НЯКОИ ПО-ВАЖНИ ДИСКРЕТНИ И НЕПРЕКЪСНАТИРАЗПРЕДЕЛЕНИЯ

§11. Биномно разпределение, разпределение на Поасон и геометрично разпределение.

Предстои да разгледаме някои разпределения на дискретни случайни величини, които се срещат често в практиката.

Ще припомним развитието на нютоновия бином

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k=a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+\binom{n}{k}a^{n-k}b^k+\ldots+b^n,$$

коефициентите на който ще означаваме също и с C_n^k (виж **§4**) и са равни на

$$\boxed{C_n^k=\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!},\ k=0,1,\ldots,n,\ C_n^0=\binom{n}{0}=1,\ C_n^n=\binom{n}{n}=1}$$

Например,

$$C_n^1=n,\ C_n^2=\frac{n(n-1)}{2},\ C_n^3=\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3},\ C_{14}^5=\binom{14}{5}=\frac{14.13.12.11.10}{1.2.3.4.5}=2002\ .$$

Ще разглеждаме *последователност от взаимно независими опити*, т.е. такива опити, за които вероятността за настъпване на какъвто и да е резултат във всеки от тях не зависи от това какви резултати са настъпили в останалите опити. Независимите опити могат да се провеждат в еднакви или в различни условия. В първия случай вероятността за появяване на някакво събитие е една и съща, а във втория се мени от опит в опит.

Нека опитите се извършват при еднакви условия и във всеки от опитите наблюдаваме появата на някакво събитие A. Очевидно, вероятностите $P(A)=p$ за поява (успешен опит) и $P(\overline{A})=1-p=q$ за непоява (неуспешен опит) на събитието A не се променят.

Изложената схема на повторения на опитите, при която във всеки опит вероятността $P(A)=p$ за сбъдване на събитието A е постоянна, се *нарича* схема на Бернули.

> **Формула на Бернули.** *Ако вероятността p за сбъдване на събитието A във всеки от n независими опита е постоянна, то вероятността за това, че в n опита събитието A ще настъпи k пъти е*
>
> $$C_n^k p^k q^{n-k},\ k=0,1,\ldots,n,$$
>
> *където $q=1-p$ е вероятността на събитието $\overline{A}$.*

Доказателство. Да означим с 1,2,…,n номерата на опитите. Ако събитието A е настъпило точно в k опита, то техните номера образуват една ненаредена k-торка (комбинация без повторения (**§4**)). Например основната комбинация (1,2,…k) означава, че събитието A е настъпило в

първите k опита, а в останалите $n-k$ опита - не е настъпило. Следователно, броят на различните случаи, в които A настъпва k пъти е C_n^k, като вероятността за всеки един от тези случаи е $p^k(1-p)^{n-k}=p^kq^{n-k}$ (опитите са независими), т.е.

$$P=\underbrace{p^kq^{n-k}+p^kq^{n-k}+\ldots+p^kq^{n-k}}_{C_n^k\ пъти}=C_n^kp^kq^{n-k}\ .\blacklozenge$$

Биномно разпределение.

> *Законът на разпределение на вероятностите на величина ξ, която приема възможни стойности $k=0,1,\ldots,n$ с вероятности*
>
> $$P(\xi=k)=P_\xi(k)=C_n^kp^kq^{n-k},\quad (q=1-p) \qquad (11.1)$$
>
> *се нарича биномен с параметри n и p (бележи се също $\xi\sim B(n,p)$).*
>
> *Математическото очакване и дисперсията на биномно разпределена величина ξ са*
>
> $$E\xi=np,\ D\xi=npq\ . \qquad (11.2)$$

Различните величини с биномно разпределение могат да бъдат разнообразни по смисъл, но може да бъдат обединени в случаите:

- *ξ - брой на поява на A в n опита, ако вероятността $P(A)=p$ остава една и съща във всеки опит.* Например, брой на попаденията в мишена от 25 опита, брой на успешните опити при състезание и т.н.
- *ξ - брой на обектите, притежаващи дадено свойство, ако обектите са краен брой и вероятността който и да е обект да притежава свойството е р.* Например, брой на нестандартните изделия в дадена партида като вероятността за нестандартно изделие е p.

Получените в пример **7.3** разпределения са биномни с параметри $p=0{,}1$, $n=2$ и $p=0{,}2$, $n=2$.

Доказва се, че *модата* $M_o=k_0$ на величината ξ, (възможната стойност, за която вероятността $P_n(k)$ е най-голяма) се определя като цяло число, удовлетворяващо неравенството

$$np+p-1\le k_0\le np+p\ . \qquad (11.3)$$

Формулите (11.2) за математическото очакване и дисперсията на величината ξ (брой на поява на A в n опита) ще получим като представим величината по друг начин. Нека ξ_i е индикатор (пример **7.1**) на събитието A за i-тия опит. Законът на разпределение на ξ_i е

$$\begin{array}{c|cc}\xi_i & 0 & 1\\ \hline P & q & p\end{array}\ ,\qquad E\xi_i=p\ ,\ D\xi_i=q(0-p)^2+p(1-p)^2=qp(q+p)=qp\ .$$

Тъй като ξ_i приема единица, когато събитието A настъпи, то броят на поява на A в n опита е $\xi=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n$.

Тогава, съгласно свойствата на математическото очакване и дисперсията имаме

$E\xi = E\xi_1 + E\xi_2 + \ldots + E\xi_n = np$,

$D\xi = D\xi_1 + D\xi_2 + \ldots + D\xi_n = npq$.♦

Пример 11.1. Стреля се 14 пъти по обект, вероятността за попадение в който при единичен изстрел е 0,2. Да се изчисли: а) най-вероятният брой попадения и неговата вероятност; б) вероятността за унищожаване на обекта, ако за това са необходими не по-малко от 4 попадения.

Решение. Да означим с ξ броя на попаденията. Тази величина има биномно разпределение с параметри $p = 0{,}2$ и $n = 14$, (т.е. $\xi \sim B(14;0{,}2)$), следователно, $P(\xi = k) = P_\xi(k) = C_{14}^k 0{,}2^k 0{,}8^{14-k}$, $k = 0,1,\ldots,14$.

а) По формула (11.3) изчисляваме най-вероятния брой:

$14.0{,}2 - 0{,}8 \le k_0 \le 14.0{,}2 + 0{,}2 \ \Rightarrow\ 2 \le k_0 \le 3$, т.е. $\xi = 2$ или $\xi = 3$, за които

$P_\xi(2) = C_{14}^2 0{,}2^2 0{,}8^{12} \approx 0{,}25$, $P_\xi(3) = C_{14}^3 0{,}2^k 0{,}8^{11} \approx 0{,}25$.

