Следователно, $F_{\xi}(x) = \sum\limits_{x_i < x} p_i$, като $p_i = p_{\xi}(x_i)$. По този начин получаваме:

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x < x_1 \\ p_1, & x_1 \le x < x_2 \\ p_1 + p_2, & x_2 \le x < x_2 \\ \dots & \\ p_1 + \dots + p_{k-1}, & x_{к-1} \le x < x_к \\ \dots & \end{cases} \quad \text{като } \lim_{x \to \infty} F_{\xi}(x) = 1.$$

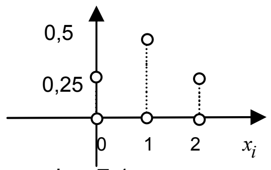
Функцията $F_{\xi}(x)$ е непрекъсната отдясно и за произволни a и b:

$$P(a < \xi \le b) = F_{\xi}(b) - F_{\xi}(a),$$
$$P(\xi = b) = \lim_{a \to b,\, a < b} [F_{\xi}(b) - F_{\xi}(a)].$$

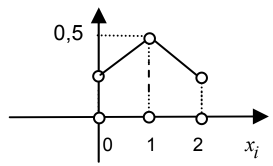
На фиг. 6.1 е дадена графика на функцията на разпределение на дискретна случайна величина (пример **6.1**).

Ще разгледаме няколко примера, в които ще получим плътността и функцията на разпределение на някои дискретни случайни величини.

Нека A *е случайно събитие и* $P(A) = p$, $0 \le p \le 1$. *Величината* ξ *със стойности 0 и 1, която показва колко пъти е настъпило събитието в един опит, се нарича <u>индикатор на събитието</u>* A.



Фиг.7.1.



Фиг.7.2.

Пример 7.1. Да се състави таблицата на разпределение и да се намери функцията на разпределение на индикатора ξ на събитието A, за което $P(A)=p$.

Решение. Пресмятаме $P(\xi=1)=P(A)=p$, $P(\xi=0)=P(\overline{A})=1-p=q$, където q е вероятността за настъпване на противоположното събитие $\overline{A}$.

Следователно, $\begin{array}{c|cc} \xi & 0 & 1 \\ \hline P & q & p \end{array}$. Очевидно, $q+p=(1-p)+p=1$.

Тъй като възможните стойности на величината ξ са 0 и 1, то:

- За всяко число $x\in(-\infty,0)$ имаме $F_{\xi}(x)=P(\xi\le x)=0$ ($\xi\le x<0$ е невъзможно събитие).
- За число $x\in[0,1)$ събитието $\{\xi\le x\}$ настъпва само, ако е настъпило събитието $\{\xi=0\}$, следователно $F_{\xi}(x)=P(\xi\le x)=P(\xi=0)=1-p$,.
- За $x\in[1,\infty)$ имаме $F_{\xi}(x)=P(\xi\le x)=P(\xi=0)+P(\xi=1)=q+p=1$.

По този начин, $F_{\xi}(x)=\begin{cases} 0, & x\in(-\infty,0) \\ q, & x\in[0,1) \\ 1, & x\in[1,\infty) \end{cases}$. ♦

Пример 7.2. Нека вероятността за поява на едно събитие A във всеки опит е $P(A)=p$. Извършваме опити докато се появи събитието A. Да се намери плътността на величината ξ - брой на направените опити.

Решение. Възможните стойности на величината са 1,2,3…,n,…(изброимо много). Ако означим $P(\overline{A})=1-p=q$, то получаваме

$$p_{\xi}(1)=P(\xi=1)=P(A)=p , \quad p_{\xi}(2)=P(\xi=2)=P(\overline{A}\cap A)=qp ,$$

$P(\xi=3)=P(\overline{A}\cap\overline{A}\cap A)=q^2p$ и т.н. Така получаваме, че плътността на величината е $p_{\xi}(n)=pq^{n-1},\ n=1,2,\ldots$, която представяме с таблицата

$$\begin{array}{c|cccccc} x_i & 1 & 2 & 3 & \ldots & n & \ldots \\ \hline p_{\xi}(x_i) & p & pq & pq^2 & \ldots & pq^{n-1} & \ldots \end{array}. \qquad (7.2)$$

Ще проверим равенство (7.1). Действително, имайки предвид, че $|q|<1$ и формулата за сума от безкрайна геометрична прогресия, получаваме $p+pq+pq^2+\ldots+p^{n-1}+\ldots=p.\dfrac{1}{1-q}=p.\dfrac{1}{p}=1$.♦

Тъй като вероятностите в таблица (7.2) са членове на геометрична прогресия, полученото разпределение се нарича ***<u>геометрично.</u>*** То зависи от един параметър p. Например броят на подхвърлянията на монета до поява на герб е геометрично разпределена величина с параметър $p=0{,}5$, а броят на хвърлянията на зар до поява на шестица – с параметър $p=1/6$.

Ако са дадени една или няколко случайни величини, то от тях може да образуваме нови случайни величини, например,

<u>Сума</u> $\zeta=\xi+\eta$ на две случайни величини ξ и η ще наричаме случайната величина ζ, която приема стойност, равна на сумата от приетите стойности на величините ξ и η, т.е. $\zeta(\omega)=\xi(\omega)+\eta(\omega)$ за всяко $\omega\in\Omega$. Аналогично се дефинира <u>произведение</u> $\xi\eta$.

