ВЕРОЯТНОСТ НА СЛУЧАЙНО СЪБИТИЕ

§1. Случен експеримент и случайно събитие. Действия със събития.

Теорията на вероятностите е математическа дисциплина, изучаваща закономерностите на случайните явления. Едно от основните понятия в нея е случайното събитие – всяко явление, което при едни и същи условия може да се осъществи, а може и да не се осъществи. Случайни събития се срещат навсякъде – такива са, например, повреда на техническо устройство, шум при приемане на съобщение, печалба от лотария и др.

Един експеримент (опит) се състои в осъществяване на съвкупност от точно определени условия и отчитане на произтичащите от тях събития, които накратко ще наричаме изходи. Всяко осъществяване на съвкупността от условията наричаме *реализация* на експеримента. В теорията на вероятностите, се разглеждат само такива експерименти, които могат да се повтарят произволен брой пъти, поне теоретически.

Един експеримент се нарича *случаен* (*стохастичен, вероятностен*) , ако при непроменени условия е възможно настъпването на взаимно изключващи се изходи. *Всеки наблюдаван резултат от случаен експеримент ще наричаме случайно събитие*.

Пример 1.1. В една кутия има 4 еднакви топки, които са номерирани 1, 2, 3 и 4. Опитът се състои в изтегляне по случаен начин на две топки без връщане. Възможни са 6 случая (изходи), които ще означаваме накратко

$$\omega_1=\{1,2\},\ \omega_2=\{1,3\},\ \omega_3=\{1,4\},\ \omega_4=\{2,3\},\ \omega_5=\{2,4\},\ \omega_6=\{3,4\} \tag{1.1}$$

като в резултат винаги настъпва точно един от тях. Например, събитието A={изтеглени топки с номера, по-малки от 3} се сбъдва само, ако резултатът от опита е ω_1, и не настъпва, ако имаме някой от изходите ω_2, ω_3, ω_4, ω_5 или ω_6; събитието B={изтеглени са две топки} винаги настъпва, докато събитието C={изтеглени са три топки} в този опит е невъзможно. ♦

Събитие, което се сбъдва при всяка реализация на опита, се нарича достоверно. Събитие, което не настъпва при нито една реализация на опита, се нарича невъзможно. Ако събитието A не е настъпило, казваме, че е настъпило противоположното му събитие $\overline{A}$.

Противоположното на достоверното събитие е невъзможното.

Казваме, че събитието A влече събитието B (B е следствие от A), което означаваме с $A\subset B$, ако всеки път, когато настъпва събитието A, настъпва и събитието B.

Например, ако е настъпило събитието A от пример **1.1**, то е настъпило и събитието D={сумата от номерата на изтеглените топки е по-малка от 5}, т.е. $A\subset D$. Очевидно е, че за този пример са изпълнени също и отношенията $A\subset B$, $D\subset B$.

Ако $A\subset B$ и $B\subset A$, то казваме, че събитията A и B са *еквивалентни* и пишем $A=B$. В пример **1.1** $A=\omega_1$.

Казваме, че две събития A и B са *несъвместими* , ако в никоя реализация на опита не е възможна появата и на двете събития. Очевидно, всяко събитие и неговото противоположно са несъвместими събития. В пример **1.1** събитията C и B също са несъвместими.

Казваме, че събитията $A_1,A_2,\ldots,A_n$ образуват *пълна група несъвместими събития*, ако две по две са несъвместими и в резултат на проведен опит винаги настъпва някое от тях.

Всяко събитие и неговото противоположно образуват пълна група несъвместими събития.

Изходите $\omega_1,\ldots,\omega_6$ на опита в пример **1.1** са пример за пълна група несъвместими събития, при това не е трудно да се убедим, че всяко събитие, което е свързано с този опит, може да се изрази чрез тях. Например, $A=\{\omega_1\}$, $\overline{A}=\{\omega_2,\ldots,\omega_6\}$, $D=(\omega_1,\omega_2\}$, т.е. A, $\overline{A}$ и D са подмножества на множеството $\Omega=\{\omega_1,\ldots,\omega_6\}$, състоящо се от всички възможни изхода на експеримента. По подобен начин всяко случайно събитие, наблюдавано в този опит, може да се разглежда като подмножество на множеството Ω.

Всеки изход ω на един експеримент наричаме елементарно събитие. Множеството Ω от всички възможни елементарни събития наричаме пространство на елементарните събития на експеримента.

Всяко случайно събитие A се явява подмножество на Ω, т.е. $A\subseteq\Omega$, елементите на което са елементарните събития, при които настъпва случайното събитие. Тези елементарни събития се наричат благоприятни за A.

Достоверното събитие ще означаваме с Ω, тъй като благоприятно за него е всяко елементарно събитие, а невъзможното ще означаваме с $\varnothing$.

Действия със събития. Нека са дадени две събития A и B. От тях образуваме нови събития, които ще наричаме:

- *Сума (обединение) $A\bigcup B$ ($A+B$, A или B), ако настъпи поне едно от събитията A и B.*
- *Произведение (сечение) $A\bigcap B$ (AB, A и B) , събитие, което се състои в съвместно настъпване на A и B.*
- *Разлика $B\setminus A$ - събитие, състоящо се в сбъдване на събитието $B\bigcap\overline{A}$, т.е. настъпва събитието B, но не настъпва събитието A.*

Пример 1.2. Опитът се състои в подхвърляне на една монета два пъти. Разглеждаме събитията A={при първото подхвърляне се пада лице}, B={при второто подхвърляне се пада лице}. **а)** Да се изрази чрез събитията A, B, $\overline{A}$ и $\overline{B}$ събитието C={при двата опита се падат различни страни на монетата} и противоположното му събитие. **б)** Да се състави пространството Ω на елементарните събития за този опит и да се изразят чрез тях събитията A, B, C, $A\bigcup B$, $A\bigcap B$ $\mathbf{A}\backslash\mathbf{B}$, $\mathbf{B}\backslash\mathbf{A}$

Решение.

а) Събитието C настъпва, когато или първия път се пада лице, (събитието A), а втория път не се пада лице (събитието $\overline{B}$) или обратното – първия път се пада герб $\overline{A}$, а втория – лице (B), т.е. $C=(A\bigcap\overline{B})\bigcup(\overline{A}\bigcap B)$.

Събитието $\overline{C}$ настъпва, ако двата пъти монетата се е обърнала от една и съща страна, което се изразява като $\overline{C}=(A\bigcap B)\bigcup(\overline{A}\bigcap\overline{B})$.

б) $\Omega=\{ЛЛ, ЛГ, ГЛ, ГГ\}$. Събитието A настъпва, ако са настъпили изходите $ЛЛ$ и $ЛГ$, т.е. A се представя чрез подмножеството $\mathbf{A}=\{ЛЛ, ЛГ\}$ на Ω. Аналогично, подмножествата с които се представят останалите събития са (изкажете с думи събитията):

$\overline{\mathbf{A}}=\{ГЛ, ГГ\}$, $\mathbf{B}=\{ГЛ, ЛЛ\}$, $\overline{\mathbf{B}}=\{ГГ, ЛГ\}$, $\mathbf{C}=\{ЛГ, ГЛ\}$, $\overline{\mathbf{C}}=\{ГГ, ЛЛ\}$

$\mathbf{A}\bigcup\mathbf{B}=\{ЛЛ, ЛГ, ГЛ\}$ (всички благоприятни случаи за събитията A и B).