б) $P(\xi \ge 4) = 1 - P(\xi < 4) = 1 - P_\xi(0) - P_\xi(1) - P_\xi(2) - P_\xi(3) \approx 0{,}302$.♦

Забележка 11.1. Очевидно, ако събитието A се появява k пъти в серия от n опита, то събитието $\overline{A}$ се появава $n-k$ пъти, т.е. за биномно разпределените величини $\xi \sim B(n,p)$ - брой на поява на A и $\overline{\xi} \sim B(n,q)$ - брой на поява на $\overline{A}$ е изпълнено $P(\xi = k) = P(\overline{\xi} = n-k) = C_n^k p^k q^{n-k}$.

Разпределение на Поасон. При големи стойности на n и малки стойности на p коефициентът C_n^k става много голям, а произведението $p^k q^{n-k}$ - много малко, с което грешките от изчисленията нарастват. Но ако от $E\xi = np$ изразим $p = E\xi / n$, то (прегрупираме множителите)

$$P_\xi(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \frac{n.(n-1)\ldots[n-(k-1)]}{k!}\left(\frac{E\xi}{n}\right)^k \left(1 - \frac{E\xi}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{(E\xi)^k}{k!}\frac{n}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{E\xi}{n}\right)^n\left(1-\frac{E\xi}{n}\right)^{-k} <$$

$$< \frac{(E\xi)^k}{k!}\left(1-\frac{E\xi}{n}\right)^n \to \frac{(E\xi)^k}{k!} e^{-E\xi} \text{ при } n \to \infty.$$

Следователно, $P_\xi(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \approx \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, където $\lambda = E\xi = np$. (11.4)

По този начин получаваме нова формула за пресмятане на вероятностите, която зависи от един параметър, равен на математическото очакване на величината. С това величината с разпределение $B(n,p)$ при голямо n и малко p се доближава до друго разпределение, което се нарича разпределение на Поасон.

Казваме, че дискретната случайна величина ξ е разпределена по <u>закона на Поасон</u> с параметър $\lambda > 0$ ($\xi \sim Po(\lambda)$), когато приема изброимо много стойности $0,1,2,\ldots,n,\ldots$ и

$$P(\xi = k) = p_\xi(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},\ k = 0,1,\ldots,n,\ldots \qquad (11.5)$$

Ще проверим, че и тук $\sum_{k=0}^{\infty} P(\xi = k) = 1$. Действително,

$\sum_{k=0}^{\infty} P(\xi = k) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$, тъй като $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$ е развитието на e^λ в ред.

Математическото очакване и дисперсията на величина ξ със разпределение по закона (11.5) са $E\xi = \lambda,\quad D\xi = \lambda$.

Законът на Поасон се нарича също *<u>закон на редките явления</u>*, защото случайна величина, която се състои в поява на събитие A в n опита при големи стойности на параметъра n и малки стойности на $P(A) = p << 1$, съгласно формула (11.4), се счита за разпределена по закона на Поасон с параметър $\lambda = np$ (математическото очакване на съответната биномна величина).

Друг, много често срещан случай на поасоново разпределение е така нареченият *<u>прост (поасонов) поток от събития</u> – последователност от събития, които настъпват в случаен момент на интервала t от времето и която има свойствата*:

- *<u>стационарност</u>* – вероятността $P(k)$ за настъпването на k събития за време t да зависи само от k и дължината t на интервала от времето;
- *<u>отсъствие на последствие</u>* - $P(k)$ не зависи от това колко събития са настъпили преди началото на разглеждания интервал от време;
- *<u>ординарност</u>* – появяване на две и повече събития за малък интервал от време е практически невъзможно.

Средният брой a на събития, които настъпват за единица време, се нарича *<u>интензивност</u>* на потока.

При изпълнение на тези условия, величината ξ - *брой на събитията, настъпили за интервал от време с дължина t, има разпределение на вероятностите (11.5), където $\lambda = at$ е средният брой събития, настъпващи за време t*. Такива величини са, например, броят на обаждания по телефона, брой на колите, минаващи за време t на дадено кръстовище и др.

Пример 11.2. Вероятността за попадение в целта при всеки изстрел е равна на 0,001. Да се намери вероятността от 1000 изстрела да има не по-малко от 2 попадения в целта (събитие A).

Решение. Ще приложим формулата на Поасон, за което изчисляваме $np=1000.0{,}001=1$, $e^{-\lambda}=e^{-1}=0{,}3679$, т.е. $P_{1000}(k)\approx\frac{0{,}3679}{k!}$, $k=0,1,2,\ldots$ Тогава $P(\xi\geq 2)=1-P(\xi<2)=1-P(\xi=0)-P(\xi=1)=0{,}2641$.

Пример 11.3. Средният брой поръчки за такси, постъпващи в диспечерски пункт за 1 минута, е равен на 3. Да се намери вероятността, че за 2 минути ще постъпят: а) 4 ; б) по-малко от 4; в) поне една поръчка. ($e^{-6}=0{,}0025$). Отг. а) 0,1339;б) 0,1522; в) 0,9975.

Накрая ще отбележим и други разпределения на дискретни случайни величини, някои от които вече разгледахме в примери.

Геометрично разпределение.

<u>Геометрично разпределение</u> с параметър $0<p<1$ *- величина с възможни стойности 1,2,…,n,… и вероятности* $P(\xi=n)=pq^{n-1}$, *където* $q=1-p$. *За тази величина* $E\xi=\frac{1}{p}$, $D\xi=\frac{q}{p^2}$

Такава е величината ξ - брой на проведените опити до поява на събитието A, вероятността на което във всеки опит е $P(A)=p$, разгледана в пример **7.2.**

Геометричното разпределение играе важна роля в теорията на масовото обслужване.

Например, група от хора чакат пред дадено гише. Често се приема, че вероятността да пристигне още един човек за единица време е p, а да не пристигне е q=1–p. Тогава, времето T на пристигане на следващия клиент е величина с геометрично разпределение като събитието $T=k$ означава, че следващият клиент е пристигнал след k минути.

Хипергеометрично разпределение. (виж пример **4.2.**)

<u>Хипергеометрично разпределение</u> с параметри натуралните числа N, $M\leq N$, $n\leq N$ *— величина* ξ *с възможни стойности* $i=0,1,2,\ldots,\min(M,n)$, *за която* $P(\xi=i)=\frac{C_M^i C_{N-M}^{n-i}}{C_N^n}$.

Тук $E\xi=np$, $D\xi=\frac{N-n}{N-1}np(1-p)$, *където* $p=\frac{M}{N}$.