Могат да се дефинират и други неслучайни зависимости от случайни величини, например, $\psi=\sin\xi$, $\zeta=\xi^2-2\xi\eta$.

Пример 7.3. Има две партиди изделия. Произволно изделие може да бъде дефектно с вероятност 0,1 за първата партида и 0,2 за втората. От всяка партида се избират по две изделия за проверка.

а) Да се намерят законите на разпределение на случайните величини:

ξ - брой на проверените дефектни изделия от първата партида

η - брой на проверените дефектни изделия от втората партида.

б) да се намери законът на разпределение на величината $\zeta=\xi+\eta$ - общ брой на проверените дефектни изделия.

в) За всяко дефектно изделие се плаща неустойка от 10 лв. Да се намери разпределението на величината σ - общата сума на изплатените неустойки.

Решение. Възможните стойности на величината ξ са 0,1 или 2. За да изчислим вероятностите им, въвеждаме случайните събития A_1 ={първото проверено изделие е дефектно} и A_2 ={второто проверено изделие е дефектно}. Тогава

$P(\xi=0)=P(\overline{A}_1\cap\overline{A}_2)=0{,}9.0{,}9=0{,}81$, $P(\xi=2)=P(A_1\cap A_2)=0{,}1.0{,}1=0{,}01$,

$P(\xi=1)=P((A_1\cap\overline{A}_2)\cup(\overline{A}_1\cap A_2))=0{,}1.0{,}9+0{,}9.0{,}1=0{,}09+0{,}09=0{,}18$

Аналогични изчисления правим и за случайната величина η, с което получаваме таблиците

$$\begin{array}{c|ccc} \xi & 0 & 1 & 2 \\ \hline p & 0{,}81 & 0{,}18 & 0{,}01 \end{array}, \qquad \begin{array}{c|ccc} \eta & 0 & 1 & 2 \\ \hline p & 0{,}64 & 0{,}32 & 0{,}04 \end{array}.$$

б) Възможните стойности на величината ζ са 0, 1, 2, 3 и 4. Като използваме формулите за сума и произведение на вероятностите, получаваме следната таблица на разпределение (проверете!)

$$\begin{array}{c|ccccc} \zeta & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline p & 0{,}5184 & 0{,}3744 & 0{,}0964 & 0{,}0104 & 0{,}0004 \end{array}.$$

в) Очевидно, възможните стойности на сумата, която трябва да се плати като неустойки, се изразява по формулата $\sigma=10\zeta$. Възможните ѝ стойности са 0, 10, 20, 30, и 40 лв и имат същите вероятности, каквито са вероятностите на възможните стойности на величината ζ. ♦

Ако дадена случайна величина има възможна стойност, вероятността на която е най-голяма, то тази стойност се нарича <u>*мода*</u>. Една случайна величина може да няма мода (такова е равномерното разпределение от пример **8.2**), а може да има повече от една мода.

Например, модата на величините ξ, η и ζ в пример **7.3** е възможната стойност 0.

Упражнения.

1. Зарче се хвърля 3 пъти. Да се състави законът за разпределение на ξ - брой на хвърлянията, при които са се паднали не по-малко от 5 точки.
2.Зарче се хвърля до падане на 6 точки. Да се състави законът за разпределение на броя ξ на направените опити.
3.Двама души подхвърлят монета. Ако при дадено подхвърляне се падне "герб", то първият играч получава 1 лев, а ако се падне "лице", той дава 1 лев. Да се намерят законът и функцията на разпределение на величината ξ - печалбата на първия играч при едно хвърляне на монетата. Какво разпределение ще има величината ξ_k - печалба на първия играч при $k=2,3,\ldots,n$ хвърляния на монетата?
4.В партида от 10 изделия има 1 нестандартно. Изделията се проверяват докато се появи нестандартното. Да се състави законът за разпределение на броя ξ на проверените изделия, ако проверката се извършва: а) без връщане; б) с връщане.

§8. Математическо очакване и други числени характеристики на дискретна случайна величина.

Законът за разпределение на дискретна величина, зададен с функцията на разпределение или таблицата на разпределение определя напълно една случайна величина. Но освен детайлно определяне на вероятността за приемане на всяка от възможните й стойности, в много случаи е важно да се определи каква е средната стойност на величината. Например, ако са дадени таблиците на разпределение на броя попадения на двама стрелци

$$\begin{array}{c|ccccc} \xi & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline P & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}5 \end{array}, \qquad \begin{array}{c|ccccc} \eta & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline P & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{array}$$

е трудно да се определи кой е по-добрият, но ако си представим че всеки от тях е стрелял по 100 пъти, то може да очакваме, че средният брой попадения за всеки е

$$\frac{10.0+10.1.+10.2+20.3+50.4}{100}=2{,}90 \text{ и } \frac{10.0+10.1+20.2+20.3+40.4}{100}=2{,}70.$$

Следователно, по-добър е първият стрелец.

Ето защо за изследването на общото поведение на случайните величини се въвеждат няколко числени характеристики, основна за които се явява характеристиката, наречена математическо очакване.