$\mathbf{A}\bigcap\mathbf{B}=\{ЛЛ\}$ (единственият общ случай, при който настъпват A и B),

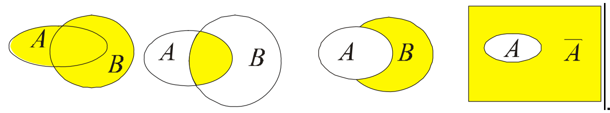
$\mathbf{A}\backslash\mathbf{B}=\{ЛГ\}$ (настъпва A и не настъпва B),

$\mathbf{B}\backslash\mathbf{A}=\{ГЛ\}$ (настъпва B и не настъпва A).♦

Както се вижда от примера, ако Ω е пространство от елементарни събития за даден опит и събитията A и B се разглеждат като подмножества $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ на Ω, т.е. $\mathbf{B}\subset\Omega$, $\mathbf{A}\subset\Omega$, то

- *<u>сумата</u> на събитията A и B съвпада с <u>обединението</u> $\mathbf{A}\bigcup\mathbf{B}$, което се състои от елементите, принадлежащи поне на едно от множествата $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$.*
- *<u>произведението</u> на събитията A и B съвпада с <u>сечението</u> $\mathbf{A}\bigcap\mathbf{B}$, което е съставено от всички елементи, принадлежащи както на $\mathbf{A}$, така и на $\mathbf{B}$.*
- *<u>разликата</u> $B\backslash A$ на събитията A и B съвпада с <u>разликата</u> $\mathbf{B}\backslash\mathbf{A}$ на множествата $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, т.е. множеството състоящо се от всички елементи на $\mathbf{B}$, които не принадлежат на $\mathbf{A}$.*

Действията с множества са представени по-долу чрез множества от точки в равнината:



$\mathbf{A}\bigcup\mathbf{B}$ $\mathbf{A}\bigcap\mathbf{B}$ $\mathbf{B}\backslash\mathbf{A}$ $\overline{A}$

Ще цитираме някои основни равенства, отразяващи основните свойства на въведените действия, които са в сила както за множества, така и за събития:

1) $A\bigcup\varnothing=\varnothing\bigcup A=A$, 2) $A\bigcap\varnothing=\varnothing\bigcap A=\varnothing$

3) $A\bigcup\overline{A}=\Omega$, 4) $A\bigcap\overline{A}=\varnothing$,

Комутативни закони:

5) $A\bigcup B=B\bigcup A$; 6) $A\bigcap B=B\bigcap A$

Асоциативни закони (независимост от реда на извършване на действията)

7) $A\bigcup(B\bigcup C)=(A\bigcup B)\bigcup C=A\bigcup B\bigcup C$, 8) $A\bigcap(B\bigcap C)=(A\bigcap B)\bigcap C=A\bigcap B\bigcap C$

Дистрибутивни закони (разкриване на скоби):

9) $A\bigcap(B\bigcup C)=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$ 10) $A\bigcup(B\bigcap C)=(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$,.

Формули на Де Морган:

11) $\overline{A\bigcup B}=\overline{A}\bigcap\overline{B}$, 12) $\overline{A\bigcap B}=\overline{A}\bigcup\overline{B}$.

Упражнения.

1. Монета се подхвърля до първата поява на герб. Да се опише пространството от елементарните събития. Да се изразят събитията A={герб се пада при третото подхвърляне}, B={герб се пада не по-рано от третото подхвърляне}.

2. Опитът се състои в подхвърляне три пъти на една монета. Пространството от елементарни събития е Ω ={ЛЛЛ,ЛЛГ,ЛГЛ,ГЛЛ,ГГЛ,ГЛГ,ЛГГ,ГГГ}. а) Да се опишат с думи събитията A={ЛЛЛ,ЛЛГ,ЛГЛ,ЛГГ}, B={ЛЛЛ,ГГГ}, C={ЛЛГ,ЛГЛ,ГЛЛ}, D={ЛЛГ, ЛГЛ, ГЛЛ, ГГЛ, ГЛГ, ЛГГ, ГГГ} и техните противоположни събития. б) Кои от събитията са следствие на събитието C?

3. Избрано е случайно едно число. Ако A={числото завършва на нула}, B={числото се дели на 5}, опишете събитията $B\backslash A$, $A\bigcap B$, $A\bigcup B$.

§2. Относителна честота и вероятност на случайно събитие. Условна вероятност.

Известно е, че някои случайни събития се случват по-често, а други – по-рядко. Например, много по-рядко се печели шестица от тотото, отколкото четворка. Затова възниква необходимостта да се въведе някаква мярка - реално число, наречено *вероятност*, което да характеризира колко често настъпва дадено събитие. По неговата стойност можем да преценим възможността за настъпване на събитието, да сравним шансовете за появата различни събития, т.е. да познаваме по-цялостно случайните експерименти и явления.

Естественият път за определяне колко често настъпва едно събитие A в даден случаен експеримент е да се направи серия от опити и да се преброи колко пъти е настъпило събитието.

<u>Относителна честота</u> на събитието A наричаме отношението $w(A)=\dfrac{m}{n}$, където m е броят на поява на A в серия от n опита.

Доказва се, че относителната честота има свойствата:

1) $0\le w\le 1$, $w(\Omega)=1$, $w(\varnothing)=0$,

2) $w(A\bigcup B)=w(A)+w(B)$, *ако A и B са несъвместими събития,*

3) $w(B|A)=\dfrac{w(A\bigcap B)}{w(A)}$, *където с $w(B|A)$ е означена относителната честота на събитието B, при условие, че събитието A е настъпило.*

Пример 2.1. Естествоизпитателят Буфон, подхвърлял една монета 4040 пъти като резултатът бил 2048 пъти се пада лице (събитие A) и 1992 пъти герб (събитие B), т.е. относителните честоти на тези събития са $w(A)=\dfrac{2048}{4040}\approx 0{,}5069$, $w(B)=\dfrac{1992}{4040}\approx 0{,}4931$, откъдето може да се заключи, че двете събития имат почти равни шансове за поява. ♦

Очевидно, относителната честота дава представа колко често настъпва дадено събитие, но все пак зависи от серията, от която е изчислена. Затова статистически определената честота на събитието не носи строг характер, а дава само практически указания какви свойства би трябвало да има вероятността на едно събитие, за да служи като количествена мярка на обективната възможност за сбъдване на събитието. Изходни свойства в определението за вероятност се вземат свойства **1)** и **2)** на относителната честота. Тук те не се доказват, а се приемат като задължителни, затова са наречени *аксиоми*. (Строгата дефиниция за вероятност на събития, която за пръв път е дадена от Андрей Колмогоров, няма да разглеждаме).

На всяко случайно събитие A, наблюдавано при даден случаен експеримент, се съпоставя число $P(A)$, наречено <u>вероятност</u> на събитието A, със свойствата:

Аксиома 1*.* $0\le P(A)\le 1$.

Аксиома 2. $P(\Omega)=1$.

Аксиома 3. *За произволна крайна или безкрайна редица от наблюдаеми събития $A_1,A_2,\dots,A_n,\dots$, такива, че $A_i\bigcap A_j=\varnothing$* при $i\ne j$

$$P(A_1\bigcup A_2\bigcup\dots\bigcup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\dots+P(A_n). \qquad (2.1)$$

Следствие от аксиомите са свойствата:

1) $P(\overline{A})=1-P(A)$.