Типичен пример за величина с хипергеометрично разпределение е броят на познатите числа при игрите на спорт-тото „5 от 35” или „6 от 49”. Например, ако означим с ξ броят на познатите числа от играта “6 от 49”, то $N=49$ - общ брой на числата, $M=6$ - брой на печелившите числа, $n=6$ - брой на попълнените числа във фиша. Тогава възможните

стойности на ξ са $i=0,1,\ldots,6$ с вероятности $P(\xi=i)=\frac{C_6^i C_{43}^{6-i}}{C_{49}^6}$ (виж също пример **4.3**)

Упражнения.

1. Вероятността за попадение в целта при един изстрел е p (събитие A). Да се намери законът за разпределение величината ξ - брой на попаденията в 4 опита.
2. Какво е по-вероятно за един от двама равносилни шахматисти – да спечели : а) 3 от 4 или 5 от 8 партии; б) не по-малко от 3 от 4 партии или не по-малко 5 от 8 партии.
3. Хвърлени са 6 правилни зарчета. Каква е вероятността за падането на: а) поне една; б) точно една; в) точно две единици.
4. При предаването на съобщение вероятността за изкривяване на всеки знак е 0,1. Каква е вероятността съобщение от а) 5 знака; б) 300 знака да бъде прието правилно.
5. Транспортират се 500 изделия като вероятността за повреда на изделие по пътя е 0,002. Да се намери вероятността, че са повредни: а) 3 изделия; б) по-малко от 3; в) повече от три; г.) поне едно изделие.
6. Дадена е случайната величина $\xi\sim B(8,1/3)$. Да се намерят $P(\xi\leq 2)$ - $P(\xi\geq 2)$.
7. Потокът от заявките, постъпващи в телефонна централа, е прост поасонов поток с интензитет 30 обаждания на 1 час. Да се намери вероятността, че за 1 минута ще постъпят не по-малко от 2 заявки.
8. Зарче се хвърля 5 пъти. Да се намери вероятността на събитията: а) нито веднъж не се пада шестица; б) поне веднъж се пада шестица; в) шестица се пада поне 4 пъти.
9. Вероятността за печалба от един лотариен билет е 0,01. Да се определи колко билета трябва да се закупят, че с вероятност не по-малка от 0,95, да има поне един печеливш билет.
10. В една кутия има 6 бели и 4 черни топки. а) 0т кутията се изтеглят 3 топки по схемата без връщане. Намерете вероятностите на събитията А={три от топките са бели}, В={поне една от тях е бяла}. б) От кутията се изтеглят 3 топки по схемата с връщане. За случайната величина ξ - брой на изтеглените бели топки да се намерят законът на разпределението, $E\xi$, $D\xi$ и $\sigma\xi$.
11. За биномно разпределена величина е известно, че $E\xi=3{,}75$, $\sigma\xi=0{,}25\sqrt{15}$. Да се намери плътността на вероятностите и начертае графиката й. Да се намери $P(2\leq\xi<4)$.
12. Даден е законът на разпределение на дискретната величина ξ:

ξ	-1	0	2	4	5
P	p	$0{,}3$	p	$0{,}2$	$0{,}3$

. Да се намерят: а) p; б) $E\xi$, $D\xi$ и $\sigma\xi$, в) $P(0\leq\xi<3)$.

13. В една кутия има 6 бели и 4 черни топки. От кутията се изтегля една топка. Ако изтеглената топка е бяла, то тя се връща в кутията, ако е черна се отстранява.
а) Да се съставят законите на величините ξ_i – брой на тегленията до поява на i-тата черна топка и да се намерят математическите им очаквания ($i=1,2,3,4$).
б) Да се намери математическото очакване на $\xi=\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4$. Да се опише какъв е смисълът на величината ξ и нейното математическо очакване.
14. Урна съдържа 3 червени и 7 черни топки. Ако се изтегли червена топка, тя се отстранява, а ако се изтегли черна – се връща. Средно колко пъти трябва да се

теглят топки, докато се изтеглят и трите червени топки?
15. Известно е, че вероятността за повреда на поне един елемент в устойство, състоящо се от 10 еднотипни елементи е 0,2. Да се намери вероятността за повреда на един елемент.

§12. Равномерно и показателно разпределение. Сума на две и повече случайни величини.

Ще разгледаме случайна величина ξ с плътност (виж пример **10.1**)

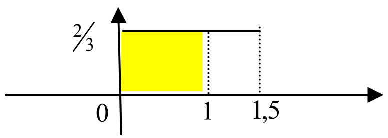
$p_\xi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & x\in[a,b]\\ 0, & x\notin[a,b]\end{cases}$ - *равномерно разпределение в интервала* $[a,b]$,

$$E\xi=\frac{a+b}{2},\ D\xi=\frac{(b-a)^2}{12}\ .$$

Равномерно разпределение имат величини, за които нямаме основание да смятаме, че приемат някои възможни стойности по-често от други.

Пример 12.1. На кръстовище е монтиран светофар, който свети 1 мин. зелено и 0,5 мин. червено. Автомобил се приближава към кръстовището в случаен момент, който не е свързан с работата на светофара. Да се намери вероятността, че автомобилът ще пресече кръстовището без да спира (събитие А).

Решение. Моментът ξ на пристигане на автомобилът е случайна величина, равномерно разпределена в интервала $(0;1{,}5]$, равен на периода на смяна на светлината на светофара (фиг. 12.1). Следователно, $P(A)=P(\xi<1)=\dfrac{2}{3}$. ♦



Фиг.12.1.

2. *<u>Показателно (експоненциално разпределение)</u> – величина* ξ *с плътност*

$$p_\xi(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases} \text{ и } E\xi=\frac{1}{\lambda} \text{ и } D\xi=\frac{1}{\lambda^2}. \qquad (12.2)$$

Показателно разпределение имат случайните величини:

- продължителност на работа на части от оборудване,
- време на разпад на радиоактивен атом,
- продължителност на телефонен разговор,

най-общо казано, *времето до настъпване на някакво събитие*.

Пример 12.2. (*<u>Връзка между разпределението на Поасон и показателното разпределение</u>*). Да разгледаме прост поасонов поток от събития с интензивност λ (например пристигане на пътници на автобусна спирка) и величината T - времето от момента на наблюдение до първото настъпване на събитие (например времето от заминаването на поредния автобус до пристигането на първия пътник на спирката). Да се докаже, че величината T има показателно разпределение с параметър λ.

Решение. Интензивността λ на потока е равна на средния брой на настъпващи събития за единица време. Следователно, вероятността за време t да настъпят k събития (да пристигнат k пътника) е $P(k,t)=\dfrac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$ (Поасон) .