Нека дискретната случайна величина ξ е зададена с таблицата си на разпределение

$$\begin{array}{c|ccccc} \xi & x_1 & x_2 & \ldots & x_n & \ldots \\ \hline P & p_\xi(x_1) & p_\xi(x_i) & \ldots & p_\xi(x_n) & \ldots \end{array}.$$

<u>Математическо очакване</u> на случайна величина ξ се нарича реално число $E\xi$ (други означения E_ξ, $m\xi$, $M\xi$, m_ξ), определено по формулата

$$E\xi=\sum x_i p_\xi(x_i)\,, \tag{8.1}$$

където сумирането се извършва по всички възможни стойности x_i.

Математическо очакване може и да не съществува, ако редът (8.1) е разходящ.

Доказано е експериментално, че *математическото очакване е близко до средната стойност на величината, измерена в серия от опити.*

Свойства на математическото очакване:

1) *ако C е константа, то $EC=C$.*
2) *ако C е константа, то $E(C\xi)=CE\xi$.*
3) *за произволни случайни величини ξ_1 и ξ_2 $E(\xi_1\pm\xi_2)=E\xi_1\pm E\xi_2$.*
4) *ако случайните величини ξ_1 и ξ_2 са независими, то $E(\xi_1\xi_2)=E\xi_1.E\xi_2$.*
5) *Математическото очакване на случайната величина $\eta=f(\xi)$, където f е неслучайна функция, се пресмята по формулата*
$$E\eta=E(f(\xi))=\sum f(x_i)p_\xi(x_i).$$

<u>Центрирана случайна величина</u> се нарича величина, математическото очакване на която е равно на нула. Например, величината $\overline{\xi}=\xi-E\xi$ е центрирана.

Дисперсия. Друга важна числена характеристика е дисперсията, която дава мярка за разсейването на случайната величина около математическото й очакване.

<u>Дисперсия</u> на случайната величина ξ се нарича числото (ако съществува)

$$D\xi=E(\xi-E\xi)^2=\sum(x_i-E\xi)^2 p_\xi(x_i) \tag{8.2}$$

(т.е. математическото очакване на квадрата на центрираната величина $\overline{\xi}=\xi-E\xi$).

Свойства на дисперсията:

1) $D\xi=E\xi^2-(E\xi)^2$, където $E\xi^2=\sum x_i^2 p_i$. (8.3)
2) *$D\xi\geq 0$ за произволна случайна величина.*
3) *ако C е константа, то $D\xi=0$.*

4) ако C е константа, то $D(C\xi)=C^2 D\xi$

5) ако ξ_1 и ξ_2 са независими, то $D(\xi_1 \pm \xi_2)=D\xi_1+D\xi_2$.

Забележка 8.1. Формула (8.3) е удобна за пресмятането на дисперсията.

Средно квадратично отклонение.

Величината $\sigma\xi=\sqrt{D\xi}$ се нарича <u>средно квадратично отклонение</u> на величината ξ.

Пример 8.1. (Продължение на пример **7.3**) Да се намерят математическите очаквания на величините ξ и η. Колко лева средно трябва да се предвидят за неустойки?

Решение. Изчисляваме:

$$E\xi=0.0{,}81+1.0{,}18+2.0{,}01=0{,}2\,,\quad E\eta=0.0{,}64+1.0{,}32+2.0{,}04=0{,}4\,.$$

Средната стойност на разходите за неустойки е близка до математическото очакване, следователно е равна на

$E\sigma=E[10(\xi+\eta)]=10(E\xi+E\eta)=10.0{,}6=6$ лв ♦

Пример 8.2. Да се намери средно квадратичното отклонение на броя ξ на падналите точки при хвърляне на един зар.

Решение. Имаме

ξ	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

, откъдето:

$$E\xi=\frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)=\frac{7}{2}\,,\quad E\xi^2=\frac{1}{6}\left(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2\right)=\frac{91}{6}\,,$$

$$D\xi=E\xi^2-(E\xi)^2=\frac{91}{6}-\frac{49}{4}=\frac{35}{12}=2{,}92\,.$$

Следователно, $\sigma\xi=\sqrt{D\xi}=\sqrt{2{,}92}=1{,}71$.♦

Пример 8.3. Хвърлят се n правилни зара. Да се намери математическото очакване и средно квадратичното отклонение на сумата ξ от падналите точки.

Решение. Ако ξ_k е броят на падналите се точки на k-тия зар, то

$E\xi_k=\frac{7}{2}$, $D\xi_k=\frac{35}{12}=2{,}92$, $\sigma\xi_k=\sqrt{D\xi}=1{,}71$ (виж пример **8.2**).

Сумата от падналите точки представяме като $\xi=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n$.

Величините ξ_k са независими, затова:

$$E\xi=E(\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n)=E\xi_1+E\xi_2+\ldots+E\xi_n=\frac{7n}{2}\,,$$

$$D\xi=D(\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n)=D\xi_1+D\xi_2+\ldots+D\xi_n=2{,}92n\,,$$

$$\sigma\xi=\sqrt{D\xi}=\sqrt{2{,}92n}=1{,}71\sqrt{n}\ .♦$$

Величина, която приема всяка една от своите стойности с еднаква вероятност, се нарича <u>равномерно разпределена</u>.

Следователно, величините ξ_i от пример **8.3** са равномерно разпределени, но тяхната сума не е равномерно разпределена (виж пр. **4.2**).