2) $P(\varnothing)=0$.

3) $P(A)=P(A\bigcap B)+P(A\bigcap\overline{B})$, където B е произволно събитие. (2.2)

4) $P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(A\bigcap B)$. (2.3)

Доказателство. **1)** Събитията A и $\overline{A}$ са несъвместими като $A\bigcup\overline{A}=\Omega$. Тогава от аксиоми **2** и **3** получаваме $1=P(A\bigcup\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})$, откъдето следва **1)**.

2) $\overline{\Omega}=\varnothing \;\Rightarrow\; P(\varnothing)=P(\overline{\Omega})=1-P(\Omega)=1-1=0$.

3) Използваме че $A=A\bigcap\Omega=A\bigcap(B\bigcup\overline{B})=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap\overline{B})$. Формула (2.2) следва от несъвместимостта на последните две събития.

4) Представяйки A и B като сума от несъвместими събития, получаваме $P(A)=P(A\bigcap B)+P(A\bigcap\overline{B})$, $P(B)=P(A\bigcap B)+P(\overline{A}\bigcap B)$. Събираме двете равенства:

$$P(A)+P(B)=P(A\bigcap B)+P(A\bigcap B)+P(A\bigcap\overline{B})+P(\overline{A}\bigcap B).$$

Сборът на последните три събираеми е равен на $P(A\bigcup B)$, откъдето получаваме формула (2.3). ♦

Разглежда се също и така наречената условна вероятност:

Вероятността на едно събитие A, при допълнителното условие, че е настъпило някакво събитие B означаваме с $P(A|B)$ (или $P_B(A)$) и наричаме <u>условна</u>. Ако $P(B)>0$ и $P(A\bigcap B)$ е вероятността за съвместното им появяване (вероятност на произведение от събития), то

$$P(A|B)=\frac{P(A\bigcap B)}{P(B)}. \qquad (2.4)$$

От (2.4) следват следните формули за вероятност на произведение и сума на събития:

<u>Вероятност на произведение</u> *(съвместна поява на събития):*

$$P(A\bigcap B)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B).$$

- *За n събития:* $P(A_1\bigcap A_2\bigcap\dots\bigcap A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)\dots P(A_n|A_1\bigcap\dots\bigcap A_{n-1})$. (2.5)
- *За независими събития:* $P(A\bigcap B\bigcap C)=P(A)P(B)P(C)$.

Да разгледаме отново на формулите за сума на събития. Формула (2.1) се отнася за две и повече от две ***несъвместими*** събития, докато формула (2.3) се отнася само за две ***съвместими*** събития. За да намерим вероятността на сумата $C=A_1\bigcup\dots\bigcup A_n$ - поява на поне едно от събитията $A_1,\dots,A_n$ (били те съвместими или не) можем да постъпим по следния начин. Противоположното събитие $\overline{C}$ ={не е настъпило нито едно от събитията $A_1,\dots,A_n$}, се изразява като $\overline{C}=\overline{A}_1\bigcap\dots\bigcap\overline{A}_n$ и вероятността му се намира по формула (2.5). Тогава $P(C)=1-P(\overline{C})$, откъдето получаваме, че

Вероятността на сума *(поява на поне едно от събитията $A_1,\ldots,A_n$) е*

$$P(A_1\bigcup\ldots\bigcup A_n)=1-P(\overline{A}_1\bigcap\ldots\bigcap\overline{A}_n).$$

Пример 2.4. Гражданин търси на пазара 2 книги. Известно е, че вероятността да намери първата книга е равна на 0,3, да намери втората книга е 0,2, а да намери и двете е 0,04. Да се намери вероятността гражданинът да намери поне една от книгите.

Решение. Ако въведем събитията A={гражданинът намира първата книга}, B={гражданинът намира втората книга}, то $P(A)=0{,}3$, $P(B)=0{,}2$. Тогава $A\bigcap B$ ={гражданинът намира и двете книги} и $P(A\bigcap B)=0{,}04$. Търсим вероятността на събитието C={гражданинът намира поне една от книгите}, т.е. $P(C)=P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(A\bigcap B)=0{,}3+0{,}2-0{,}04=0{,}46$.

Пример 2.5. Ученик трябва да избере 2 от три избираеми дисциплини френски, история и география. Той би избрал френски с вероятност $5/8$, история също с вероятност $5/8$. Каква е вероятността да избере: а) география; б) география и история; в) френски и история.

Решение. Означаваме F={ученикът избира френски}, I={ученикът избира история}, G={ученикът избира география}, като $P(F)=P(I)=\frac{5}{8}$.

Ученикът трябва да избере два от общо три предмета, затова и трите събития $F\bigcup I$, $I\bigcup G$ и $G\bigcup I$ са достоверни. По формулата за сума на съвместими събития имаме $P(F\bigcup I)=P(F)+P(I)-P(F\bigcap I)=1$, откъдето получаваме, че $P(F\bigcap I)=P(F)+P(I)-P(F\bigcup I)=\frac{5}{8}+\frac{5}{8}-1=\frac{1}{4}$.

а) Събитието $\overline{G}$ ={не избира география}={избира френски и история}, т.е. $\overline{G}=F\bigcap I$. Тогава $P(G)=1-P(\overline{G})=1-P(F\bigcap I)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

б) Вероятността $P(I\bigcap G)$ ще намерим като използуваме, че и събитието $I\bigcap G$ и $\overline{F}$ са еквивалентни, т.е., $P(I\bigcap G)=P(\overline{F})=1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$.

в) Аналогично, $P(F\bigcap G)=P(\bar{I})=1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$. ♦

Забележка. Събитията $F\bigcap I$, $I\bigcap G$ и $F\bigcap G$ образуват пълна група събития, което лесно може да се провери. Проверете също, че събитията $F\bigcup I$, $I\bigcup G$ и $G\bigcup I$ са достоверни като използвате формула (2.3).

Упражнения.

1. Нека $P(A\bigcap B)=1/4$, $P(\overline{A})=1/3$ и $P(B)=1/2$. $P(A\bigcup B)=?$.

2. Събитията A и B са несъвместими и имат положителни вероятности. Да се докаже, че A и B са зависими. Вярно ли е обратното?

3. Събитието A влече събитието B, при това $P(B)=3P(A)\neq 0$. Да се изчислят $P(A|B)$ и $P(B|A)$ и да се определи зависими ли са събитията A и B.

4. Известно е, че $P(B)=0{,}4$, $P(A|B)=0{,}3$, $P(A|\overline{B})=0{,}2$. Да се намерят вероятностите $P(A)$, $P(\overline{A}\bigcap\overline{B})$, $P(\overline{A}\bigcup\overline{B})$ и $P((A\backslash B)\bigcup(B\backslash A))$.

5. Известно е, че $P(A|B)=1/3$, $P(B|A)=3/5$ и $P(B)=2/5$. Да се намерят $P(A\bigcap B)$, $P(A)$ и $P(A\bigcup B)$.

6. Събитията А и В са независими, а $P(A\bigcup B\bigcup C)=1$. Ако $P(A)=2/3$, $P(B)=1/4$ и $P(C)=1/4$, да се намерят $P(A\bigcup B)$ и $P(B\bigcup C)$.

§3. Статистическа, класическа и геометрична вероятност.