Ще намерим функцията на разпределение $F_T(t)=P(T\le t)$. За целта трябва да определим вероятността $P(T\le t)$ за всяко t.

Ако $t<0$, то, очевидно, $F_T(t)=0$.

Ако $t\ge 0$, то имаме $P(T\le t)=1-P(T>t)$. Събитието $P(T>t)$ означава, че за време t не е настъпило нито едно събитие, т.е. $P(T>t)=P(0,t)=e^{-\lambda t}$, следователно $F_T(t)=1-e^{-\lambda t}$.

От тук, $p_T(t)=F'_T(t)=\lambda e^{-\lambda t}$, $t\ge 0$ и е $p_T(t)=0$ при $t<0$. ♦

Пример 12.3. Изследвайки броя на падналите метеорити в Сахара, е установено, че средно на 10 дни някъде в Сахара пада малък метеорит. Каква е вероятността, че метероит ще падне в първия ден от наблюдението между 6 и 18 часа.

Решение. Случайната величина T – времето от започването на наблюдението до първото падане на метеорит има показателно разпределение, за което $ET=\dfrac{1}{\lambda}=10 \Rightarrow \lambda=0{,}1 \Rightarrow p_T(t)=0{,}1e^{-0{,}1t}$, $t>0$, $F_T(t)=1-e^{-0{,}1t}$. Тогава

$$P(6\text{часа}<T<18\text{часа})=P\left(\frac{1}{4}<T<\frac{3}{4}\right)=F_T\left(\frac{3}{4}\right)-F_T\left(\frac{1}{4}\right)=0{,}0479\ .♦$$

Сума на две и повече независими непрекъснати случайни величини. Да разгледаме сумата $\zeta=\xi+\eta$ на две случайни величини. Величината ζ приема възможна стойност $\zeta=z$, ако сумата от приетите стойности от величините ξ и η е равна на z. В такъв случай, ако величината ξ е приела стойност $\xi=u$, то величината η трябва да приеме стойността $\eta=z-u$. Така се получава, че плътността на величина ζ е

$$p_\zeta(z)=\int_{-\infty}^{\infty}p_\xi(u)p_\eta(z-u)du\ ,$$

където $p_\xi(x)$ и $p_\eta(x)$ са плътностите на величините ξ и η (функцията

$p_\zeta(x)$ се нарича <u>*конволюция на функциите*</u> $p_\xi(x)$ и $p_\eta(x)$).

Както вече знаем, ако случайните величини ξ и η са независими, за математическото очакване и дисперсията на величината $\zeta=\xi+\eta$ имаме

$$E\zeta=E\xi+E\eta\ ,\ D\zeta=D\xi+D\eta\ .$$

Пример 12.4. Като използуваме тези резултати, ще намерим плътностите на величините, които са сума на две, три и повече независими величини, имащи показателно разпределение с един и същ параметър λ.

Решение. Нека величините $\xi_1,\xi_2,\ldots\xi_n,\ldots$ имат плътност на разпределение (12.2).

1) За плътността на $\zeta_2=\xi_1+\xi_2$ имаме $p_{\zeta_2}(z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}p_{\xi_1}(u)p_{\xi_2}(z-u)du$,

където z е произволно. Подинтегралната функция е различна от нула, ако u е решение на системата неравенства $\left|\begin{array}{l}u\geq 0\\ z-u\geq 0\end{array}\right.$, т.е. $0\leq u\leq z$, затова

$$p_{\zeta_2}(z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}p_{\xi_1}(u)p_{\xi_2}(z-u)du=\int\limits_0^z\lambda e^{-\lambda u}.\lambda e^{-\lambda(z-u)}du=\lambda^2e^{-\lambda z}\int\limits_0^z du=\lambda^2e^{-\lambda z}z\ .$$

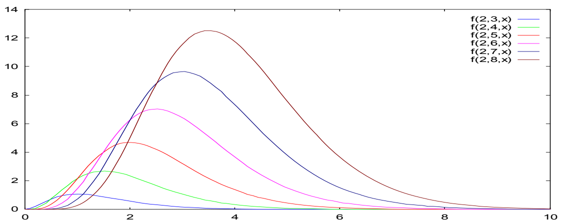
Следователно, $p_{\zeta_2}(z)=\begin{cases}\lambda^2ze^{-\lambda z} & z\geq 0\\ 0 & z<0\end{cases}.$

2) За плътността на $\zeta_3=\xi_1+\xi_2+\xi_3=\zeta_2+\xi_3$ по аналогичен начин получаваме

$$p_{\zeta_2}(z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}p_{\zeta_2}(u)p_{\xi_3}(z-u)du=\int\limits_0^z\lambda^2e^{-\lambda u}.\lambda e^{-\lambda(z-u)}udu=\frac{\lambda^3z^2}{2!}e^{-\lambda z}\ \text{ за } z\geq 0\ .$$

По индукция може да се докаже, че величината $\zeta_n=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n$ има плътност на разпределение (сменяме z с x)

$$p_{\zeta_n}(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^nx^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda x} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases},\quad E\zeta_n=\frac{n}{\lambda}\ ,\ D\zeta_n=\frac{n}{\lambda^2}\ ,$$



Фиг. 12.2

Графиките на плътностите на разпределение при $\lambda=2$ и $n=3,\ldots,7$ са дадени на фиг 12.2

§13. Нормален закон на разпределение.

Ще разгледаме една величина, която има изключително значение както за теорията на вероятностите, така и за статистиката.

За величината ξ с плътност на разпределение

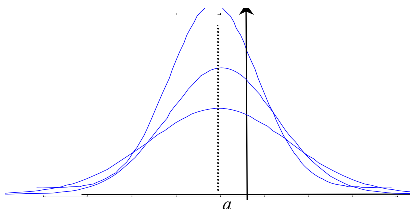
$$p_\xi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\qquad(13.1)$$

се казва, че е подчинена на <u>нормален закон (закон на Гаус)</u> с параметри a и σ. Параметрите a и σ съвпадат с основните числени характеристики

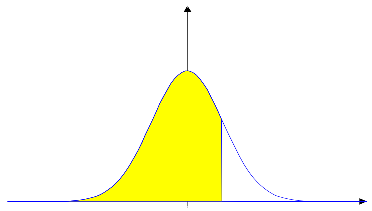
$$a=E\xi\ ,\quad \sigma=\sigma\xi=\sqrt{D\xi}\ .$$

$$a_\xi=0,\ \ e_\xi=0$$

За краткост казваме, че величината с плътност (13.1) има $N(a,\sigma)$ - разпределение ($\xi\sim N(a,\sigma)$). От графиката на $p_\xi(x)$, дадена на фиг. 13.1, се вижда, че максимумът ѝ съвпада с математическото очакване, а кривата е толкова по-стръмна, колкото по малко е средно квадратичното отклонение. Абсциси на инфлексните точки на функцията са числата $a-\sigma$ и $a+\sigma$.