Обобщения на разгледаните числени характеристики $E\xi$ и $D\xi$ са:

$\mu_k=E(\xi^k)=\sum x_i^k p_\xi(x_i)$ - <u>начални моменти от ред</u> k ($k=0,1,\ldots$)

$\nu_k=E(\xi-E\xi)^k=\sum(x_i-E\xi)^k p_\xi(x_i)$ - <u>централни моменти от ред</u> k ($k=2,3,\ldots$).

В частност,

$$\mu_0=1,\quad \mu_1=E\xi\,,\quad \mu_2=E\xi^2\,,\quad \mu_k=E\xi^k\,,$$
$$\nu_0=1,\quad \nu_1=0\,,\quad \nu_2=D\xi$$
$$\nu_2=D\xi=\mu_2-\mu_1^2\,, \tag{8.4}$$
$$\nu_3=\mu_3-3\mu_1\mu_2+2\mu_1^3$$
$$\nu_4=\mu_4-4\mu_1\mu_3+6\mu_1^2\mu_2-3\mu_1^4$$

Ще отбележим още две важни характеристики, свързани с моментите:

- <u>*асиметрия*</u> $a_\xi=\frac{\nu_3}{\sigma_\xi^3}$ - *характеризира асиметричността;*
- <u>*ексцес*</u> $\varepsilon_\xi=\frac{\nu_4}{\sigma_\xi^4}-3$ - *характеризира стръмнината на графиката на* p_ξ.

Упражнения.

1. Случайната величина ξ има таблица на разпределение

ξ	0	1	2
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

. Да се намерят законите на разпределение на величините $\xi-1$, ξ^2 и $(\xi-1)^2$, математическите очаквания и дисперсиите на четирите случайни величини.

2. Да се намерят $D\xi$ и $\sigma\xi$ на величината

ξ	0	1	2	3	4
P	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

.

3. При игра на рулетка се залага на червено или черно. Половината от числата от 1 до 36 са червени, а другата половина – черни. Играч, заложил един лев, печели един лев, ако се падне цветът, на който е заложил и губи един лев, ако се падне противоположният цвят или някое от числата 0 и 00. Да се намери математическото очакване на печалбата.

4. Дисперсиите на независимите случайни величини ξ_1 и ξ_2 са $D\xi_1=11$ и $D\xi_2=4$. Да се намери средно квадратичното отклонение на $\eta=2\xi_1-5\xi_2$, $\zeta=\eta-\xi_2$.

5. Законът на разпределение на случайната величина ξ е $\begin{array}{c|cccc} \xi & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline P & \frac{1}{16} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{16} \end{array}$. Да се намери $P(\xi>0)$, модата, $E\xi$ и $\sigma\xi$. Да се построят графиките на плътността и на функцията на разпределението на величината.

§9. Непрекъсната случайна величина. Функция и плътност на разпределение. Мода, медиана, квантили и критични точки.

В тази глава ще разгледаме начините за определяне закона на разпределение на непрекъсната случайна величина, т.е. правилото, по което да определяме вероятността на произволно случайно събитие, свързано с такъв тип величина. Очевидно, основни са събития от вида $\{\xi=a\}$ – величината ξ да приеме дадена стойност a и от вида $\{a\le\xi<b\}$ – величината да приеме стойност в даден интервал (затворен, отворен или полуотворен), с помощта на които може да се представи всяко друго събитие. Както вече знаем (вж**. §6**), законът на случайна величина може да се определи чрез

__функция на разпределение__ (__интегрална функция на разпределението__),

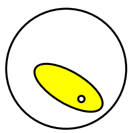
$$F_\xi(x)=P(\xi\le x)\quad x\in(-\infty,\infty),$$

за която предполагаме, че е непрекъсната за всяко x.

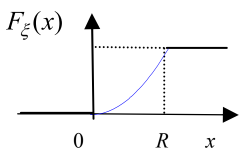
Първо ще покажем как може да се получи функцията на разпределение на една непрекъсната случайна величина.

Пример 9.1. Случайна частица M попада в кръг $k(O,R)$ с център O и радиус R. Вероятността частицата да попадне в произволна област D на кръга е пропорционална на лицето на областта. Измерва се разстоянието ξ от центъра O на кръга до частицата (фиг. 9.1). Да се намери и начертае графиката на функцията на разпределение на случайната величина ξ. Да се намерят вероятностите $P(-1<\xi\le 0)$, $P(R/3<\xi\le R/2)$.

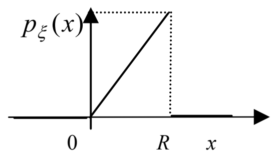
Решение. За вероятността на събитието $A=\{M\in D\}$ имаме $P(A)=\dfrac{S(D)}{\pi R^2}$ (виж **§3 -** геометрична вероятност). Трябва да пресметнем вероятността на събитието $\{\xi\le x\}$ за всяко x. Разглеждаме случаите:



Фиг. 9.1.



Фиг.9.2.



Фиг. 9.3.

1. $x<0$. Тогава $F_\xi(x)=P(\xi\le x)=0$, тъй като във всеки опит ξ приема неотрицателна стойност.