Аксиоми **1**, **2** и **3** позволяват чрез вероятностите на елементарните събития да се намери вероятността на произволно събитие, свързано със случайния експеримент. Въпросът за това как да се определи вероятността на елементарните събития не се разглежда. На практика тези вероятности се определят в зависимост от условията на експеримента по начин, който се съгласува най-добре с практическите наблюдения.

Статистическа вероятност. Както отбелязахме, една интуитивна оценка на шанса за сбъдване на едно събитие е относителната му честота, получена при многократно повторение на експеримента. Важен експериментално доказан факт е устойчивостта на честотата. Забелязва се, че при увеличение на броя на опитите в серията честотата на събитието се колебае около една и съща стойност независимо нито от броя на опитите, нито от серията опити.

Числото $P(A)$, към което се стремят относителните честоти

$$\frac{m_1}{n_1},\ \frac{m_2}{n_2},\ \frac{m_3}{n_3},\ldots,\ \frac{m_i}{n_i},\ldots$$

на поява на събитието A при увеличаване на броя n_i на опитите в сериите, се нарича <u>статистическа</u> <u>вероятност</u> на събитието A.

По този начин статистическата вероятност е вероятност, получена на базата на опитни данни. Такъв характер имат много събития, като заболяване от дадена болест, повреда на уред за определен срок, производство на некачествено изделие и др.

Пример 3.1. Изследва се точността при изпълнение на сервиза на тенисист и са получени следните резултати:

Брой на опитите	100	500	1000
Точни попадения	76	370	738
Относит. честота	0,76	0,74	0,736

От тук можем да приемем, че вероятността за правилно изпълнение на сервиза на този спортист е 0,74.

Класическа вероятност. Както отбелязахме, за да установи, че падането на лице или герб при подхвърляне на една правилна монета са равновероятни, Буфон е направил 4040 опита (пример **2.1**). Но можеше да се разсъждава така. Пространството от елементарните събития $\Omega=\{Л,Г\}$ при подхвърлянето на монета има два елемента. Събитието A={пада се лице} има един благоприятен случай. Тогава може да приемем, че $P(A)=\dfrac{1}{2}$, $P(\overline{A})=\dfrac{1}{2}$, което напълно се покрива с опитните данни.

Ще отбележим, че важни условия за такива разсъждения са: 1) елементарните събития са краен брой и 2) те са *равновероятни*, т.е. поради симетричност нямаме основание да считаме, че някое елементарно събитие по-често се случва от другите. В такъв случай имаме основание за следната дефиниция за вероятност на събитие.

Нека множеството $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n\}$, описващо резултатите от случайния експеримент, се състои от краен брой равновероятни изходи (елементарни събития) и нека A е събитие, което се наблюдава в този експеримент.

Вероятност на събитието A, ще наричаме отношението $P(A)=\dfrac{m}{n}$,

където m и n са съответно броят на благоприятните за A и броят на всички възможни и равновероятни елементарни събития.

Пример 3.2. В кутия има 2 бели и три черни топки. От кутията се изтеглят 3 топки. Каква е вероятността и трите топки да са черни (събитие C), ако изтеглените топки: а) се връщат; б) не се връщат?

Решение. Ако A_i ={i-тата топка е черна}., то $C=A_1\cap A_2\cap A_3$.

а) Събитията A_i са зависими. Тогава

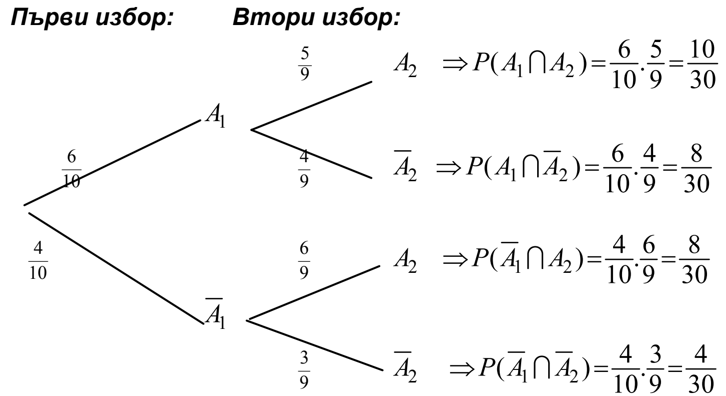
$$P(C)=P(A_1\cap A_2\cap A_3)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1\cap A_2)=\frac{3}{5}.\frac{2}{4}.\frac{1}{3}=\frac{1}{10}.$$

б) Тъй като изтеглените топки се връщат, то A_i са независими, то

$$P(C)=P(A_1\cap A_2\cap A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)=\frac{3}{5}.\frac{3}{5}.\frac{3}{5}=\frac{27}{125}.♦$$

Пример. 3.3. Кутия съдържа 6 бели и 4 черни топки. От кутията се изваждат две топки. Да се намери вероятността на събитията: а) A={двете топки да са бели}; б) B={двете топки са различен цвят}; в) втората топка да е бяла.

Решение: Означаваме събитията: A_i ={i-тата изтеглена топка е бяла}, $i=1,2$. Ще решим задачата с помощта на следната схема (граф със структура на дърво, за което върховете са настъпилите събития, а по дъгите са написани вероятностите им)



При първия избор в кутията има 10 топки, от които 6 са бели, следователно, имаме $P(A_1)=\dfrac{6}{10}$, $P(\overline{A}_1)=1-\dfrac{6}{10}=\dfrac{4}{10}$, които са нанесени по дъгите. Ако първата изтеглена топка е била бяла (настъпило е събитието A_1), то вероятността втората изтеглена топка да е бяла (събитие A_2) е равна на $P(A_2|A_1)=\dfrac{5}{9}$, защото от останалите 9 топки белите са 5.

По същия начин са получени числата и по останалите дъги (също условни вероятности). Тогава:

а) $P(A)=P(A_1\cap A_2)=P(A_1).P(A_2|A_1)=\dfrac{6}{10}.\dfrac{5}{9}=\dfrac{10}{30}$ (умножават се вероятностите по пътя от началото до върха A_2) Тук сме приложили формула (2.5) за вероятност на произведение от събития.

б) Тъй като $B=(A_1\cap\overline{A}_2)\cup(\overline{A}_1\cap A_2)$, то по формула (2.1) за сума от несъвместими събития получаваме $P(B)=P(A_1\cap\overline{A}_2)+P(\overline{A}_1\cap A_2)=\dfrac{8}{15}$.

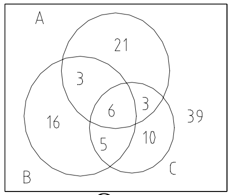
в) Търсим вероятността за събитието A_2. Случаите, при които настъпва събитието са: $A_1\cap A_2$, вероятността за което е $P(A_1).P(A_2|A_1)=\dfrac{6}{10}.\dfrac{5}{9}=\dfrac{1}{3}$ и $\overline{A}_1\cap A_2$, вероятността за което е $P(\overline{A}_1).P(A_2|\overline{A}_1)=\dfrac{4}{10}.\dfrac{6}{9}=\dfrac{4}{15}$.