Фиг.13.1.



Фиг. 13.2.

Величината със закон на разпределение $N(0,1)$, се нарича <u>*стандартна нормална величина*</u> и обикновено се означава с Z. Графиката на <u>*плътността*</u>

$$\varphi(x)=p_Z(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

на стандартната нормална величина е дадена на фиг. 13.2. Лицето на защрихованата област е равно на стойността на <u>*функцията на разпределение*</u>

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\ ,\quad F(-x)=1-F(x)\ .$$

Стойностите на функцията $F(x)$ за $x \geq 0$ се вземат от таблица (стр.168).
От свойствата на функцията на разпределение следват равенствата:

$$\boxed{P(Z<\beta)=F(\beta)\,,\quad P(Z>\alpha)=1-F(\alpha)\,,\quad P(\alpha<Z<\beta)=F(\beta)-F(\alpha)}$$

Например, $P(Z<1{,}46)=F(1{,}46)=0{,}9279$;

$$P(Z\geq 2{,}21)=1-F(2{,}21)=1-0{,}9864=0{,}0136\,;$$

$$P(Z<-0{,}3)=F(-0{,}3)=1-F(0{,}3)=1-0{,}6179=0{,}3821\,;$$

$$P(0<Z<1)=F(1)-F(0)=0{,}8413-0{,}5=0{,}3413\,.$$

За нормално разпределената величина $\xi \sim N(a,\sigma)$ е в сила формулата:

$$P(\alpha<\xi<\beta)=F\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-F\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right) \qquad (13.2)$$

приложение на която са частните случаи:

$$P(\xi<\beta)=F\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right),\quad P(\alpha<\xi)=1-F\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$$

$$P(|\xi-a|<\delta)=2F\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)-1 \qquad (13.3)$$

Последната формула дава вероятността величината ξ да се отклони от математическото си очакване не повече от δ. Например,

$$P(|\xi-a|<2\sigma)=2F\left(\frac{2\sigma}{\sigma}\right)-1=2.F(2)-1=0{,}9544\,.$$

$$P(|\xi-a|<3\sigma)=2F\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right)-1=2.F(3)-1=0{,}9973\,.$$

Тъй като 0,9973 е близко до 1, то в сила е така нареченото

__Правило на трите сигми__: за нормално разпределена величина е изпълнено приближеното равенство

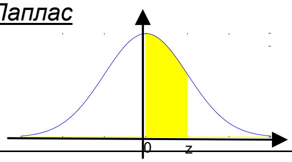
$$P(|\xi-a|<3\sigma)\approx 1\,,$$

т.е. неравенството $|\xi-a|<3\sigma$ е практически достоверно.

Забележка 13.2. В някои справочници е дадена таблица за

__функцията на Лаплас__

$$\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^z e^{-\frac{x^2}{2}}dx\,,\qquad \Phi(-z)=\Phi(z)$$



За $x>0$ между двете функции имаме връзката

$$\boxed{F(x)=0{,}5+\Phi(x)}$$

Функцията на Лаплас се използува по същия начин - за величина със закон на разпределение $N(a,\sigma)$ имаме

$$P(\alpha<\xi<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right),\qquad P(|\xi-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

Фундаменталната роля, която има нормалното разпределение се обяснява с това, че сума от независими случайни величини с нарастването на броя на събираемите асимптотически се доближава до нормално разпределена величина, което се доказва *__в централната гранична теорема__* (**§15**).

Друго свойство на нормалното разпределение:

Теорема 13.1. *Ако са дадени две независими величини с нормално разпределение $X_1 \in N(a_1,\sigma_1)$ и $X_2 \in N(a_2,\sigma_2)$, то сумата им е нормално разпределена величина с математическо очакване a_1+a_2 и дисперсия $\sigma_1^2+\sigma_2^2$, т.е. $X_1+X_2 \in N(a_1+a_2,\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2})$.*

Теоремата може да се обобщи за повече събираеми.

Пример 13.1. Големината ξ на произвежданите от завод детайли е нормално разпределена случайна величина с $a=1{,}5cm$ (проектна големина), $\sigma=0{,}04cm$ (точност на изработката). а) Да се пресметне вероятността произведено изделие да е нестандартно, ако се допуска отклонение от проектната големина $\pm 0{,}07$. б) Какво отклонение от проектната големина може да се очаква с вероятност 0,97?

Решение. а) $P(A)=P(|\xi-1{,}5|>0{,}07)=1-P(|\xi-1{,}5|\leq 0{,}07)$.

По формула (13.3) $P(|\xi-1{,}5|\leq 0{,}07)=2F\left(\frac{0{,}07}{0.04}\right)-1=2F(1{,}75)-1\approx 0{,}92$.

(от таблицата $F(1{,}75)=0.9599$). Следователно, $P(A)=1-0{,}92=0{,}08$.

б) Търсим за каква стойност на ε е изпълнено $P(|\xi-1{,}5|<\varepsilon)=0{,}97$.

Отново по формула (13.3) :

$$P(|\xi-1{,}5|<\varepsilon)=2F\left(\frac{\varepsilon}{0{,}04}\right)-1=0{,}97\Rightarrow F\left(\frac{\varepsilon}{0{,}04}\right)=0{,}985\,,$$

откъдето от таблицата определяме $\frac{\varepsilon}{0{,}04}=2{,}17\Rightarrow \varepsilon\approx 0{,}09$.

Пример 13.2. Случайната величина ξ е подчинена на закона $N(2{,}1)$. Да се намери плътността на вероятностите и вероятността на събитието $0<\xi<3$.

Упражнения.

1. Да се изчислят: $F(1{,}2)$, $F(-2)$, $F(2{,}34)$, $F(-0{,}75)$.

2. За величината $Z \sim N(0,1)$ да се изчислят вероятностите:

$P(1{,}5<Z<2{,}34)$, $P(-1{,}2<Z<2{,}2)$, $P(-2{,}5<Z<2{,}5)$, $P(Z<1{,}44)$,
$P(Z<-2{,}2)$, $P(Z>0{,}35)$, $P(Z>-2{,}6)$.

3. Дадена е случайната величина $X \sim N(36,10)$. Да се изчислят: а) $P(X>48)$; $P(30<X<40)$; б) $P(|X-36|<0{,}03)$.

4. Дадена е величината $\xi \sim N(56,10)$. Да се намерят: $P(\xi>68)$, $P(56<\xi<65)$, $P(42<\xi<52)$, $P(\xi<36)$.