2. При $0\le x\le R$ събитието $\{0\le\xi\le x\}$ означава, че точката M попада в кръг с радиус x, т.е. $F_\xi(x)=P(M\in k(O,x))=\dfrac{\pi x^2}{\pi R^2}=\dfrac{x^2}{R^2}$
3. При $x<R$ събитието $\{\xi\le x\}$ винаги настъпва, защото R е най-голямата възможна стойност на ξ, откъдето $F_\xi(x)=1$,

Следователно, $F_\xi(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \dfrac{x^2}{R^2} & 0\le x\le R \\ 1 & x>R \end{cases}$, графиката на която е дадена на фиг 9.2. Сега може да намерим търсените вероятности

$$P(-1<\xi\le 0)=F(0)=0,\quad P(\frac{R}{3}<\xi\le\frac{R}{2})=F(\frac{R}{2})-F(\frac{R}{3})=\frac{1}{4}-\frac{1}{9}=\frac{5}{36}.♦$$

Функцията, която получихме в примера, има всички свойства, които би трябвало да има една функция на разпределение, а именно

1) $0\le F_\xi(x)\le 1$ за всяко x,
2) $F_\xi(x)$ *е непрекъсната и ненамаляваща за всяко x*
3) $\lim\limits_{x\to-\infty}F_\xi(x)=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}F_\xi(x)=1$,
4) $P(a<\xi\le b)=F_\xi(b)-F_\xi(a)$

За да намерим вероятността на събитието $\{\xi=b\}$, съгласно забележка **6.1**, извършваме граничния преход

$$P(\xi=b)=\lim_{a\to b}P(a<\xi\le b)=\lim_{a\to b}[F_\xi(b)-F_\xi(a)]=0.$$

Следователно, за непрекъснати случайни величини имаме:

$P(\xi=a)=0$, *за всяко a*

$$P(a<\xi<b)=P(a<\xi\le b)=P(a\le\xi\le b)=P(a\le\xi<b)=F_\xi(b)-F_\xi(a).\qquad(9.1)$$

Както за дискретните случайни величини, така и за непрекъснатите, функцията на разпределение не винаги е удобна. За непрекъснатите случайни величини се определя и друга функция, наречена плътност:

__Плътност на разпределението на непрекъснатата случайна величина ξ__ (__диференциална функция на разпределението)__ наричаме функцията, определена от равенството

$$p_\xi(x)=F'_\xi(x).$$

От дефиницията следва, че плътността може да се представи и като

$$p_\xi(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F_\xi(x+\Delta x)-F_\xi(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P(x\le\xi<x+\Delta x)}{\Delta x}$$

Плътността на разпределение е функция, която е дефинирана за всяко x и която има свойствата:

1) $p_\xi(x) \geq 0$ за всяко x; 2) $\int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(t)dt = 1$;

3) $P(a \leq \xi < b) = \int_a^b p_\xi(x)dx$; 4) $F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} p_\xi(t)dt$.

Следователно, между двете функции $p_\xi(x)$ и $F_\xi(x)$, характеризиращи вероятностно една непрекъсната случайна величина, съществуват следните връзки:

$$\boxed{p_\xi(x) = F_\xi'(x), \quad F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} p_\xi(t)dt}.$$

За пример **9.1**. $p_\xi(x) = F_\xi'(x) = \begin{cases} 2x/R^2 & x \in [0,R) \\ 0 & x \notin [0,R) \end{cases}$.

Вероятността случайната величина ξ да попаде в интервала $[a,b)$ може да се пресметне по една от двете формули (виж също (9.1))

$$P(a \leq \xi < b) = F_\xi(b) - F_\xi(a) \text{ или } P(a \leq \xi < b) = \int_a^b p_\xi(x)dx .$$

Геометрична интерпретация на последната формула е, че вероятността $P(a \leq \xi < b)$ е равна на лицето на криволинейния трапец образуван от графиката на плътността в интервала $[a,b]$.

Пример. 9.2. $F_\xi(x) = a + b\operatorname{arctg} x$ е функцията на разпределение на случайната величина ξ (<u>разпределение на Коши</u>). Да се намерят константите a и b. Да се намери плътността на вероятностите и да се построи графиката й.

Решение. Съгласно свойствата на функцията на разпределението

$$\lim_{x \to -\infty} F_\xi(x) = 0 \Rightarrow a + b \lim_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} x = 0 \Rightarrow a - b\frac{\pi}{2} = 0,$$

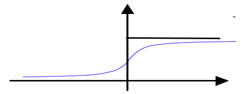
$$\lim_{x \to \infty} F_\xi(x) = 1 \Rightarrow a + b \lim_{x \to \infty} \operatorname{arctg} x = 1 \Rightarrow a + b\frac{\pi}{2} = 1,$$

откъдето получаваме $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{\pi}$, следователно,

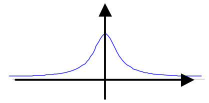
$$F_\xi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x .$$

За плътността на разпределение имаме $p_\xi(x) = F_\xi'(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$.

Графиките на двете функции са дадени на фиг.9.3 и фиг.9.4.



Фиг. 9.3



Фиг. 9.4

Плътността на разпределение дава по-ясна представа за характера на случайната величина, затова наименованието на закона е свързано с вида на функцията $p_\xi(x)$. Да разгледаме отново примери **9.1** и **9.2**. За **9.1.** $p_\xi(x) > 0$ само в интервала $[0,R)$, което означава, че този интервал е множеството от възможните стойности на величината. В пример **9.2,** тъй като $p_\xi(x) > 0$ за всяко x, теоретически величината може да приеме много големи или много малки стойности. От графиките на двете функции се вижда също, че величините не приемат всичките си стойности с еднаква вероятност, като за пример **9.1** най-голяма е тази вероятност за възможни стойности, близки до $x = R$, а за пример **9.2** $x = 0$.