Следователно, $P(A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)+P(\overline{A}_1)P(A_2|\overline{A}_1)=3/5$ (3.1)

(виж теорема **5.1** за пълната вероятност).♦

Пример 3.4. Изследва се рейтингът на вестниците А, В и С. От запитаните 103 граждани 33 си купуват вестник А, 30 – вестник В, 24 – С, 9 – А и В, 11 – В и С, 9 – А и С, а 6 – и трите вестника. а) Да се намери вероятността случайно посочен гражданин от анкетираните да си купува: а) поне един вестник (събитие E); б) само един вестник (събитие F); в) вестник A, ако си купува само един вестник.

Решение. Представяме данните графически (диаграма на Ван) като попълването започва от сечението на трите множества (гражданите, които купуват трите вестника са 6):



Ω

Сега лесно се изчисляват вероятностите:

а) $P(E)=\dfrac{33+16+5+10}{103}=0{,}621$;

б) $P(F)=\dfrac{21+16+10}{103}=0{,}456$.

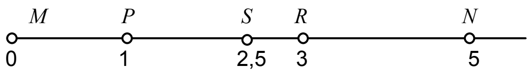
в) $P(A|F)=\dfrac{P(A\bigcap F)}{P(F)}=\dfrac{21/103}{47/103}=0{,}447$.■

Геометрична дефиниция за вероятност. Да разгледаме опит, който може да се интерпретира като случайно попадение на точка M в геометрична област Ω – отсечка, равнинна фигура или пространствено тяло с крайна мярка S_Ω (т.е. съответно с крайна дължина, лице или обем)

Ако условията на опита са такива, че вероятността точката M да попадне в област $D\subseteq\Omega$ (събитие $A=\{M\in D\}$) е пропорционална на мярката S_D (дължина, лице или обем) и не зависи от местоположението на D в Ω, то съгласувана с практическите резултати е <u>геометричната вероятност</u> $P(A)=\dfrac{S_D}{S_\Omega}$, *където S_Ω е мярката на областта Ω.*

Пример 3.5. От отсечката MN с дължина 5 cm по случаен начин е избрана точката Q. Каква е вероятността: а) отсечката MQ да е по-къса от отсечката QN (събитие *A*); б) точката да се намира на разстояние не повече от 1 cm от M и на не повече от 2 cm от N (събитие B).

Решение. а) Ако S е среда на отсечката MN, то събитието A означава, че $Q\in MS$, следователно, $P(A)=P(Q\in MS)=\dfrac{|MS|}{|MN|}=\dfrac{1}{2}$.



Фиг.3.1

б) От фиг. 3.1. имаме $P(B)=P(Q\in MP)+P(Q\in RN)=\dfrac{|MP|}{|MN|}+\dfrac{|RN|}{|MN|}=\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{5}=\dfrac{3}{5}$.♦

За разгледаните три начина за определяне на вероятност на събития може да се провери, че са изпълнени всички аксиоми за вероятност на събитие.

Упражнения.

1. От отсечка AB с дължина 12 cm произволно се посочва точка M при това вероятността точката да попадне в който и да е интервал е пропорционална на дължината му. Каква е вероятността за това лицето на квадрата със страна AM да е по-голямо от 36 cm^2 и по-малко от 81 cm^2 .
2. Мебелни плоскости се проверяват по два показателя – гладкост на повърхността и гладкост на ръбовете като е установено, че 80% от продукцията отговаря и на двата показателя, 10% - само на показателя за гладкост повърхност, 2% - само на показателя за гладкост на ръбове. Какъв е процентът на продукцията, за която не е изпълнен: а) нито един от показателите; б) показателят за гладкост на ръбовете?

§4. Елементи от комбинаториката.

В случая на краен брой равновероятни изходи от опита (класическа вероятност) за намирането на вероятността на едно събитие не е необходимо да се правят реални опити. Достатъчно е да се пресметнат благоприятните и всички възможни случаи. За последното се налага използването на някои формули от комбинаториката, които ще изложим в резюме.

Нека е дадено множеството $M=\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ от n елемента. Разглеждаме различните възможности за групиране на елементите на M по k елемента. Най-общо групите (в комбинаториката те се наричат <u>*съединения*</u>) можем да разделим на ненаредени (комбинации) и наредени (вариации):

<u>*Комбинация от n елемента k-ти клас*</u> *се нарича всяка ненаредена група от k елемента на множеството* (т.е. групите се различават една от друга по състава на елементите, но не и по подреждането им в групата).

<u>*Вариация от n елемента k-ти клас*</u> *се нарича всяка наредена група от k елемента на множеството* (т.е. групите се различават една от друга както по състава на елементите, така и по подреждането им в групата).

В някои случаи е възможно в групата един елемент да участвува повече от един път (<u>*група с повторение*</u>), а в други това не е възможно (<u>*група без повторение*</u>).

Броят на различните видове съединения се изчислява по формулите:

<u>*Комбинации*</u> *от n елемента k-ти клас*

а) без повторения $C_n^k=\dbinom{n}{k}=\dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, (4.1)

б) с повторения $\widetilde{C}_n^k=\dbinom{n+k-1}{k}$.

<u>*Вариации*</u> *от n елемента k-ти клас*

а) без повторения $V_n^k=n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$

б) с повторения $\widetilde{V}_n^k=n^k$.

Частен случай на вариация без повторение е <u>*пермутацията*</u> – всяко разместване на елементите в множеството.

Броят на пермутациите на множество от n елемента е $P_n = V_n^n = n!$.

Ще отбележим, че по дефиниция $\boxed{C_n^0 = 1,\ V_n^0 = 1,\ P_0 = 1}$.

Пример 4.1. Каква е вероятността произволно избрано трицифрено число да се състои от различни цифри.

Решение. Всяко тризначно число (например числото 212) е наредена тройка от десетте цифри 0,1,2,…,9, като е възможно и повторение на една или повече цифри, т.е. броят на всички числа, записани с три цифри е $\widetilde{V}_{10}^3 = 10^3 = 1000$. Но тук са включени двузначните и еднозначните числа, броят на които е $\widetilde{V}_{10}^2 = 10^2 = 100$. Следователно, броят на всички тризначни числа (броят на всички елементарни изходи) е $n = 1000 - 100 = 900$. Числата, записани с различни цифри, са $m = V_{10}^3 - V_9^2 = 10.9.8 - 9.8 = 648$.

Следователно, $P(A) = \dfrac{648}{900} = 0{,}72$. ♦

Пример 4.2. При хвърляне на две зарчета се отчита сумата S от падналите точки. Установено е, че по-често се случва, например, сумата да е 7, отколкото 6, и че най-рядко се пада сума 2 или 12. Какъв модел за пространство на елементарните събития трябва да се избере в този опит.

Решение. 1) Тъй като се интересуваме само от сумата от падналите точки, то естествено е да въведем 11 елементарни събития: сумата S да е равна на 2,3,...,11,12. Но тези елементарни събития не са равновероятни, което не отговаря на наблюдаваните закономерности.

2) Нека ω_{ij} ={на първото зарче са падат i точки, а на второто – j точки}. Ако зарчетата са еднакви, то те са неразличими за нас и резултатът ω_{ij} не се различава от резултата ω_{ji}, т.е. може да приемем, че всеки изход от едно хвърляне е една комбинация от 6 елемента втори клас с повторения. Следователно, броят на всички изходи е $n = \widetilde{C}_6^2 = \binom{7}{2} = \dfrac{7.6}{2} = 21$. Но сега събитията $\{S=6\}$ и $\{S=7\}$ настъпват в равен брой случаи (6=1+5=2+4=3+3, 7=1+6=2+5=3+4). Тогава вероятностите тези две събития би трябвало да са равни на 3/21, което показва, че и този модел не е добър.