5. За нормално разпределената величина е дадено, че $P(\xi>58{,}39)=0{,}0217$, $P(\xi<41{,}82)=0{,}0287$. Да се намерят математическото очакване и средно квадратичното отклонение на величината.

6. Да се намери x, ако а) $F(x)=0{,}9660$, б) $F(x)=0{,}3783$, в) $F(x)=0{,}9495$, г) $F(x)=0{,}0224$, д) $F(x-3)=0{,}0591$, е) $F\left(\dfrac{x}{3}\right)=0{,}8087$, ж) $F(2-x)=0{,}6217$.

7. Дължината на детайл е нормално разпределена величина с математическо очакване 450 мм и средно квадратично отклонение 3 мм. Да се намери вероятността произволно избран детайл да има дължина между 444 мм и 452 мм.

8. Установено е, че средната височина X на 11-годишните момчета е 146 см със средно квадратично отклонение 8 см.
а) Какво разпределение може да да приемем за величината X? Какъв е процентът на момчетата, които са високи между 138 см и 154 см?
б) Какъв е процентът на момчетата, които са по-ниски от 130 см ?
в) Какъв е процентът на момчетата, които са по-високи от 162 см?

9. Спортист счита, че времето, за което пробягва 200м, е нормално разпределена случайна величина като средното му постижение е 22,8 сек.
а) Ако е известно, че в 20% от случаите времето му е над 23,3 сек, да се пресметне средно квадратичното отклонение σX;
б) Най-доброто постижение в клуба е 21,82. Да се намери вероятността спортистът да надмине рекорда, ако $\sigma X=0{,}42$

§14. Други разпределения на непрекъснати случайни величини

В тази глава ще използуваме функция, наречена

<u>Гама-функция</u>: $\Gamma(z)=\int_0^\infty x^{z-1}e^{-x}dx$ *със свойства*

1) $\Gamma(1)=1$, 2) $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$. $\Rightarrow$ $\Gamma(n+1)=n!$, n-цяло.

3) $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\dfrac{\pi}{\sin z\pi}$.

От свойство 3) се получава важното следствие

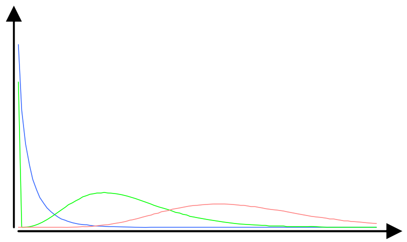
$$\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$ (*<u>интеграл на Поасон</u>*) (полагаме $z=\frac{1}{2}$)

Ще разгледаме някои разпределения, които намират широко приложение в статистиката и които са свързани със стандартното нормално разпределение $N(0,1)$.

Хи-квадрат разпределение.

Ако $\xi_1,\ldots,\xi_k \in N(0,1)$, то казваме, че величината $\xi=\xi_1^2+\ldots+\xi_k^2$ има χ^2 - <u>разпределение с k степени на свобода.</u> (хи-квадрат-разпределение) с означение $\xi \sim \chi^2(k)$.

Математическото очакване и дисперсията на величината са
$$E\xi=k,\ D\xi=2k.$$



Фиг.14.1.

Плътността на разпределение на величината е

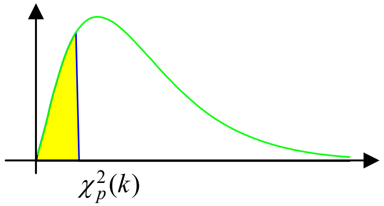
$$p_\xi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}x^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}.$$

На фиг.14.1 са дадени графики при различни стойности на параметъра k. Има таблици за критичните точки или квантилите на тази величина в зависимост от броя k на степените на свобода.

Квантилът от ред p на величина с k степни на свобода ще означаваме с $\chi_p^2(k)$, а стойността му е дадена таблицата на стр. 170.

Ще отбележим, че има и други означения, а също че в някои литературни източници степените на свобода се означават с *df (degree of freedom)*.

Таблицата за квантилите при дадено k дава стойността $x=\chi_p^2(k)$, за която лицето на защрихованата област е равна на p (фиг 14.2)



Фиг.14.2.

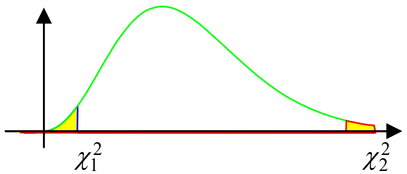
Пример 14.1. Дадена е величината $\xi \sim \chi^2(12)$. Да се намерят тези нейни възможни стойности χ_1^2 и χ_2^2, за които $P(\xi<\chi_1^2)=P(\xi>\chi_2^2)=0{,}025$. Да се намери $P(\chi_1^2<\xi<\chi_2^2)$

Решение. Очевидно, χ_1^2 е квантилът от ред 0,025 на величината ξ, който намираме от таблицата: $\chi_1^2=\chi_{0,025}^2(12)=4{,}40$.

χ_2^2 е критичната точка от ред 0,025. Имаме

$$P(\xi>\chi_2^2)=1-P(\xi\le\chi_2^2)=1-0{,}025=0{,}975,$$

т.е. χ_2^2 е квантил от ред 0,975 и $\chi_2^2=\chi_{0,975}^2(12)=23{,}34$ (фиг.15.3).



Фиг.14.3.

Накрая изчисляваме

$$P(\chi_1^2<\xi<\chi_2^2)=1-P(\xi\le\chi_1^2)-P(\xi\ge\chi_2^2)=1-0{,}025-0{,}025=0{,}95 \ \blacklozenge$$

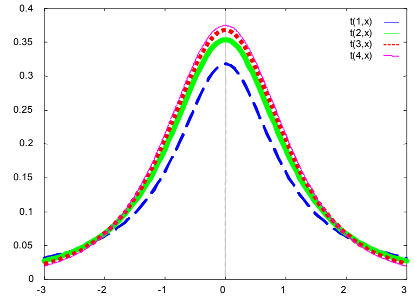
Разпределение на Стюдънт.

Ако $\xi\in N(0,1)$ и η има χ^2 - разпределение с k степени на свобода, то казваме, че величината $\zeta=\dfrac{\xi}{\sqrt{\dfrac{\eta}{k}}}$ има <u>разпределение на Стюдънт</u> (t - разпределение) с k степни на свобода (пишем $\zeta\sim t(k)$).