Възможната стойност M_o на величината ξ, за която $p_\xi(x) = \max$, се нарича <u>мода.</u>

Мода на величината в пример **9.2** е възможната й стойност $x = 0$.

Плътността на величина от пример **9.1** не достига максималната си стойност, затова тази величина няма мода.

В много практически задачи, особено тези, свързани със статистиката, при дадено число $0 < p < 1$ за величината ξ се търсят:

- *възможната стойност x_p, за която $P(\xi < x_p) = p$. Тази стойност се нарича <u>квантил от ред p</u> и е решението на уравнението $F_\xi(x) = p$.*
- *възможната стойност $x_p^{(kp)}$, за която $P(\xi \geq x_p^{(kp)}) = p$. Нарича се <u>критична точка от ред p</u>. Очевидно, $x_p^{(kp)} = x_{1-p}$.*

Най-често срещаните квантили носят свои названия:

<u>Медиана</u> M_e (Q_2) – квантил от ред 0,5, т.е. $M_e = Q_2 = x_{0,5}$.

<u>Долен квартил</u> Q_1 – квантил от ред 0,25.

<u>Горен квартил</u> Q_3 – квантил от ред 0,75.

<u>Децили</u> – квантили от редове 0,1, 0,2 и т.н.

<u>Персентили</u> <u>(процентили)</u> – квартили от редове 0,01, 0,02 и т.н.

Забележка 9.1. Въведените определения се отнасят и за дискретни случайни величини.

Пример 9.3. Да се намерят долният и горният квартил и критичната точка от ред 0,25 на величината ξ от пример **9.2**.

Решение. Трябва да намерим квантилите $x_{0,25}$ и $x_{0,75}$, които са решенията на уравненията

$$F_\xi(x)=\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}x=\frac{1}{4} \Rightarrow \operatorname{arctg}x=-\frac{\pi}{4} \Rightarrow x=-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=-1.$$

$$F_\xi(x)=\frac{3}{4} \Rightarrow \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}x=\frac{3}{4} \Rightarrow \operatorname{arctg}x=\frac{\pi}{4} \Rightarrow x=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1.$$

Следователно, $x_{0,25}=-1$, $x_{0,75}=1$

Тъй като $x_{0,25}^{(kp)}=x_{1-0,25}=x_{0,75}$, то $x_{0,25}^{(kp)}=1$.♦

Упражнения.

1. Опитът се състои в случаен избор на точка P от отсечка AB с дължина 2 единици като вероятността за попадение в произволен подинтервал е пропорционална на дължината на интервала. Измерва се разстоянието ξ от средата M на интервала до точка P.
а) Да се намерят и начертаят графиките на функцията на разпределение и на плътността на случайната величина ξ.
б) Да се намерят законите на разпределение на величините $\xi-1$ и ξ^2.

2. Дадена е функцията на разпределение е $F_\xi(x)=\begin{cases}0 & x<-1\\ a+b\arcsin x & -1\le x\le 1\\ 1 & x>1\end{cases}$. Да се намерят константите a и b. За се намери плътността на вероятностите и да се построи графиката ѝ.

3. Плътността на вероятностите на величината ξ е $p_\xi(x)=ae^{-|x|}$. Да се намери константата a и $P(-1<\xi<2)$.

4. Дадена е функцията на разпределение $F_\xi(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 0{,}25x^2, & 0\le x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$ на случайната величина ξ. Да се намерят долният и горният квартил, медианата и критичните точки от ред $0{,}3$ и $0{,}1$.

5. Плътността на разпределение на непрекъсната случайна величина ξ е $p_\xi(x)=\begin{cases}kx(4-x^2) & x\in[0,2]\\ 0 & x\notin[0,2]\end{cases}$. Да се намери: а) стойността на k; б) функцията на разпределение; в) модата и медианата на величината ξ; г) $P(1\le x\le 2)$.

§10. Математическо очакване, дисперсия и други числени характеристики на непрекъснати случайни величини.

Нека непрекъснатата случайна величина ξ е зададена с *плътността* си $p_\xi(x)$ на разпределение. Математическото очакване, дисперсията и средно квадратичното отклонение се дефинират с формулите

$E\xi=\int_{-\infty}^{\infty}xp_\xi(x)dx$ - *<u>математическо очакване</u> (други означения $m\xi,\ M\xi,\ m_\xi$).*

$D\xi=E(\xi-E\xi)^2=\int_{-\infty}^{\infty}(x-E\xi)^2p_\xi(x)dx$ *<u>- дисперсия</u>*

$\sigma\xi=\sqrt{D\xi}$ *-<u>средно квадратично отклонение.</u>*

(ако съответните интеграли са сходящи).