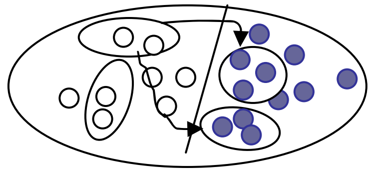
3) Ако приемем, че зарчетата са различими (например са различни по цвят), то пространството от елементарните изходи е $\Omega = \{\omega_{ij}\}$, елементарните изходи ω_{ij} $(i, j = 1,\dots,6)$ са равновероятни и броят им е $n = \widetilde{V}_6^2 = 6^2 = 36$. В този случай $P(S=6) = \dfrac{5}{36}$, а $P(S=7) = \dfrac{6}{36}$, което съответства на наблюденията ни.

Забележка 4.1. *Пример **4.2** показва, че при определяне на пространството от елементарни събития използването на вариации с повторение е за предпочитане пред комбинации с повторение, независимо дали практически се различава наредбата в групите.*

Пример 4.3. В кутия има M бели и N-M черни топки. От кутията се изтеглят без връщане k топки ($k \le \min(M, N-M)$. Разглеждаме събитието A - точно r от изтеглените топки да са бели. Да се докаже, че

$$P(A) = \frac{C_M^r C_{N-M}^{k-r}}{C_N^k}\ , \qquad (4.2)$$

Решение. Всеки k изтеглени топки са една комбинация от n елемента k-ти клас, следователно, всички възможни изходи са $n = C_N^k$.



Благоприятен случай е всяка група, в която имаме r бели и k-r черни топки. За да ги преброим, разделяме множеството на топките на две непресичащи се множества: множеството на белите топки (на брой M) и множеството на черните топки (общо N-M топки). Тогава за фиксирани r бели топки, благоприятен е всеки набор от k-r черни топки, броят на които е C_{N-M}^{k-r}. Но общият брой на r-торките бели топки е C_M^r. Следователно благоприятните случаи са $m = C_M^r . C_{N-M}^{k-r}$, откъдето следва формула (4.2).

Упражнения.

1. Зарче се хвърля 3 пъти. Да се намери вероятността на трите зарчета да се падне четен брой точки.
2. В библиотека има книги, разпределени в 10 раздела. Постъпили са 4 поръчки за литература. Считайки, че е възможен произволен състав на поръчаната литература, да се наметят вероятностите за събитията A={книгите са от един и същ раздел}, B={книгите са от различни раздели}, C={две от книгите са от един и същ раздел, а останалите две - от различни раздели} (виж забележка **4.1**).
3. Да се намери вероятността при случайно подреждане на 10 книги три определени книги да се намират една до друга.
4. На пет картички са написани буквите А, И, С, Ф, Я. Картичките се разполагат в ред по произволен начин. Каква е вероятността да се получи думата СОФИЯ?
5. На 10 картички са написани буквите А, А, И, И, К, С, С, Т, Т, Т. Картичките се разполагат в ред по произволен начин. Каква е вероятността да се получи думата СТАТИСТИКА?
6. Телефонен номер се състои от 6 цифри. Да се намери вероятността: а) всички цифри да са различни, б) номерът да завършва на 240.
7. В кутия има 10 топчета. Вероятността да се изтеглят 2 бели топчета е 2/15. Колко бели топчета има в кутията?
8. В кутия има 4 бели и 2 черни топчета. Изтеглят се 2 топчета. Каква е вероятността топчетата да са различен цвят?
9. В една кутия има a бели и b черни топки, а в друга – c бели и d черни. От двете кутии се изтеглят по една топка. Да се намери вероятността изтеглените топки: а) да се еднакъв цвят; б) да се различен цвят.

10. В група от 40 студенти има 10 спортисти. По случаен начин са избрани 20 студента. Да се намери вероятността между тях да има 5 спортисти.
11. В кутия има n бели и m черни топки. Изтеглят се k ($k>m$) топки. Каква е вероятността в кутията да са останали само бели топки.

§5. Формула за пълната вероятност. Формули на Бейс.

В пример **3.2.в)** намерихме безусловната вероятност на събитието A_2 ={втората изтеглена топка е бяла} с помощта на условните му вероятности. Получената формула (3.1) е частен случай на теоремата:

Теорема 5.1. (формула за пълната вероятност). *Нека* A *е произволно събитие и* $H_1, H_2, \ldots, H_n$ *е пълна група несъвместими събития, за които* $P(H_i)>0$ ($i=1,\ldots,n$). *Тогава*

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i) \tag{5.1}$$

Доказателство. От условието на теоремата следва, че при $i \neq j$ $H_i \cap H_j = \varnothing$ и $H_1 \cup \ldots \cup H_n = \Omega$.

Формула (5.1) следва от представянето

$$A = A\cap\Omega = A\cap(H_1\cup H_2\cup\ldots\cup H_n)=(A\cap H_1)\cup(A\cap H_2)\ldots\cup(A\cap H_n),$$

В последната сума събитията са несъвместими. Прилагаме формулите за сума, а след това за произведение на вероятностите и получаваме

$$\begin{aligned}P(A)&=P(A\cap H_1)+P(A\cap H_2)+\ldots+P(A\cap H_n)=\\&=P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2)+\ldots+P(H_n)P(A|H_n)\end{aligned}. \ \blacklozenge$$

Тази теорема са прилага, *когато се търси безусловната вероятност на събитие, за което са известни условните му вероятности при всички възможни случаи (образуващи пълна група несъвместими събития).*

Пример 5.1. Група от 20 спортиста се състои от 7 начинаещи, 10 добре и 3 отлично подготвени. Вероятността, че начинаещ спортист ще се справи с дадено упражнение е 0,4, а добре и отлично подготвен - съответно 0,8 и 1. Каква е вероятността случайно извикан спортист да изпълни упражнението (събитие A)?

Решение. Извиканият спортист може да бъде начинаещ (събитие H_1) добре подготвен (събитие H_2) или отлично подготвен (събитие H_3). По условие $P(H_1)=\frac{7}{20}$, $P(H_2)=\frac{10}{20}$, $P(H_3)=\frac{3}{20}$ (пълна група несъвместими събития).

Вероятността спортист от дадена група да изпълни упражнението е

$$P(A|H_1)=0{,}4,\ P(A|H_2)=0{,}8,\ P(A|H_3)=1.$$

Тогава по формула (5.1)

$$\begin{aligned}P(A)&=P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2)+P(H_3)P(A|H_3)=\\&=\frac{1}{20}(7.0{,}4+10.0{,}8+3.1)=0{,}69.\end{aligned} \ \blacklozenge$$

Забележка. Задачата може да се реши и с помощта на схемата, приложена в пример **3.2.**

Теорема 5.2. (формули на Бейс). *Нека* A *е призволно събитие и* $H_1, H_2, \ldots, H_n$ *е пълна система несъвместими събития, за които* $P(H_i)>0$ ($i=1,\ldots,n$). *Тогава*

$$P(H_k|A)=\frac{P(H_k)P(A|H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i)},\ k=1,2,\ldots n. \tag{5.2}$$

Доказателство. Имаме $P(H_k|A)=\frac{P(A\cap H_k)}{P(A)}=\frac{P(H_k)P(A|H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i)}$. ♦

Пример 5.2. При условията от предния пример извиканият спортист е изпълнил упражнението. Каква е вероятността той да е бил начинаещ?