Плътността на величината $\zeta\sim t(k)$ се получава по формулата

$$p_t(x)=Cx^{\frac{k}{2}-1}\left(1+\frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}, x\in(-\infty,\infty), \qquad (14.1)$$

където $C=\dfrac{1}{\sqrt{k\pi}}\dfrac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}$ е константа. Функцията (14.1) е четна, затова графиката ѝ е симетрична относно оста Оy (фиг.14.4).



Фиг.14.4

Частен случай при $k=1$ е <u>*разпределението на Коши*</u> $p(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$ (пример **9.2**).

Квантилът от ред p на t-разпределението ще означаваме с $t_p(k)$, където k са степените на свобода.

От таблицата на стр. 169 могат да се определят квантилите от редове 0,9, 0,95, и т.н., които намират най-широко приложение.

Пример 14.2. Да се намери симетричен относно началото интервал, в който величината $\xi\sim t(12)$ попада с вероятност 0,9.

Решение. Търсим x, за което $P(-x<\xi<x)=P(|\xi|<x)=0{,}9$. Тъй като графиката на функцията е симетрична, то

$$P(\xi<-x)=P(\xi>x)=\frac{1}{2}(1-0{,}9)=0{,}05,$$

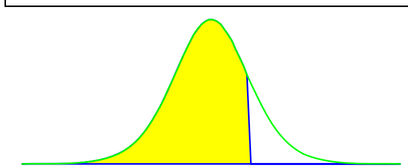
т.е. x е критична точка от ред 0,05. Като имаме предвид връзката между квантил и критична точка, получаваме (виж таблицата на стр. 169):

$$x=t_{0,05}^{(kr)}(12)=t_{1-0,05}(12)=t_{0,95}(12)=1{,}78.$$

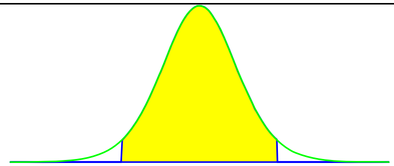
Забележка 14.1. Освен таблица за квантилите на t-разпределението, има и таблици, даващи при дадени p и k вероятността $P(-x<\xi<x)=P(|\xi|<x)=p$.

*И двете таблици са съставени от стойностите на x, за които лицето на област под графиката на плътността на разпределение е равно на p, но за първата тази област е дадена на фиг. 14.5а (**едностранна област**), а за втората – на фиг. 14.5б. (**двустранна област**). Ако означим а t_p и t'_p числата, получени от двете таблици при една и съща стойност на р, то имаме връзката*

$$\boxed{t_p = t'_{2p-1} \quad , \quad t'_p = t_{\frac{1+p}{2}} \, ,}$$



Фиг.14.5а.

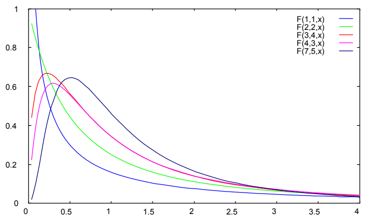


Фиг.14.5б.

Разпределение на Фишер-Снедекор.

Ако $\xi \sim \chi^2(k_1)$ *и* $\eta \sim \chi^2(k_2)$, *то за величината* $\zeta = \dfrac{\frac{\xi}{k_1}}{\frac{\eta}{k_2}}$ *казваме, че има* *<u>F-разпределение със степени на свобода</u>* k_1 *и* k_2 *(<u>разпределение на Фишер-Снедекор</u>), което записваме като* $\zeta \sim F(k_1,k_2)$ *).*

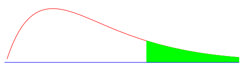
Плътността на тази величина е (фиг 14.6)



Фиг.14.6.

$$p_\xi(x) = \begin{cases} C(k_2 + k_1 x)^{-\frac{k_1+k_2}{2}} x^{\frac{k_1}{2}-1}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases} \qquad C = \frac{\Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)} (k_1)^{\frac{k_1}{2}} (k_2)^{\frac{k_2}{2}} .$$

За стойностите $\alpha = 0{,}1,\ 0.05$ и т.н. при дадени k_1 *и* k_2 са съставени таблици **за критичните точки** $F_\alpha^{kr}(k_1,k_2)$ на разпределението (виж стр. 171 и 172), т.е. възможната стойност $F_\alpha^{kr}(k_1,k_2)$ на величината $\zeta \sim F(k_1,k_2)$, за която (фиг.14.7)



Фиг. 14.7

$$P(\zeta > F_\alpha^{kr}(k_1,k_2)) = \alpha .$$

Напомняме отново връзката между квантил $F_p(k_1,k_2)$ от ред p и критична точки от ред $1-p$:

$$\boxed{F_p(k_1,k_2) = F_{1-p}^{kr}(k_1,k_2)} \qquad (14.2)$$

Освен това от определението на разпределението на Фишер следва, че ако $\zeta \sim F(k_1,k_2)$ и $\omega \sim F(k_2,k_1)$, то $\zeta = \dfrac{1}{\omega}$. Тогава, за произволно $x_1 > 0$ събитиeто $\{\zeta > x_1\}$ е еквивалентно на събитието $\left\{\dfrac{1}{\omega} > x_1\right\}$, което може да се представи във вида $\left\{\omega < \dfrac{1}{x_1}\right\}$.

Нека x_1 е критична точка от ред α на $\zeta \sim F(k_1,k_2)$, т.е. $P(\zeta > x_1) = \alpha$. Тогава $P\left(\omega < \dfrac{1}{x_1}\right) = \alpha$ и, следователно, $\dfrac{1}{x_1}$ е квантил от ред α на разпределението $\omega \sim F(k_2,k_1)$.

По този начин получаваме следната връзка между квантилите и критичните точки на разпределенията $F(k_1,k_2)$ и $F(k_2,k_1)$:

$$\boxed{F_\alpha(k_1,k_2) = \frac{1}{F_\alpha^{kr}(k_2,k_1)}, \quad F_\alpha^{kr}(k_1,k_2) = \frac{1}{F_\alpha(k_2,k_1)} \qquad (14.3)}.$$

НАЙ-ВАЖНИ ДИСКРЕТНИ И НЕПРЕКЪСНАТИ РАЗПРЕДЕЛЕНИЯ

1. *<u>Биномно разпределение с параметри n и p:</u>* $\xi \sim B(n,p)$, *ако възможните и стойности са* $k = 0,1,\ldots,n$ *и:*

$$P(\xi = k) = p_\xi(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \ E\xi = np, \ D\xi = npq \quad (q = 1-p)$$

Случаи на биномно разпределение: ξ *- брой на поява на събитие* A *в* n *опита, ако във всеки опит* $P(A) = p$.