Както при дискретните случайни величини, тези характеристики притежават свойствата:

Математическо очакване:

1. *ако C е константа, то $EC=C$.*
2. *ако C е константа, то $E(C\xi)=CE\xi$.*
3. *за произволни величини ξ_1 и ξ_2 $E(\xi_1\pm\xi_2)=E\xi_1\pm E\xi_2$.* (10.1)
4. *ако случайните величини ξ_1 и ξ_2 са независими, то*
   $E(\xi_1\xi_2)=E\xi_1 E\xi_2$.
5. *Математическото очакване на случайната величина $\eta=f(\xi)$, където f е неслучайна функция, се пресмята по формулата*
   $$E\eta=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)p_\xi(x)dx.$$

Дисперсия:

1. $D\xi=E\xi^2-(E\xi)^2$, *където* $E\xi^2=\int_{-\infty}^{\infty}p_\xi(x)x^2dx$. (10.2)
2. $D\xi\ge 0$ *за произволна случайна величина.*
3. *ако* C *е константа, то* $DC=0$.
4. *ако* C *е константа, то .*
5. *ако* ξ_1 *и* ξ_2 *са независими, то* $D(\xi_1\pm\xi_2)=D\xi_1+D\xi_2$.

Обобщения на разгледаните числени характеристики $E\xi$ и $D\xi$ са:

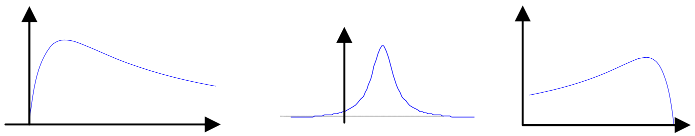
- <u>начални моменти от ред</u> k: $\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x) x^k dx \quad (k=1,2,\dots)$
- <u>централни моменти от ред</u> k: $\nu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x-E\xi)^k p_\xi(x) dx \; (k=2,3,\dots)$

Централните моменти могат да се пресметнат с помощта на началните по формули (8.4)

Ще отбележим още две важни характеристики, свързани с моментите:

- <u>асиметрия</u> $a_\xi = \dfrac{\nu_3}{\sigma_\xi^3}$ - <u>определя асиметричността на графиката</u> :

при $a_\xi > 0$: *при* $a_\xi = 0$ *при* $a_\xi < 0$



<u>ексцес</u> $\varepsilon_\xi = \dfrac{\nu_4}{\sigma_\xi^4} - 3$ - <u>характеризира стръмнината на графиката на</u> $p_\xi(x)$.

Пример 10.1. Да се намерят математическото очакване и дисперсията на величината с плътност $p_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & x \notin [a,b] \end{cases}$

(<u>равномерно разпределена в интервала</u> (a,b)).

Решение. Пресмятаме:

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x p_\xi(x) dx = \int_{-\infty}^{a} 0 dx + \frac{1}{b-a}\int_a^b x dx + \int_b^{\infty} 0 dx = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2} .$$

$$E\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_\xi(x) dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2 dx = \frac{(b^3-a^3)}{3(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{b^2+2ab+a^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12} . \blacklozenge$$

СЛУЧАЙНА ВЕЛИЧИНА – ОСНОВНИ РЕЗУЛТАТИ

1. Начини за определяне на случайните величини:

Дискретни случайни величини	**Непрекъснати случайни величини**
<u>функция на разпределение.</u> $F_\xi(x) = P(\xi < x)$ стъпаловидна ненамаляваща ф-ция. $0 \le F_\xi(x) \le 1$	<u>функция на разпределение.</u> $F_\xi(x) = P(\xi < x)$ ненамаляваща непрекъсната ф-ция. $\lim_{x\to-\infty} F_\xi(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} F_\xi(x) = 1$
<u>Плътност на разпределение</u> $p_\xi(x_i) = P(\xi = x_i) = p_i , \; i = 1,2,\dots$ *Таблица (закон) на разпределение:* $\begin{array}{c\|cccc} \xi & x_1 & x_2 & \dots & x_n \dots \\ \hline P & p_\xi(x_1) & p_\xi(x_i) & \dots & p_\xi(x_n) \end{array}$ $\sum p_\xi(x_i) = 1$ $F_\xi(x) = \sum_{x_i \le x} p_\xi(x_i)$	<u>Плътност на разпределение</u> $p_\xi(x) = F_\xi'(x)$ *Свойства:* $p_\xi(x) \ge 0$ $\int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x) dx = 1$ $F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} p_\xi(t) dt$
Вероятност на събитието $\{a \le \xi < b\}$ $P(a \le \xi < b) = F_\xi(b) - F_\xi(a) = \sum_{x_i : a \le x_i < b} p_\xi(x_i)$	***Вероятност на събитието*** $\{a \le \xi < b\}$ $P(a \le \xi < b) = F_\xi(b) - F_\xi(a) = \int_a^b p_\xi(x) dx$

2. Числени характеристики на случайните величини:

- ***<u>математическо очакване</u>:*** $E\xi = \begin{cases} \sum x_i p_\xi(x_i) & \xi - \text{дискр.} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x p_\xi(x) dx & \xi - \text{непр.} \end{cases}$.

Свойства на математическото очакване:

1) $EC = C$.
2) $E(C\xi) = CE\xi$.
3) $E(\xi_1 \pm \xi_2) = E\xi_1 \pm E\xi_2$.
4) $E(\xi_1\xi_2) = E\xi_1 \, E\xi_2$, *ако* ξ_1 *и* ξ_2 *са независими.*
5) *Математическото очакване на случайната величина* $\eta = f(\xi)$, *където* f *е неслучайна функция, се пресмята по формулата*

$$E\eta = \begin{cases} \sum f(x_k) p_\xi(x_k), & \xi - \textit{дискретна.} \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) p_\xi(x) dx, & \xi - \textit{непрекъсната} \end{cases}$$

• ***дисперсия***: $D\xi=\begin{cases}\sum (x_i-E\xi)^2 p_\xi(x_i) & \xi-\text{дискретна}\\ \int_{-\infty}^{\infty}(x-E\xi)^2 p_\xi(x)dx & \xi-\text{непрекъсната}\end{cases}$.