Решение. Тук се търси условната верятност за събитието H_1, ако е настъпило събитието A, за която получаваме

$$P(H_1|A)=\frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2)+P(H_3)P(A|H_3)}=\frac{0{,}14}{0{,}69}\approx 0{,}20.$$

Както се вижда $P(H_1|A)<P(H_1)$, което би трябвало да се очаква. ♦

Формулите на Бейс намират приложение, *когато за настъпването на дадено събитие съдим по косвени признаци.* Такива случаи имаме в много области от медицината, физиката, астрономията, при които вероятността за верността на дадено предположение определяме по настъпването на друго събитие, което сме в състояние да наблюдаваме.

Пример 5.3. (*Диагностичен тест)* Вероятността жителите на дадена област да се разболеят от дадено заболяване е 0,15. Болестта се открива с тест, които дава положителен резултат с вероятност 0,9 при наличие на заболяване и с вероятност 0,02 при отсъствие на болестта. Да се намери вероятността гражданин от областта, за който тестът е положителен, да е болен от тази болест.

Решение. Събитието H={гражданинът страда от болестта} и неговото отрицание $\overline{H}$ образуват пълна група, $P(H)=0{,}15$, $P(\overline{H})=0{,}85$. Искаме да преоценим тези вероятности след като е настъпило събитието A={тестът за гражданина е положителен} като знаем, че $P(A|H)=0{,}9$ и $P(A|\overline{H})=0{,}02$. По формула (5.2)

$$P(H|A)=\frac{P(H)P(A|H)}{P(H)P(A|H)+P(\overline{H})P(A|\overline{H})}=\frac{0{,}15.0{,}9}{0{,}15.0{,}9+0{,}85.0{,}02}=0{,}89. \ \blacklozenge$$

Упражнения.

1. В група от 20 ловци има 4 отлични, 10 добри и 6 посредствени стрелци като вероятността при един изстрел да улучи целта е съответно 0,9 за отличен стрелец, 0,7 за добър и 0,5 за посредствен.

а) Каква е вероятността някой от стрелците да улучи целта. б) От групата е произведен по един изстрел по две различни цели. Каква е вероятността целите да са поразени.

Двама от стрелците са произвели по един изстрел в цел. в) Каква е вероятността да има две попадения. г) Има две попадения. Каква е вероятността те да са на двама посредствени стрелци.

2. Известно е, че 96% от продукцията на завод е стандартна. Поради опростена система за контрол стандартно изделие се признава за стандартно с вероятност 0,98, а нестандартно се признава за стандартно с вероятност 0,05. Да се определи вероятността за това, че след проверката стандартно изделие ще бъде признато за стандартно.

ВЕРОЯТНОСТ НА СЪБИТИЕ – ОСНОВНИ РЕЗУЛТАТИ

1) *Случайни събития се наблюдават в експерименти, резултатът от които не е еднозначно определен (случаен, стохастичен експеримент).*

2) *Математичен модел на случайните експерименти е пространството Ω от елементарните събития. Случайните събития се разглеждат като подмножества на Ω, като подмножеството се състои от всички елементарни събития, с настъпването на които настъпва и случайното събитие (благоприятни случаи). С Ω се означава достоверното, а с $\varnothing$ - невъзможното събитие.*

3) *За две (и повече) събития A и B се въвеждат действия събиране $A\bigcup B$ и умножение $A\bigcap B$, съответстващи и притежаващи свойствата на действията обединение и сечение на множества.*

4) *Пълното описание на едно случайно събитие A включва: 1) съвкупността от всички благоприятни случаи; 2) вероятността за настъпване на събитието - мярка за честотата на сбъдване на събитието със свойствата:*

1) $0\le P(A)\le 1$;   2) $P(\Omega)=1$;

3) Ако $A_i\cap A_j=\varnothing$ *при* $i\neq j$, *то* $P\left(\bigcup_k A_k\right)=\sum_k P(A_k)$.

5) *Вероятността е число, което се определя в зависимост от условията на експеримента. Начини за получаване:*

- *статистически (базиран на опитни данни) – статистическа вероятност.*
- *теоретичен (базиран на математичен модел на експеримента) – такива са, например, класическата или геометричната вероятност.*

6) *Основни взаимовръзки между две събития:*

- $A\subseteq B$ *(A влече B), тогава* $P(A)\le P(B)$,

- $A=B$ *(A еквивалентно на B), тогава* $P(A)=P(B)$;
- *A и B са несъвместими, ако* $P(A\bigcap B)=\emptyset$.
- *A и B са независими – ако условните вероятности $P(A|B)$ и $P(B|A)$ са равни съответно на безусловните вероятности $P(A)$ и $P(B)$, т.е.*

$$P(A|B)=P(A) \text{ и } P(B|A)=P(B).$$

В противен случай, събитията се наричат зависими.

7) Формули за пресмятане на вероятност на случайно събитие:

1. ***Вероятност на произведение*** *(съвместна поява на събития):*

$$P(A\bigcap B)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B).$$

- *За n събития:* $P(A_1\bigcap A_2\bigcap\ldots\bigcap A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)\ldots P(A_n|A_1\bigcap\ldots\bigcap A_{n-1})$.
- *За независими събития:* $P(A\bigcap B)=P(A)P(B)$.

2. ***Вероятност на сума*** *(поява на поне едно от събитията)*

$$P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(A\bigcap B)$$

- *За n събития е по-удобна формулата*

$$P(A_1\bigcup\ldots\bigcup A_n)=1-P(\overline{A}_1\bigcap\ldots\bigcap\overline{A}_n).$$

- *За несъвместими събития:* $P(A\bigcup B\bigcup C)=P(A)+P(B)+P(C)$.

3. *Ако $H_1,H_2,\ldots,H_n$ образуват пълна група несъвместими събития и A е призволно събитие, то:*

- $P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(A|H_i)$ *(**формула за пълната вероятност**)*
- $P(H_k|A)=\dfrac{P(H_k)P(A|H_k)}{\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(A|H_i)}$, $k=1,2,\ldots n$ *(**формули на Бейс**)*.

Общи задачи.

1. Зарче се хвърля 2 пъти. Да се опише пространството от елементарни събития Ω. Каква е вероятността за събитията: A={падат се различни точки}; B={сумата от точките е 3}, C={сумата от точките е 5}, D={сумата от точките е 6}, F={сумата от точките е четно число като при втория опит се пада 6}.

2. На пет картички са написани буквите Е, О, Т, Р, Р. Изтеглят се последователно:
а) 5 картички. Каква е вероятността да се получи думата ТЕРОР.
б) 3 картички. Каква е вероятността да се получи думата ТОР.

3. Избира се случайно едно тризначно число. Каква е вероятността две от цифрите му да са еднакви, ако а) ако в десетичния запис на числото няма нула, б) всички случаи са възможни.

4. На картички са написани цифрите 1, 2, 3, 4 и 5. Ако картичките са подредени по случаен начин каква е вероятността да се е получило четно число.