2. *<u>Разпределение на Поасон с параметър</u>* $\lambda > 0$ *:(*$\xi \sim Po(\lambda)$*), когато приема изброимо много стойности* $0,1,2,\ldots,n,\ldots$ *и*

$$P(\xi = k) = p_\xi(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \ k = 0,1,\ldots,n,\ldots, \qquad E\xi = \lambda, \quad D\xi = \lambda .$$

Случаи на разпределение на Поасон:

1) $\xi \sim B(n,p)$ *като параметърът е* n *много голям, а параметърът* p *– много малък (редки явления), тогава* $\xi \sim Po(\lambda)$ *като* $\lambda = np$.

2) ξ *- брой на настъпващите за даден интервал от време елементарни събития при прост поток от събития интензивност* λ.

3. *<u>Нормално разпределение с параметри a и σ</u> : $\xi \sim N(a,\sigma)$), ако възможните и стойности са $x\in(-\infty,\infty)$ и*

$$p_\xi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

$$E\xi=a,\quad D\xi=\sigma^2,\ \sigma\xi=\sqrt{D\xi}=\sigma\quad a_\xi=0,\ e_\xi=0$$

$$P(\alpha<\xi<\beta)=F\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-F\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right),\qquad P(|\xi-a|<\delta)=2F\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)-1,$$

където $F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ *е функцията на разпределение на* $Z\sim N(0,1)$.

4. *Други разпределения с приложенив в статистиката:*

– χ^2 - *<u>разпределение с k степени на свобода:</u>* $\xi\sim\chi^2(k)$, *ако* $\xi=\xi_1^2+\ldots+\xi_k^2$.

– *<u>Разпределение на Стюдънт</u> с k степни на свобода:* $\zeta\sim t(k)$, *ако* $\zeta=\frac{\xi}{\sqrt{\eta/k}}$, *където* $\xi\in N(0{,}1)$ *и* $\eta\in\chi^2(k)$.

– *<u>Разпределение на Фишер-Снедекор със степени на свобода</u>* k_1 *и* k_2 *:* $\zeta\sim F(k_1,k_2)$, *ако* $\zeta=\frac{\xi}{k_1}:\frac{\eta}{k_2}$, *където* $\xi\sim\chi^2(k_1)$ *и* $\eta\sim\chi^2(k_2)$.

Общи задачи.

1. Какво разпределение има величината и какви са параметрите на разпределението й, ако величината е: а) брой на печатните грешки на страница от книга, ако е известно, че средно на 20 страници има по 1 грешка; б) брой на победите на един спортист в 5 състезания, като вероятността за победа във всяко от тях е 0,8; в) количество лекарство в ампула от 10 мг, ако за произволна ампула количеството лекарство (в мг) е число в интервала (9,91; 10,09). г) продължителност (в години) на експлоатация на уред, ако е установено, че средната продължителност за уреди от този тип е 2 години; д) теглото на стока, измерено без систематическа грешка, ако точността на теглилката е ± 10 г.

2. Дадена е случайната величина $X\sim N(55{,}10)$. Да се изчислят а) $P(X>70)$; б) $P(55<X<65)$; в) $P(42<X<52)$.

3. Средният брой на грешните свързвания в автоматична телефонна централа е $\lambda=0{,}5$. а) Да се напише формулата за плътността на величината ξ - брой на грешните свързвания. Да се намери вероятността да има: а) точно три, б) повече от три грешни свързвания.

4. Съобщение, се състои от 3 символа. Всеки символ, независимо от останалите се изкривява с вероятност 0,1. а) Каква е вероятността съобщението да бъде прието без изкривяване. За по-голяма надеждост, съобщението се предава 2 пъти. б) Да се състави законът на величината ξ - брой на вярно предадените съобщения и намерят математическото очакване и дисперсията й. в) Каква е вероятността поне едно от съобщенията да е прието без изкривяване?

5. Теглото на жителите на дадена област е нормално разпределена случайна величина със средна стойност 80 кг и средно отклонение 8кг. а) Да се скицира графиката на плътността на теглото X на жител от областта. б) Какъв е процентът на жителите, които са по-тежки от 90 кг? в) Каква е вероятността случайно избран жител да е по-лек от 60 кг?

6. Средният брой съобщения за 1 час по електронната поща е 0,6. а) Каква е вероятността за 1 час да има повече от 1 съобщения? б) Пощата е проверявана в 10, 11, 12 и 13 часа. Каква е вероятността да не е получено нито едно съобщение?

7. Времето за извършване на дадена работа е нормално разпределена случайна величина с математическо очакване 60 минути и средно квадратично отклонение 30 минути. Каква е вероятността че произволно избран работник: а) ще завърши работата за по-малко от 30 минути; б) за какво време ще извършат работата 99% от работниците?

8. Случайната величина ξ има разпределение на Поасон с математическо очакване $E\xi=1$. Да се намери: а) $P(\xi<2)$; б) $P(\xi>2)$.

9. Известно е, че 20% от студентите работят. а) Да се състави таблицата на разпределение на величината брой на работещите сред 3 произволно избрани студента. б) Да се намерят математическото очакване и дисперсията на величината.

10. Дадена е случайната величина $\xi\sim B(8,1/3)$. Да се намери: а) $P(\xi\le 2)$, б) $P(\xi\ge 2)$.

11. В аквариум има 2 големи и 3 малки рибки. Ако се хване малка рибка, тя се пуска обратно в аквариума, ако се хване голяма – се продава. Колко средно опита трябва да се извършат, че в аквариума да останат само малки рибки?

12. Отборът *А* печели кой да е мач с вероятност 2/3. Каква е вероятността от 4 мача отборът да спечели не по-малко от половината?

13. Ако $\xi\sim B(10{,}0{,}4)$ и $\eta\sim N(0{,}1)$, какви са математическото очакване и дисперсията на величината $\xi+\eta$.

14. За да се спечели награда, тряба да се съберат 5 различни картинки, поставени по случаен начин във всеки пакет детски бонбони. Средно колко пакета трябва да се закупят, за да се съберат десетте различни картинки?

15. Да се изчисли $P(\xi<0{,}95)$, ако: а) $\xi\sim\chi^2(12)$; б) $\xi\sim t(13)$; $\xi\sim F(8{,}10)$.

16. В кутия има 4 червени и 5 черни топки. Изважда се една топка и ако е червена, се връща обратно, ако е черна се отстранява. Да се намери колко е средният брой тегления докато се отстранят всички черни топки.

17. Автомат пълни бутилки като съдържанието им по стандарт е 300 мл. Ако съдържанието на бутилката е по-малко от 290, то тя се бракува. Какъв е процентът на бракуваните бутилки? в) Ако съдържанието на бутилката е повече от 315, то предприятието търпи загуби. Какъв е процентът на препълнените бутилки?