Свойства на дисперсията:

1) $D\xi=E\xi^2-(E\xi)^2$, 2) $DC=0$

3) $D(C\xi)=C^2D\xi$ 4) $D(\xi_1\pm\xi_2)=D\xi_1+D\xi_2$, *ако* ξ_1 *и* ξ_2 *са независими.*

• ***средно квадратично отклонение:*** $\sigma\xi=\sqrt{D\xi}$

• ***начални моменти от ред k***: $\mu_k=\begin{cases}\sum x_i^k p_\xi(x_i) & \xi-\text{дискр.}\\ \int_{-\infty}^{\infty}x^k p_\xi(x)dx & \xi-\text{непр.}\end{cases}$.

• ***централни моменти от ред*** k: $\nu_k=\begin{cases}\sum (x_i-E\xi)^k p_\xi(x_i) & \xi-\text{дискр.}\\ \int_{-\infty}^{\infty}(x-E\xi)^k p_\xi(x)dx & \xi-\text{непр.}\end{cases}$.

Връзки между централните и началните моменти:

$$\mu_0=1,\quad \mu_1=E\xi,\quad \mu_k=E\xi^k$$

$$\nu_2=D\xi=\mu_2-\mu_1^2$$

$$\nu_3=\mu_3-3\mu_1\mu_2+2\mu_1^3$$

$$\nu_4=\mu_4-4\mu_1\mu_3+6\mu_1^2\mu_2-3\mu_1^4.$$

• ***асиметрия:*** $a_\xi=\dfrac{\nu_3}{\sigma_\xi^3}$.

• ***ексцес:*** $\varepsilon_\xi=\dfrac{\nu_4}{\sigma_\xi^4}-3$.

Общи задачи

1. Дадена е дискретната случайна величина

ξ	0	1	2	3	4
P	p	$2p$	$4p$	$2p$	p

. Да се намерят: а) константата p; б) $P(0\le\xi<3)$; в) стойността на функцията на разпределение $F_\xi(x)$ за $x=3{,}4$; г) дисперсията.

2. $F_\xi(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ ax^2, & 0\le x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$ е функцията на разпределение на величината ξ. Да се намерят константата a, дисперсията, модата и медианата на ξ и вероятността величината ξ да приеме стойност, по-голяма от 1.

3. В една кутия има 4 бели и 2 черни топки. а) 0т кутията се изтеглят 3 топки по схемата с връщане. а) Намерете вероятностите на събитията A={2 от топките са бели}, B={поне 2 от топките са бели}. б) От кутията се изтеглят 3 топки по схемата без връщане. За случайната величина ξ - брой на изтеглените бели топки да се намерят законът на разпределението, $E\xi$, $D\xi$ и $\sigma\xi$.

4. Да се намерят математическото очакване, дисперсията и средно квадратичното отклонение на случайните величини ξ_1 и ξ_2 с таблици на разпределение съответно

ξ_1	−2	−1	0	1	2
P	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

,

ξ_2	−2	−1	0	1	2
P	0,05	0,3	0,3	0,3	0,05

5. Дадена е плътността $p_\xi(x)=a\cos x$ на величината ξ, която приема стойности в интервала $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Да се намерят: а) константата a; б) $P(|\xi|>\frac{\pi}{4})$; в) $E\xi$; г) функцията на разпределението на величината.

6. За един семестър студентите имат изпити по 4 дисциплини. Ако приемем, че броят ξ на изпитите, по които даден студент може да получи отличен е случайна величина с разпределение

ξ	0	1	2	3	4
P	0,10	p	0,40	0,15	0,05

, да се намери: а) вероятността студент да има само една отлична оценка; б) отличните оценки да са по-малко от 3; в) средният брой отлични оценки на един студент от курса; в) средно квадратичното отклонение на величината ξ.

7. Престоят ξ на зрителите на кинопрожекция (в часове) се моделира с непрекъсната случайна величина с плътност $p_\xi(t)=\begin{cases}kt^2 & t\in[0,2]\\ 0 & t\notin[0,2]\end{cases}$. а) Да се намерят константата k и $F_\xi(x)$. б) Какъв процент от зрителите напускат салона между 15 и 20 минута от началото на прожекцията? в) Какъв процент от зрителите са останали 5 минути преди края? г) До колко минути от началото си тръгват 5% от зрителите? д) В салона има 500 зрители. Колко места средно се освобождават след петнадесетата минута от започването на филма?

8. Дадена е функцията $F_\xi(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ a(-x^3+3x+2), & -1\le x\le 1\\ 1, & x>1\end{cases}$ на разпределение на непрекъснатата случайна величина ξ. Да се намерят а) константата a; б) $P(0<\xi<1)$; с) ексцесът и асиметрията на величината.

9. Дадена е плътността $p_\xi(x)=\begin{cases}k(1+x^2), & x\in[-1,1]\\ 0, & x\notin[-1,1]\end{cases}$ на непрекъснатата случайна величина ξ. Да се изчислят: а) коефициентът k; б) математическото очакване на величината; в) $\sigma=\sigma\xi$ г) $P(-\sigma<\xi<\sigma)$.