5. В кутия има 5 бели и 5 черни топчета. Последователно се изтеглят всички топчета. Каква е вероятността цветовете им да се редуват?
6. На скамейка сядат по случаен начин 5 души. Каква е вероятността 3 определени лица да бъдат един до друг.
7. Опитът се състои в подхвърляне на три правилни монети. Нека *A*={на първата монета се пада Л}, *B*={поне на две от монетите се пада Л}. Да се състави пространството от елементарни събития за дадения опит. Да се намерят вероятностите $P(A)$, $P(B)$, $P(A\bigcap B)$, $P(A\bigcup B)$, $P(\overline{A}\bigcup\overline{B})$, $P(A\bigcup\overline{B})$, $P(A\bigcap\overline{B})$.
8. Нека $\Omega=\{A,B,C\}$ е пространството от елементарни събития, настъпващи при даден експеримент и $P(A)=1/2$, $P(B)=1/3$. Да се намерят вероятностите на всички случайни събития, свързани с този експеримент.
9. В автобус има 5 пътника. Автобусът спира на 8 спирки. Каква е вероятността пътниците да слязат на различни спирки?
10. Система се състои от 5 компонента, означени с 1, 2, 3, 4 и 5. Всеки компонент може да работи (с означение 1) или да не работи (с означение 0). Да се дефинира пространството от елементарните изходи и да се изрази като негово подмножество събитието *A*={броят на работещите компоненти е по-голям от броя на неработещите}.
11. Колода от 52 разбъркани карти е разделена на 2 половини. Да се намерят вероятностите на събитията: A={във всяка половина има точно 2 аса}. B={в една от половините няма нито едно асо}.
12. Нека *A*, *B* и *C* са три произволни събития. Да се изразят чрез тези събития събитията: а) настъпили са трите събития; б) настъпило е поне едно от събитията; в) настъпило е едно събитие; г) не е настъпило нито едно събитие; д) настъпили са не повече от две събития.
13. Хвърлени са 6 правилни зарчета. Каква е вероятността за падането на: а) поне една; б) точно една; в) точно две единици.
14. В лотария вероятността за печалба е 0,2. Да се определи колко билета най-малко трябва да се закупят, че вероятността да се получи поне една печалба да бъде не по-малка от а) 0,65; б) 0,9; в) 0,99.
15. Да се намери вероятността при случайно подреждане на 10 книги три определени книги да се намират една до друга.
16. В кутия има 2 бели и 3 черни и 5 сини топчета. Изтеглят се 3 топчета. Каква е вероятността топчетата да са различен цвят.
17. Зарче е направено така, че 1 точка се пада 2 пъти по-често от останалите точки, вероятността на които е една и съща. Зарчето се хвърля 2 пъти.
а) Изпълнени ли са условията за прилагане на класическата дефиниция за вероятност в този опит. б) Да се намери вероятността на събитията A={броят на точките при второто хвърляне е по-голям от броя на точките при първото}, B={сборът от точките е равен на 7} и техните противоположни и на събитията $A\bigcap B$ и $A\bigcup B$.
18. За да стигне до работното си място, гражданин може да ползва автобус или трамвай, като честотата на трамваите е два пъти по-голяма от честотата на автобусите. Ако вземе автобус, вероятността да закъснее е 0,2, ако вземе трамвай – 0,3. а) Да се намери вероятността гражданинът да закъснее. б) Известно е, че гражданинът е закъснял. Каква е вероятността този ден той да е пристигнал със трамвай. в) Каква е вероятността през една работна седмица (5 дни) гражданинът да закъснее два пъти. г) Ако през работната седмица има поне едно закъснение, служителят бива глобен. Каква е вероятността гражданинът да бъде глобен за закъснение 1) през дадена седмица; 2) през даден месец .
19. Гражданин е закупил три билета от лотария: по един от 1, 2 и 5 лева, вероятността за печалба от които е съответно 1/4, 1/5 и 1/10. Да се намерят вероятностите на събитията: A={гражданинът е спечелил 6 лв}, B={печели само един от билетите}, C={печели поне един билет}.

20. Една монета се подхвърля 3 пъти. Да се опише пространството Ω на елементарните събития и да се изразят като негови подможества събитията A={при първото подхвърляне се пада лице}, B={при второто подхвърляне се пада лице}, C={пада се повече лице, отколкото герб} и да се намерят вероятностите им, ако се предполага, че всички елементарни събития имат равни вероятности.
21. От 5 студента, явяващи се на изпит, от 30-те въпроса в конспекта двама знаят по 10 въпроса, двама – по 20, а един - всички въпроси. Изпитът е взет, ако студентът отговори на един случайно изтеглен въпрос. а) Намерете вероятността произволно извикан студент да вземе изпита. б) Извиканият студент е издържал изпита. Каква е вероятността той да е чел само по 10 въпроса от конспекта. в) как се променят тези вероятности, ако студентът трябва да изтегли и отговори на 2 въпроса?
22. Колко прави могат да се прекарат: а) през 8 точки, никои три от които не лежат на една права; б) през 10 точки, четири от които лежат на една права?
23. В две еднакви кутии има топки, които се различават само по цвят. В първата кутия има 5 бели, 2 черни и 3 червени топки, а във втората - 3 бели, 1 черна и 6 червени топки. а) От кутиите е извадена по една топка. Каква е вероятността двете топки да имат един и същ цвят? б) Извадена е топка от една от кутиите. Каква е вероятността топката да е бяла? в) Изтеглена е една черна топка. Каква е вероятността топката да е била в първата кутия.?
24. Едно изделие се обработва на една от две машини M_1 и M_2 . Вероятността за повреда на машините M_1 и M_2 са съответно 0,4 и 0,6. Известно е също, че 90% от обработената на машина M_1 и 70% от обработената на машина M_2 продукция е първокачествена. Да се пресметне: а) вероятността едно изделие да е първо качество. б) вероятността изделието да е обработено на машина M_1 , ако се знае, че то е не е първо качество.
25. Колко пъти трябва да се подхвърлят двойка зарчета, че с вероятност, не по-малка от 0,5, да се появи сума на точките, равна на 12?
26. Пространството от елементарни събития на случаен експеримент е $\Omega=\{\omega_1,\dots,\omega_5\}$ с вероятности съответно 0,1, 0,1, 0,2, 0,4 и 0,2. Нека $A=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$, $B=\{\omega_1,\omega_3,\omega_5\}$. Да се намерят вероятностите $P(A)$, $P(\overline{A})$, $P(B)$, $P(\overline{B})$ $P(A\bigcap B)$, $P(A\bigcup B)$.
27. В 75% от случаите клиентите на интернет-център се обаждат по телефона за да се оплачат от качеството на услугата, в 5% - да поискат справка или информация, а останалите обаждания са свързани с персонала на сервиза. От оплакванията 77% се дължат на неизправности на връзката, 20% - на непълноти в софтуера, а останалите 3% - на неправилно инсталиране на софтуера. Да се определи вероятността за събитията: а) *A*={при обаждане по телефона клиент да се оплаче от неизправност на връзката}; б) *B*={От три обаждания две да са справки и едно оплакване от качеството на услугата}.
28. В кутия има 4 бели, 4 червени и 4 сини топчета. Каква е вероятността от 4 изтеглени топчета 1 да е бяло, 2 червени и 1 синьо.
29. Качеството на продукт зависи от острието на ножа за нарязването му. Ако ножът е нов, то само 1% от продукцията е некачествена, ако е средно износен – 3%, ако е износен – 5%. В отрасъла 25% от ножовете са нови, 60% средно износени и 15% са износени. Какъв е процентът на качествената продукция?